



Title	フィルダムの三次元固有振動解析について
Author(s)	能町, 純雄; Nomachi, Sumio G.; 角田, 与史雄 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 118, 35-45
Issue Date	1984-02-07
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41836
Type	departmental bulletin paper
File Information	118_35-46.pdf



フィルダムの三次元固有振動解析について

能 町 純 雄 角 田 与史雄
岸 徳 光* 黒 岩 真 彦**

(昭和58年9月30日受理)

The Three Dimensional Dynamic Response of Embankment Dams

Sumio G. NOMACHI, Yoshio KAKUTA, Norimitsu KISHI
and Masahiko KUROIWA
(Received September 30, 1983)

Abstract

The present work consists of a theoretical investigation of the response of a two dimensional elastic wedge subject to an arbitrary disturbance.

Expressions are derived for the deflections and rotation together with shears and bending moments which develop in the wedge owing to an imposed time dependent disturbance. The frequencies of the wedge are for the two first modes of oscillation, and the moduli of elasticity are expressed by the n -th order of depth from the apex where $0 \leq n \leq 2/3$.

1. 緒 言

アースダムやロックフィルダムの地震応答問題に関しては、多くの研究者によってかなりの知見が積み重ねられてきている。主な研究者を上げると、畑中 (1955)¹⁾、Ambraseys (1960)²⁾、石崎その他 (1962)³⁾、Chopra (1969)⁴⁾、南 (1969)⁵⁾、Makdisi (1981)、Abdel-Ghaffer その他 (1981)⁶⁾、大町その他 (1983)⁷⁾ 等を数えることができる。

しかし、従来のダム変形の解析手法は、有限要素法による解析を除いて、すべて上下流方向底幅に対して高さが低いという理由から単純剪断理論を用い、これに有効応力のべき乗に比例する剛性を仮定するためダム頂からの鉛直方向距離に関する応力の非線形性を加味して解析を行い、実測モード分布とよく合うように乗数値を定めているのが実状である。ここで問題として浮び上ってくるのは

1. 単純剪断理論がどのような断面のダム形状に対して機能するか。
2. 谷形状を考えた場合、単純剪断理論の適用範囲はどのように変化するか。
3. 剛性に対する指数はいくらにとるべきか。

などであろう。

土木工学科 構造工学講座

* 室蘭工業大学 土木工学科

** 奥村組 技術研究所

本論文は、せん断と曲げとを考慮した平面保持の変形理論によってウェッジ断面を取扱い、谷幅方向にはせん断抵抗のみとしてこの問題を解明しようとするものである。

2. 仮 定

図-1 に示される座標を設定し、運動の基本式を求めるために次のような簡略化した仮定を導入する。すなわち、

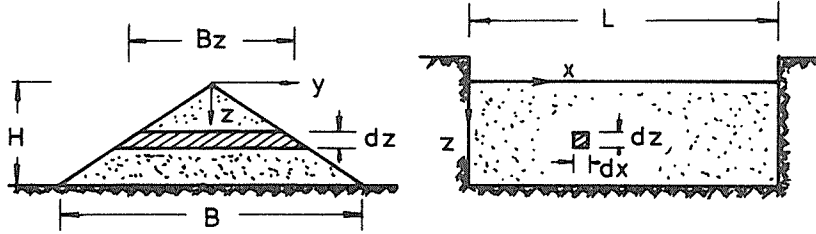


Fig. 1 General view of a dam and coordinate system.

1. ダムは一定な密度 δ とポアソン比 ν を有する材料から構成されるが、圧縮弾性係数とせん断弾性係数 E , G は有効応力に依存する剛性値である。たとえば, Gazetas⁸⁾ は実測と理論から式(1)のように主張している。

$$G = G(z) = G_m (z/H)^{2/3} \quad (1)$$

ただし, G_m はダム基底における最大せん断剛性値である。

本文では剛性値を一般化して

$$G = G(z) = G_m (z/H)^n \quad (2)$$

ただし $0 \leq n \leq 2/3$ と仮定する。式(2)において, $n = 0$ の場合は一般弾性体であり, $n = 1/3$ の場合は飯田⁹⁾ がヘルツの理論を用いて砂粒体に予想した値である。また, 砂質土では $n = 0.4 \sim 0.5$ ということが実験から知られている。

2. 媒体は線形な応力-歪関係と仮定する。この仮定は低レベル歪に対しては許容できるものと考えられ, しばしば等価粘弾性歪と呼ばれる方法によって大変形にも拡張されることはよく知られている通りである。

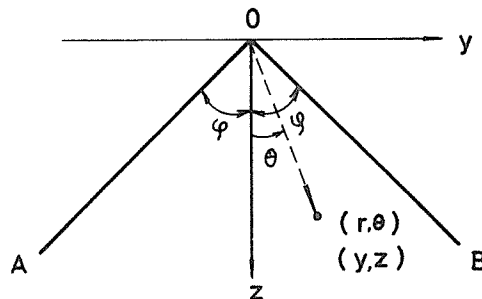


Fig. 2 The coordinates to a semi-infinite elastic medium.

3. 曲げ応力およびせん断応力 σ_z , τ_{yz} は上下流方向 (y 方向) に線形であると仮定する。これは、ウェッジの水平方向に物体力が作用するときの 2 次元応力分布から次のように推定できる。いま、図-2 に示すようなウェッジ弾性体に y 方向に Y なる物体力が作用すると仮定する。この極座標によるウェッジ AOB 内の応力分布は次のように与えられる¹⁰⁾。

$$\sigma_r = -Cr \sin 3\theta + Dr \sin \theta + \frac{3}{4} Yr \sin \theta \quad (3)$$

$$\sigma_\theta = Cr \sin 3\theta + 3Dr \sin \theta + \frac{1}{4} Yr \sin \theta \quad (4)$$

$$\tau_{r\theta} = Cr \cos 3\theta + Dr \cos \theta + \frac{1}{4} Yr \cos \theta \quad (5)$$

上式中、C, D は $\theta = \pm \varphi$ における境界条件式(6)より決定される。

$$\sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \cdots \cdots \theta = \pm \varphi \quad (6)$$

このようにして求められた応力値を y - z 座標に変換すれば、次のように示される。すなわち、

$$\sigma_z = \frac{Y}{2} y \cot^2 \varphi \quad (7)$$

$$\sigma_y = \frac{Y}{2} y \quad (8)$$

$$\tau_{zy} = \frac{Y}{2} z \quad (9)$$

上式は応力分布が y 方向に線形分布あるいは一定値であることを示している。したがって平均せん断応力係数 k は 1 とおくことができる。

3. 運動方程式

いま、x - y - z を直交座標とする 3 次元対称ウェッジを図-3 のように考え、g(t) なる地震動が底面および両側谷面からウェッジ構造体に入力するものとすれば、外的擾乱は媒体各部にせん断力および曲げモーメントによって伝播してウェッジ構造体を振動させるが、z 軸回りの曲げモーメントは小さいものと考えられるので、これを無視して議論を進めることとする。このようにすることによってウェッジの変位は y 軸方向変位 v と z 軸方向変位 w のみで表現されることとなる。先に述べた上下流方向応力分布の線形性 (式(7), (8)) を考慮すると、v, w は

$$v = v(x, z), \quad w = y \times \varphi(x, z) \quad (10)$$

とおくことができる。

いま、 ρ , B_z , I_z をそれぞれウェッジの単位体積質量、y 方向の断面の幅、x 軸回りの断面 2 次モーメントとし、 Q_z , Q_x を z 断面および x 断面に作用する y 方向せん断力とすれば、運動方程式は次のように示される。

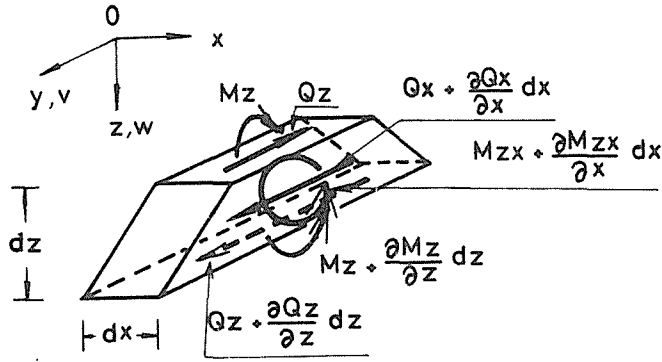


Fig.3 All forces acting on infinitesimal body.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} = \rho B_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right) \quad (11)$$

M_{zx} を x 軸回りのせん断応力によるモーメント, M_z を σ_z によるモーメントとすれば, 図-3の要素の x 軸に関するモーメントのつり合いは,

$$\frac{\partial M_{zx}}{\partial x} - Q_z + \frac{\partial M_z}{\partial z} = \rho I_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (12)$$

上式中

$$B_z = \frac{B}{H} z, \quad I_z = \frac{1}{12} \left(\frac{B}{H} \right)^3 z^3$$

これからの断面力と変位の関係は, 次式のように示される。

$$\begin{aligned} M_z &= E_z I_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}, & Q_z &= G_z B_z \left(\varphi + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ M_{zx} &= G_z I_z \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & Q_x &= G_z B_z \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (13)$$

4. 振動固有値方程式

運動方程式(11), (12)において, $g(t) = 0$, 谷幅方向の変位モードを m 次の正弦分布とし, 角速度 p なる調和振動を仮定する。すなわち,

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\theta}{z^2} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin pt, & Q_z &= \mathbf{Q}_z \sin \frac{m\pi}{L} x \sin pt \\ v &= V \sin \frac{m\pi}{L} x \sin pt, & M_z &= \mathbf{M}_z \sin \frac{m\pi}{L} x \sin pt \\ Q_x &= \mathbf{Q}_x \cos \frac{m\pi}{L} x \sin pt, & M_{zx} &= \mathbf{M}_{zx} \cos \frac{m\pi}{L} x \sin pt \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、座標および定数を高さHを基礎とする無次元量に変換する。

$$\xi = \frac{x}{H}, \quad \eta = \frac{z}{H}, \quad r_L = \frac{H}{L}, \quad r_B = \frac{H}{B}, \quad \mu = \frac{1}{12} \frac{1}{r_B^3} \quad (15)$$

さらに、変形と円振動数を次のようにおく。

$$\mathbf{V} = \mathbf{E}_m \mathbf{V}, \quad \Theta = G_m \frac{\theta}{H}, \quad \beta = \frac{PH}{C_s} \quad (16)$$

ただし、 C_s はダム底部のせん断波速度である。

式(11), (12)に式(14)~(16)を代入してせん断力とたわみ角の振幅について整理すると、

$$\frac{d^2 \mathbf{Q}_z}{d\eta^2} - \frac{1}{\eta} \frac{d\mathbf{Q}_z}{d\eta} + \beta^2 \frac{1}{\eta^n} \mathbf{Q}_z = \beta^2 \frac{1}{r_B} \frac{1}{\eta} \Theta + (m\pi r_L) \left\{ \frac{d\mathbf{Q}_x}{d\eta} - \frac{\mathbf{Q}_x}{\eta} \right\} \quad (17)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} - (1-n) \frac{1}{\eta} \frac{d\Theta}{d\eta} + \left\{ \beta^2 \frac{E_m}{G_m} \frac{1}{\eta^n} - \frac{2n}{\eta^2} - (m\pi r_L)^2 \frac{E_m}{G_m} \right\} \Theta = \frac{G_m}{E_m} \frac{1}{\mu} \frac{1}{\eta^{1+n}} \mathbf{Q}_z \quad (18)$$

また、せん断力間の関係式は式(13)を用いて

$$\frac{d\mathbf{Q}_x}{d\eta} - (1+n) \frac{1}{\eta} \mathbf{Q}_x = m\pi r_L \mathbf{Q}_z - (m\pi r_L) \frac{1}{r_B} \frac{1}{\eta^{1-n}} \Theta \quad (19)$$

以上、式(17)~(19)が固有値 β を求めるための振動固有値方程式である。

特に、 $n=0$ の場合は、 \mathbf{Q}_z と Θ のみの変数で次式(20), (21)のように示される。

$$\frac{d^2 \mathbf{Q}_z}{d\eta^2} - \frac{1}{\eta} \frac{d\mathbf{Q}_z}{d\eta} + \bar{\beta}^2 \mathbf{Q}_z = \bar{\beta}^2 \frac{1}{r_B} \frac{1}{\eta} \Theta \quad (20)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} - \frac{1}{\eta} \frac{d\Theta}{d\eta} + \bar{\beta}^2 \frac{E_m}{G_m} \Theta = \mu \frac{1}{\eta} \mathbf{Q}_z \quad (21)$$

ただし、 $\bar{\beta}^2 = \beta^2 - (m\pi r_L)^2$ である。

5. 境界条件および数値解析手法

x方向における境界条件は、自然境界を仮定するものとする。z軸方向に関しては、 $\eta=0$ において、

$$\mathbf{Q}_z = 0, \quad \mathbf{M}_z = 0 \quad (22)$$

また、底部 $\eta=1$ においては

$$\Theta = 0, \quad \mathbf{V} = 0 \quad (23)$$

境界条件式(22), (23)を用いて振動固有値方程式(17)~(19)を解析的に解くことは極めて困難である。そこで、本文では差分方程式に変換して解析を行うこととする。

いま、分割数をk、差分間隔 $\Delta\eta=1/k$ とすると、式(17)~(19)は次式のようなマトリックス式に整理できる。すなわち、

$$[K_{zz}]\{\mathbf{Q}_z\} - \beta^2 [M_{zz}]\{\mathbf{Q}_z\} = -\beta^2 [M_{z\theta}]\{\mathbf{Q}\} + [K_{zx}]\{\mathbf{Q}_x\} \quad (24)$$

$$[K_{\theta\theta}]\{\Theta\} - \beta^2 [M_{\theta\theta}]\{\Theta\} = -[K_{\theta z}]\{\mathbf{Q}_z\} \quad (25)$$

$$[K_{xx}]\{\mathbf{Q}_x\} = [K_{xz}]\{\mathbf{Q}_z\} - [K_{x\theta}]\{\Theta\} \quad (26)$$

各マトリックスは、 $2 \leq i \leq k-2$ として、

$$[K_{zz}] = \begin{bmatrix} \frac{2\eta_1}{\Delta\eta^2} - \left(\frac{\eta_1}{\Delta\eta^2} - \frac{1}{2\Delta\eta}\right) & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\left(\frac{\eta_i}{\Delta\eta^2} + \frac{1}{2\Delta\eta}\right) \frac{2\eta_i}{\Delta\eta^2} - \left(\frac{\eta_i}{\Delta\eta^2} - \frac{1}{2\Delta\eta}\right) & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{2}{3} \left(\frac{\eta_{k-1}}{\Delta\eta^2} + \frac{2}{2\Delta\eta}\right) \frac{2}{3} \left(\frac{\eta_{k-1}}{\Delta\eta^2} + \frac{2}{2\Delta\eta}\right) & \end{bmatrix}$$

$$[K_{\theta\theta}] = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{2\eta_1}{\Delta\eta^2} + \frac{2n}{\eta_1} + (m\pi r_L)^2 \frac{G_m}{E_m} \eta_1 \right\} - \left\{ \frac{\eta_1}{\Delta\eta^2} - \frac{(1-n)}{2\Delta\eta} \right\} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\left\{ \frac{\eta_i}{\Delta\eta^2} + \frac{(1-n)}{2\Delta\eta} \right\} \left\{ \frac{2\eta_i}{\Delta\eta^2} + \frac{2n}{\eta_i} + (m\pi r_L)^2 \frac{G_m}{E_m} \eta_i \right\} - \left\{ \frac{\eta_i}{\Delta\eta^2} - \frac{(1+n)}{2\Delta\eta} \right\} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\left\{ \frac{\eta_{k-1}}{\Delta\eta^2} + \frac{(1-n)}{2\Delta\eta} \right\} \left\{ \frac{2\eta_{k-1}}{\Delta\eta^2} + \frac{2n}{\eta_{k-1}} + (m\pi r_L)^2 \frac{G_m}{E_m} \eta_{k-1} \right\} & \end{bmatrix}$$

$$[K_{xx}] = \begin{bmatrix} -(1+n) & \frac{\eta_1}{2\Delta\eta} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\eta_i}{2\Delta\eta} - (1+n) & \frac{\eta_i}{2\Delta\eta} & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{\eta_{k-1}}{2\Delta\eta} & -(1+n) \end{bmatrix}, \quad [K_{zx}] = (m\pi r_L) \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -\frac{\eta_1}{2\Delta\eta} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ & \frac{\eta_i}{2\Delta\eta} & 1 & -\frac{\eta_i}{2\Delta\eta} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \frac{\eta_{k-1}}{2\Delta\eta} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\eta_{\alpha}^{\alpha}] = \begin{bmatrix} \eta_1^{\alpha} & & 0 \\ & \eta_1^{\alpha} & \\ 0 & & \eta_{k-1}^{\alpha} \end{bmatrix}$$

と仮定すると,

$$\begin{aligned} [K_{\theta x}] &= \frac{G_m}{E_m} \frac{1}{\mu} [\eta_{\alpha}^{-n}], & [K_{xz}] &= (m\pi r_L) [\eta_{\alpha}], & [K_{x\theta}] &= \frac{(m\pi r_L)}{r_B} [\eta_{\alpha}^n] \\ [M_{zz}] &= [\eta_{\alpha}^{1-n}], & [M_{\theta\theta}] &= \frac{G_m}{E_m} [\eta_{\alpha}^{1-n}], & [M_{x\theta}] &= \frac{1}{r_B} [E] \end{aligned}$$

となる。式(24)～(27)から,

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{\theta\theta}] & [K_{\theta x}] \\ [K_{zx}][K_{xx}]^{-1}[K_{x\theta}] & [K_{zz}] - [K_{zx}][K_{xx}]^{-1}[K_{xz}] \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{\theta\theta}] & 0 \\ -[M_{z\theta}] & [M_{zz}] \end{bmatrix}, \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \Theta \\ Q_z \end{Bmatrix}$$

を仮定して、次式のようなマトリックスに到達する。

$$[K] \{\Delta\} - \beta^2 [M] \{\Delta\} = 0 \quad (28)$$

したがって

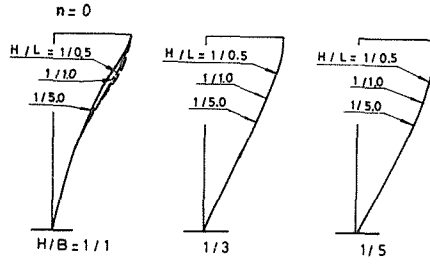
$$\det | [K] - \beta^2 [M] | = 0 \quad (29)$$

より固有値を求めることができ、 \mathbf{V} のモードは式(11)を差分化することにより容易に得られる。

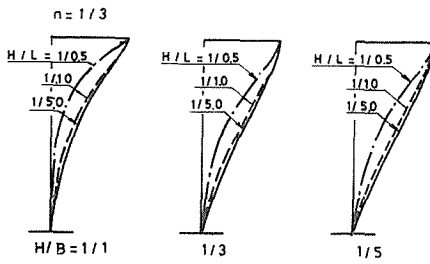
数値解析は分割数による精度の検討の結果、20分割に固定して行うこととした。なお、ポアソン比は0.45としている。

6. 数値解析結果

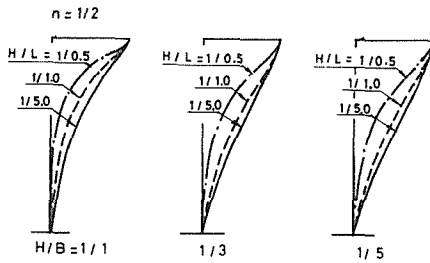
図-4(a)～(d)に、 $n=0, 1/3, 1/2, 2/3$ に対するウェッジ形状を示すパラメーター $H/B=1/1, 1/3, 1/5$ についての第1次固有振動モードが示されている。このほか、谷幅を示すパラメーター $H/L=1/0.5, 1/1.0, 1/5.0$ についての3モードを求めてあるが、これによって谷幅の影響を検討することができる。 $n=0$ の場合、谷幅の影響はほとんどなく、各 H/B に対してほぼ同一のモード分布を示している。しかしながら、 $n \neq 0$ の場合には谷幅の大きさ H/L によってモード分布が大きく異なっていることがわかる。特に Gazetas⁸⁾ が主張している $n=2/3$ の場合は谷幅の影響が最も大きいようである。



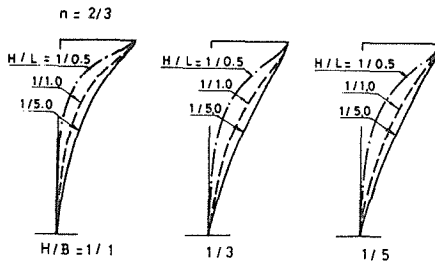
(a) In case of $n = 0$.



(b) In case of $n = 1/3$.



(c) In case of $n = 1/2$.



(d) In case of $n = 2/3$.

Fig.4 Comparison of mode shapes along depth of wedge with aspects H/B and H/L .

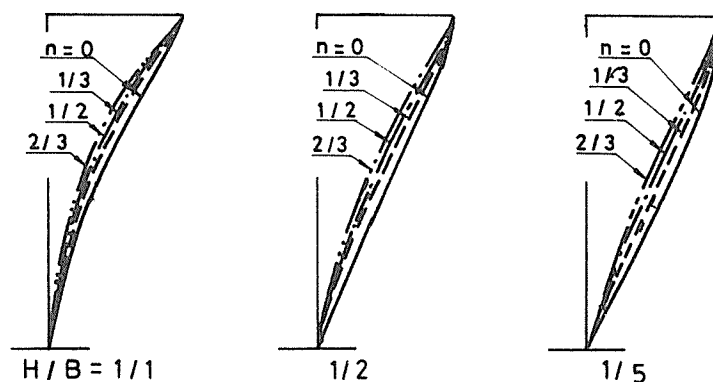


Fig.5 First mode shapes along depth of wedge in case of $H/L=1/3$.

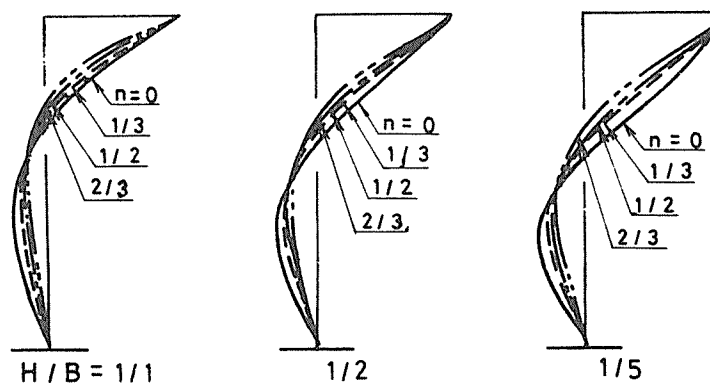


Fig.6 Second mode shapes along depth of wedge in case of $H/L=1/3$.

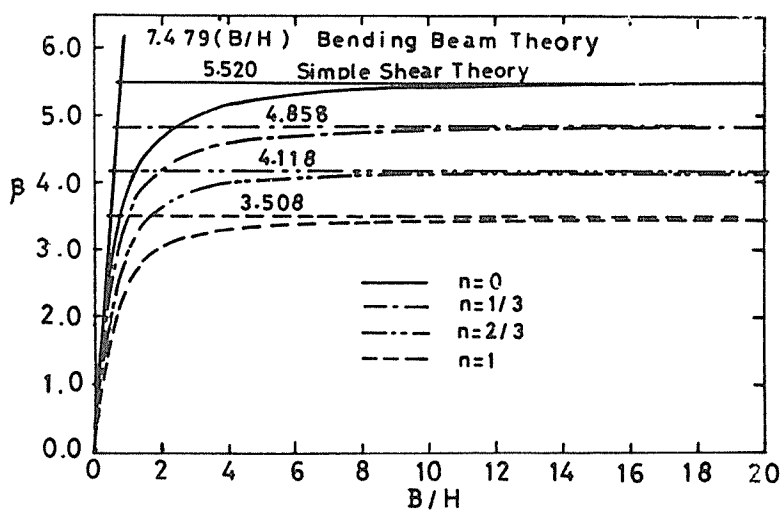


Fig.7 The first eigen-value of wedge taking shear and bending moment into account with infinite length.

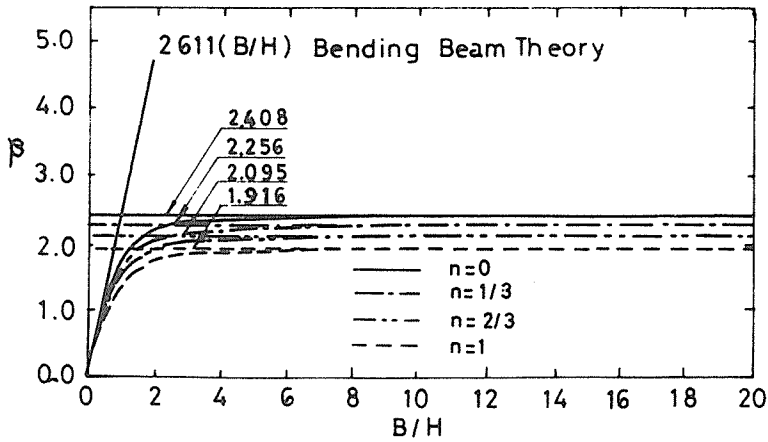
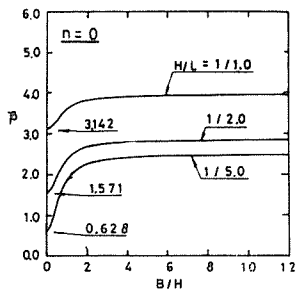
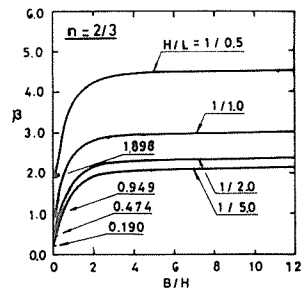


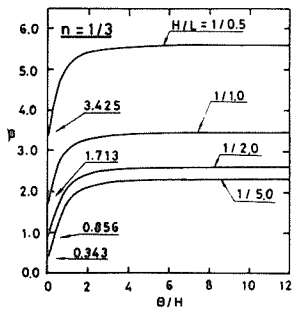
Fig.8 The second eigen-value of wedge taking shear and bending moment into account with infinite length.



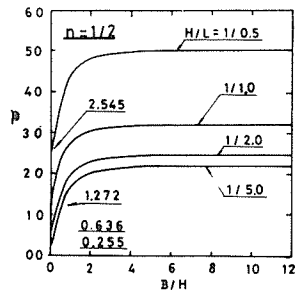
(a) In case of $n = 0$



(c) In case of $n = 1/2$.



(b) In case of $n = 1/3$.



(d) In case of $n = 2/3$.

Fig.9 Variation of the first eigen-value with B/H .

図-5, 6には, 我が国のロックフィルあるいはアースフィルダムの平均的な谷幅比である $H/L = 1/3$ の場合について, 第1次, 第2次モード分布をウェッジ形状パラメーター H/B を $1/1, 1/2, 1/5$ と変え, 4種類の n について示してある。

また, 図-7, 8には谷幅を無限長とした場合の H/B に対する第1および第2次固有値の変化を示しているが, 同時に単純せん断理論や曲げ理論による解とともに示してある。これらの固有値の変化曲線より単純せん断理論の適用可能な範囲を知ることができ, 第1モードに関してはその値は $H/B \leq 1/5$ であり, 第2モードに関してはほぼ $H/B \leq 1/8$ が妥当な範囲であることがわかる。

図-9(a)~(d)には同様の方法により谷幅が有限長の場合について, 各 n の B/H に対する固有値の変化曲線を示している。図より, 単純せん断理論の適用範囲は, 谷幅が無限長の場合と同様ほぼ $H/B \leq 1/5$ であることがわかる。

7. 結 論

1. 本論文では, フィルダムの断面を等辺ウェッジ形状, 谷形状を矩形と仮定し, ダム高さ方向にはせん断と曲げ, 谷幅方向にはせん断抵抗のみを考慮し, 有効応力に依存する剛性値を有するウェッジビームの上下流方向の自由振動解析の方法を明らかにし, 単純せん断理論の適用限界を求めることができた。その値は, ほぼ $H/B = 1/5$ であることが明らかになった。
2. 剛性指数 n は, 単純せん断理論の仮定と等しい谷幅無限長の場合においても, 高さ方向変形モードに著しい影響を与えるが, 曲げとせん断を考慮する理論においては谷幅の大きさも変形モードに大きな影響を与えることが明らかになった。
3. ダム高さや谷幅の比 H/L が $1/0.5$ の場合の高さ方向変形モードは, $n = 0$ の場合を除いて, せん断と曲げを考慮する理論と単純せん断理論による解がまったく異なった分布を示している。しかし, $H/L \leq 1/5.0$ のとき2理論による解析結果は極めて等しい変形モード分布となることが明確になった。

参 考 文 献

- 1) Hatanaka, M. (1955), Fundamental Considerations on the Earthquake Resistant Properties of the Earth Dam. Bull. No. 11, Disast. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ.
- 2) Ambraseys, N.N. (1960). On the Shear Response of a Two-Dimensional truncated Wedge Subjected to an Arbitrary Disturbance. Bull. of Seis. Soc. of Am., Vol. 50.
- 3) Ishizaki, H. and Hatakeyama, N. (1962), Consideration on the Dynamical Behaviors of Earth Dams. Bull. No. 52. Disast. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ.
- 4) Chopra, A.K. et al (1969). Earthquake Analysis of Earth Dams. Proc., 4th World Conf. Earthq. Engrg., Santiago, Chile.
- 5) Minami, I. (1969). On Vibration Characteristics of Fill Dams in Earthquakes. Proc. 4th World. Conf. Earthq. Engrg., Santiago, Chile.
- 6) Abdel-Ghaffer et al (1981), Longitudinal Vibration of Nonhomogeneous Earth Dams. Int. J. of Earthq. Engrg. & Str. Dyn., Vol. 9, No. 4.
- 7) 大町達夫, 時松孝次 (1983) フィルダムの実用的3次元地震応答解析手法の定式化 土木学会論文報告集第333号
- 8) Gazetas, G. (1981) A New Dynamic Model for Earth Dams Evaluated through Case Histories. Soil & Foundations Vol. 21. No. 1.
- 9) Iida, K. (1938) The Velocity of Elastic Wave in Sand., 東京大学地震研究所彙報, 16.
- 10) Timoshenko, S. P. and Goodier, J.N. Theory of Elasticity third edition McGraw-Hill.