北海道大学工学部研究報告
第119号（昭和59年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No.119(1984)

ファジィ集合値関数の可測性

宮腰　政明　　新保　　勝

（昭和58年9月30日受理）

Measurability of Fuzzy Set-Valued Functions

Masaaki MIYAKOSHI and Masaru SHIMBO

(Received September 30, 1983)

Abstract

The concept of set-valued functions are extended into fuzzy set-valued functions, and the measurability and the integrability of fuzzy set-valued functions are considered. Some fundamental properties of integrals of fuzzy set-valued functions are investigated.

1．はしがき

ファジィ集合論的見地から測度論へのアプローチには，菅野[1]，Klement[2] 等の研究がある。彼らの理論は，与えられた σ―集合体のファジィ拡大[1),(2]を考えて，その上での測度の構成，その性質等を研究するものである。又，これらの研究に近いものとしてはKwakernaakのfuzzy random variables[3]の理論がある。最近の研究では，Dubois and Pradeによるファジィ写像のdifferential calculus[4]があるが，その積分論はRiemann積分に限定されている。ここでは，Dubois・Pradeの考えを一般化して，次のような問題の定式化を出発点とする。

「今，2つの可測空間$(X,\mathcal{F})$，$(Y,\mathcal{T})$に対し，ファジィ写像$\tilde{f}$が

$$(X,\mathcal{F}) \quad (Y,\mathcal{T})$$

$$\tilde{f}: X \longrightarrow \tilde{P}(Y)$$

で定義されるとき，$\tilde{f}$の$\mathcal{F}/\mathcal{T}$－可測性をどのように定義するか。」

但し，$\tilde{P}(\cdot)$は・上のファジィ集合の全体を表す。

この問題のファジィ集合論的アプローチは，計量経済学の分野での市場均衡の解析のための集合値関数の概念，及び，Lyapunov[5]，Blackwell[6]，Richter[7]，Aumann[8]，Debreu[9] の研究と関連していて，ファジィ集合値関数の応用の分野の方向を示唆していると思われる。

2．強 α 切断と関数 τ

(1)　強 α 切断

今，Xを空でない集合，$I \triangleq [0,1]$とするとき，$\{A_\alpha, \alpha \in I\}$を，パラメータ$\alpha$をもつ$X$の部分集合の族とする。このとき，族$\{A_\alpha, \alpha \in I\}$が次の2つの条件

（i）　$\alpha<\beta \qquad A_\alpha \supseteqq A_\beta,$　　　　（単調性）

（ii）　$\bigcup_{\alpha<\beta} A_\beta = A_\alpha,$　　　　（上からの連続性）

情報工学専攻　情報処理工学講座

但し，$\alpha, \beta \in I$であり$\alpha < \beta$は$\{\beta | \alpha < \beta$かつ$\beta \in I\}$を表す。

を満足するとき，族$\{A_\alpha, \alpha \in I\}$を$X$上の強$\alpha$切断(strong　α−cuts，以下SAC)(10)という。

$\tilde{A}$をX上のファジィ集合とするとき，

$$\tilde{A}_\alpha \triangleq \{x | h_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}, \quad \alpha \in I$$

で定義される部分集合$\tilde{A}_\alpha$の族$\{\tilde{A}_\alpha,\ \alpha \in I\}$は$X$上のSACであることは容易に示せる。

SACの概念は，次の表現定理(10)によりファジィ集合論において重要である。

[定理]

X上のSACの全体とX上のファジィ集合の全体は同等である。

SACには次の性質がある。

$\Lambda = \{\lambda\}$を任意の空でない指標集合，$\tilde{A}$，$\{\tilde{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$を$X$上のファジィ集合及びファジィ集合の族とし，$f$を$X$から他の集合$Y$への関数，$f$によるファジィ集合$\tilde{A}$の像を$f(\tilde{A})$と表すとき，

$$(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda)_\alpha = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\tilde{A}_\lambda)_\alpha, \qquad \alpha \in I$$
$$f(\tilde{A})_\alpha = f(\tilde{A}_\alpha), \qquad \alpha \in I$$
$$f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda)_\alpha = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f((\tilde{A}_\lambda)_\alpha), \qquad \alpha \in I$$

(2)　関数τ

X，Yを空でない集合とする。

$$\tilde{P}(Y)^X \triangleq \{f | f: X \longrightarrow \tilde{P}(Y)\},$$

$$\tilde{P}(Y^X) \triangleq Y^X(X\text{から}Y\text{への関数全体の集合})\text{の上でのファジィ集合の全体},$$

と定義する。 ここで，以後の議論の基本となる$\tilde{P}(Y^X)$から$\tilde{P}(Y)^X$への関数τを定義する。

$$\tau \triangleq \{\tau_x, x \in X\}$$

但し，τ_xは射影関数で

$$\tau_x: Y^X \longrightarrow Y: f \in Y^X \longrightarrow \tau_x f \triangleq f(x) \in Y$$

と定義される。

今，τを$\mu \in \tilde{P}(Y^X)$に作用させると

$$\tau_x: \tilde{P}(Y^X) \longrightarrow \tilde{P}(Y): \mu \in \tilde{P}(Y^X) \longrightarrow \tau_x \mu \triangleq \tau_x(\mu) \in \tilde{P}(Y)$$

となる。但し，

$$\tau_x(\mu)_\alpha \triangleq \{\tau_x f | f \in \mu_\alpha\}, \quad \alpha \in I$$

とする。明らかに，$\{\tau_x(\mu)_\alpha,\ \alpha \in I\}$は$Y$上の１つのSACとなるから，表現定理により，この族$\{\tau_x(\mu)_\alpha,\ \alpha \in I\}$は$\tilde{P}(Y)$の１つの要素を一意に決定する。

従って，

$$\tau: \tilde{P}(Y^X) \longrightarrow \tilde{P}(Y)^X: \mu \in \tilde{P}(Y^X) \longrightarrow \tau(\mu) \triangleq \{\text{関数}: x \longrightarrow \tau_x(\mu)\} \in \tilde{P}(Y)^X$$

なる写像を考えることができる。

τは次のような性質をもつ。

（ｉ）　$\tau(\mu) = \tau(\nu)$となる$\mu \neq \nu (\mu, \nu \in \tilde{P}(Y^X))$が存在する。

(ii)　$f\in Y^X$とするとき，$\mu_f\triangleq 1/f\in\widetilde{P}(Y^X)$，$\widehat{f}$を$\widehat{f}(x)\triangleq 1/f(x)\in\widetilde{P}(Y)$となる関数[注－1]($f$の埋め込み)とするとき，

$$\tau(\mu_f)=\widehat{f}。$$

今，$\mu\in$ (Y^X)，$\widetilde{f}\in\widetilde{P}(Y)^X$に対し，

$$\tau_x(\mu)=\widetilde{f}(x) \qquad \text{for } {}^\forall x\in X$$

であるとき，

$$\tau(\mu)=\widetilde{f}$$

と書く。

さらに，$*$をY^X上の2項演算，すなわち，f，$g\in Y^X$ならば$f*g\in Y^X$とするとき,$*$を$\widetilde{P}(Y^X)$上に次のように拡張する。μ，$\nu\in\widetilde{P}(Y^X)$とし

$$(\mu*\nu)_\alpha\triangleq\{f*g|f\in\mu_\alpha,\ g\in\nu_\alpha\},\ \alpha\in I$$

と定義すると$\{(\mu*\nu)_\alpha,\ \alpha\in\ I\}$が$Y^X$上のSACであることは容易に示せる。従って，このSACによって一意に決定される$\widetilde{P}(Y^X)$の要素を再び$\mu*\nu$と書き，$*$をμ，νに作用させたものと定義する。

3．可測性と積分

ここでは，はしがきで与えられたファジィ集合値関数の可測性に対する1つの定義を与える。

(1)　可測性

2つの可測空間$(X,\mathcal{F}),(Y,\mathcal{T})$が与えられたとき，$[\mathcal{F}/\mathcal{T}]$で$\mathcal{F}/\mathcal{T}$一可測関数の全体を表す。

定義：

2つの可測空間$(X,\mathcal{F}),(Y,\mathcal{T})$が与えられたとき，関数$\widetilde{f}\in\widetilde{P}(Y)^X$に対し，$\widetilde{f}=\tau(\mu)$となる$\mu\in\widetilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{T}])$が存在するとき，$\widetilde{f}$は$\mathcal{F}/\mathcal{T}$一可測という。

gを非$\mathcal{F}/\mathcal{T}$一可測関数とするとき，gの埋め込み$\widehat{g}$は$\mathcal{F}/\mathcal{T}$一可測とはならないので，$\mathcal{F}/\mathcal{T}$　可測とはならない$\widetilde{P}(Y)^X$の要素がある。$\widetilde{P}(Y)^X$の要素で$\mathcal{F}/\mathcal{T}$一可測とはならないもののクラスが，普通の意味での非$\mathcal{F}/\mathcal{T}$一可測関数の埋め込みのクラスに限定されるか否かは不明である。

次に$\mathcal{F}/\mathcal{T}$一可測関数の性質を示す。

$*$がY上の2項演算であるとき，これを

$$f,g\in Y^X\text{に対し，}f*g(x)\triangleq f(x)*g(x)$$

と定義し，Y^X上に$*$を拡張する。又，この2項演算$*$の$\widetilde{P}(Y)^X$上への拡張も容易である。さらにY^X上の2項演算$*$が$\mathcal{F}/\mathcal{T}$一可測性を保存するならば，次の性質1が示せる。

［**性質　1**］

$\widetilde{f}$，$\widetilde{g}$が$\mathcal{F}/\mathcal{T}$一可測関数であって，2項演算$*$が可測性を保存すれば

$$\widetilde{f}*\widetilde{g} \tag{1}$$

も$\mathcal{F}/\mathcal{T}$一可測である。

(証明)定義より，$\widetilde{f}=\tau(\mu)$，$\widetilde{g}=\tau(\nu)$となるμ，$\nu\in\widetilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{T}])$が存在する。もし，$\mu$，$\nu$に2項演

注－1)　X上のファジィ集合$\widetilde{A}$の台$\{x|h_{\widetilde{A}}(x)>0\}$が有限集合$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$であるとき，ファジィ集合$\widetilde{A}$を$\widetilde{A}\triangleq h_{\widetilde{A}}(x_1)/x_1+h_{\widetilde{A}}(x_2)/x_2+\cdots+h_{\widetilde{A}}(x_n)/x_n$と表現する。

算$*$を作用させた$\mu*\nu$に対し，

$$\tilde{f}*\tilde{g}=\tau(\mu*\nu)$$

が成立すれば，$\mu*\nu\in\tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{T}])$であることと定義より$\tilde{f}*\tilde{g}$が可測であることがいえる。

定義より、

$$(\mu*\nu)_\alpha=\mu_\alpha*\nu_\alpha,\quad \alpha\in I$$

となり，$\mu_\alpha*\nu_\alpha\subset[\mathcal{F}/\mathcal{T}]$は明らかである。

$^\forall x\in X$について，

(1)の左辺$=\tilde{f}*\tilde{g}(x)=\tilde{f}(x)*\tilde{g}(x)=\tau_x(\mu)*\tau_x(\nu)$。

2項演算は写像であるから，SACのもつ性質より，

$$(\tau_x(\mu)*\tau_x(\nu))_\alpha=\tau_x(\mu)_\alpha*\tau_x(\nu)_\alpha=\tau_x(\mu_\alpha)*\tau_x(\nu_\alpha)$$

となる。

(1)の右辺より

$$\tau_x(\mu*\nu)_\alpha=\tau_x((\mu*\nu)_\alpha)=\tau_x(\mu_\alpha*\nu_\alpha)。$$

従って，$\tau_x(\mu)_\alpha*\tau_x(\nu_\alpha)=\tau_x(\mu_\alpha*\nu_\alpha)$を示せばよい。実際，

$z\in\tau_x(\mu_\alpha)*\tau_x(\nu_\alpha)\Longleftrightarrow z\in f(x)*g(x)$かつ$f\in\mu_\alpha$，$g\in\nu_\alpha$となる$f(x)$，$g(x)$が存在する。

$\Longleftrightarrow$故に，$f*g\in\mu_\alpha*\nu_\alpha$かつ$z=\tau_x(f*g)$。 (証明終)

以下では，$(Y,\mathcal{T})\triangleq(\boldsymbol{R},\mathcal{B})$とする。但し，$\boldsymbol{R}$は実数の全体，$\mathcal{B}$はBorel集合体を表す。又，$\tilde{P}(\boldsymbol{R})$は$\boldsymbol{R}$上のファジィ集合(ファジィ数)[11]で次の条件を満足するものの全体を表す。

$$\sup_{x\in\boldsymbol{R}} h_{\tilde{a}}(x)=1$$

但し，$\tilde{a}$は$\boldsymbol{R}$上のファジィ数，h_aはそのメンバシップ関数，supは上限値を表す。

次の性質は，性質1より明らかである。

[性質　2]

$\tilde{f}$，$\tilde{g}$が$\mathcal{F}/\mathcal{B}$–可測関数ならば，

和$\tilde{f}+\tilde{g}$，積$\tilde{f}\cdot\tilde{g}$も$\mathcal{F}/\mathcal{B}$－可測関数となる。

(2)可積分性と積分の定義

ここでは，ファジィ数をその値としてもつ関数の可積分性と積分の定義を与える。

今，ある測度空間$(X,\mathcal{F},m)$を固定し，

$$(X,\mathcal{F},m)\qquad(\boldsymbol{R},\mathcal{B})$$
$$\tilde{f}:X\longrightarrow\tilde{P}(\boldsymbol{R})$$

を考える。

Aに対し，

$[\mathcal{F}/\mathcal{B}]^A_m\triangleq[\mathcal{F}/\mathcal{B}]$の部分集合で$A$上で$m$－可積分となる関数の全体，と定義する。

A上のm－積分を

$$l_A:[\mathcal{F}/\mathcal{B}]^A_m\longrightarrow\boldsymbol{R}:f\in[\mathcal{F}/\mathcal{B}]^A_m\longrightarrow l_A(f)\triangleq\int_A f\,\mathrm{dm}\in\boldsymbol{R}$$

なる写像l_Aと考えて，l_Aを$\mu\in\tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]^A_m)$に作用させて

$$l_A:\tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]^A_m)\longrightarrow\tilde{P}(\boldsymbol{R}):\mu\in\tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]^A_m)\longrightarrow l_A(\mu)\in\tilde{P}(\boldsymbol{R})$$

なる$l_A(\mu)\in\ \tilde{P}(\boldsymbol{R})$をえる。

但し，$l_A(\mu)$は$l_A(\mu)_\alpha=l_A(\mu_\alpha)\triangleq\{l_A(f)|\mu_\alpha\in f\}$なる$\boldsymbol{R}$上のSACで決定されるファジィ数である。

$\tilde{f}$が$\mathcal{F}/\mathcal{B}$–可測ならば$\tilde{f}=\tau(\mu)$なる$\mu\in\tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}])$が存在するから，$\tilde{f}$の$A$上の$m$積分$\int_A \tilde{f}\mathrm{dm}$を

$$\int_A \tilde{f}\,\mathrm{dm} \triangleq l_A(\mu)$$

として定義するのは妥当であるが，一般には，$\tilde{f}$に対しμが一意に定まらないので，その積分も一意には決定できない可能性がある。次の補題はこの難点を解消するために必要となる。

[補題　1]

$\tau^{-1}(\tilde{f})$で$\tilde{f}=\tau(\mu)$となる$\tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}])$の要素の全体とするとき，

$$\zeta(\tilde{f}) \triangleq \bigcup_{\mu\in\tau^{-1}(\tilde{f})} \mu$$

で定義された$\zeta(\tilde{f})$は性質

（i）　$\zeta(\tilde{f})\in\tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}])$,

（ii）　$\tau(\zeta(\tilde{f}))=\tilde{f}$

をもつ。

（証明）　（i）の証明は，$\alpha=0$として，SACの性質より

$$\zeta(\tilde{f})_0=\Big(\bigcup_{\mu\in\tau^{-1}(\tilde{f})}\mu\Big)_0=\bigcup_{\mu\in\tau^{-1}(\tilde{f})}\mu_0 \subseteqq [\mathcal{F}/\mathcal{B}],$$

となるから明らか。

（ii）の証明は，SACの性質より，$^{\forall}x\in X$について，

$$\tau_X(\zeta(\tilde{f}))=\tau_X\Big(\bigcup_{\mu\in\tau^{-1}(\tilde{f})}\mu\Big)=\bigcup_{\mu\in\tau^{-1}(\tilde{f})}\tau_X(\mu)=\bigcup_{\mu\in\tau^{-1}(\tilde{f})}\tilde{f}(x)=\tilde{f}(x)$$

となることから明らか。　（証明終）

以上のことから次の定義をえる。

定義：可積分性と積分.

$$(X,\mathcal{F},m) \qquad (\boldsymbol{R},\mathcal{B})$$

$$\tilde{f}:X\longrightarrow\tilde{P}(\boldsymbol{R})$$

なる関数$\tilde{f}$が，$A\in\mathcal{F}$に関して，ある$\mu\in\tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m^A)$が存在して，

$$\tilde{f}=\tau(\mu)$$

となるとき，$\tilde{f}$はA上でm可積分という。

$\tau_*^{-1}(\tilde{f})$で$\tilde{f}=\tau(\mu)$となる$\mu\in\tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m^A)$の全体を表し，

$$\zeta^*(\tilde{f}) \triangleq \bigcup_{\mu\in\tau_*^{-1}(\tilde{f})}\mu$$

と定義する。$\tilde{f}$が$\mathcal{F}/\mathcal{B}$–可積分ならば$\tau_*^{-1}(\tilde{f})$は空ではなく，補題1より$\tilde{f}=\tau(\mu)$となるμの中で最大の要素となる。$\tilde{f}$のA上のm積分を

$$\int_A \tilde{f}\,\mathrm{dm} \triangleq l_A(\zeta^*(\tilde{f}))$$

として定義する。

(3)　積分の基本的性質

ここでは，ファジィ数値関数の積分の基本的性質を明らかにする。

[補題　2]

$\zeta^*(\tilde{f}+\tilde{g}) \supseteqq \zeta^*(\tilde{f})+\zeta^*(\tilde{g})$,

$l_A(\mu+\nu)=l_A(\mu)+l_A(\nu)$,

$l_{A+B}(\mu) \subseteqq l_A(\mu)+l_B(\mu)$

但し，$\tilde{f}$, $\tilde{g} \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]^A_m)$, $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B=\emptyset$,

第２式に対し，$\mu, \nu \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]^A_m$

第３式に対し，$\mu \quad \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]^{A+B}_m)$

一般に，$A, B \in \mathcal{F}$かつ$A \subseteqq B$ならば

$$\mu \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]^B_m) \Longrightarrow \mu \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]^A_m)$$

(証明略)

ファジィ数値関数の積分については次のような性質がある。

[性質　3]

(1)　A上でm可積分な関数fの埋め込み$\hat{f}$について，$\hat{f}$はA上でm可積であり

$$\int_A \hat{f}\, \mathrm{dm}=1/\int_A f\, \mathrm{dm},$$

(2)　Aがm測度零集合ならば，任意の$\mathcal{F}/\mathcal{B}-$可測関数$\tilde{f}$について

$$\int_A \tilde{f}\, dm=1/0$$

(3)　$\tilde{f}$, $\tilde{g}$がA上でm可積分ならば，和$\tilde{f}+\tilde{g}$もA上でm可積分で

$$\int_A (\tilde{f}+\tilde{g})\mathrm{dm} \supseteqq \int_A \tilde{f}\, \mathrm{dm}+\int_A \tilde{g}\, \mathrm{dm},$$

(4)　$\tilde{f}$が$A+B(A, B \in \mathcal{F}, A \cap B=\emptyset)$上で$m$可積分ならば，$\tilde{f}$は各$A, B$上で$m$可積分であり，

$$\int_{A+B} \tilde{f}\, \mathrm{dm} \subseteqq \int_A \tilde{f}\, \mathrm{dm}+\int_B \tilde{f}\, \mathrm{dm}.$$

(証明)　補題２より明らか。　(証明終)

この性質の(3),(4)より，ファジィ数値関数のm積分は，一般に，線形性，加法性をもつとはかぎらないことがわかる

次に，積分の値そのものの性質について述べる。それは，ファジィ数の凸性[(12),(13)]に関することであり，凸性の定義は以下の通りである。

ファジィ数$\tilde{a}$が凸である。$\Longleftrightarrow$任意の$\alpha \in I$について$\tilde{a}_\alpha$が凸集合すなわち区間となる。

[性質　4]

可測空間$(X, \mathcal{F})$が測度mに関して非アトム的[(14)]であればm可積分関数$\tilde{f}$に対し

$$\int_X \tilde{f}\, \mathrm{dm}$$

は凸である。

(証明)

可積分性の定義より，ある$\mu_0 \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m)(A=X$のときは，$A$は省略)があって

$$\tilde{f}=\tau(\mu_0)$$

又，積分の定義より，

$$\int_X \tilde{f}\,\mathrm{dm}=l_A(\zeta^*(\tilde{f})),$$

$$\zeta^*(\tilde{f})=\bigcup_{\mu\in\tau_*^{-1}(\tilde{f})}\mu$$

であり，

$$\zeta^*(\tilde{f})_\alpha=\bigcup_{\mu\in\tau_*^{-1}(\tilde{f})}\mu_\alpha,\quad \alpha\in I$$

である。又，$^\forall\alpha<1$ について$(\mu_0)_\alpha\neq\emptyset$ であるから，$\zeta^*(\tilde{f})_\alpha\neq\emptyset$。

従って，

$^\forall\alpha\in I$に対し

$$\left(\int_X \tilde{f}\,\mathrm{dm}\right)_\alpha=l_X(\zeta^*(\tilde{f}))_\alpha=l_X(\zeta^*(\tilde{f})_\alpha)\neq\emptyset.$$

一方，ファジィ数の凸性の定義によって，任意の$\alpha\in I$に対し，

$l_X(\zeta^*(\tilde{f}))_\alpha$

が凸集合であることを示せばよい。

$l_X(\zeta^*(\tilde{f}))_\alpha$が１つの要素のみから成るときは明らかに凸である。

$l_X(\zeta^*(\tilde{f}))_\alpha\ni z_1, z_2$かつ$z_1\neq z_2$と仮定する。

従って，

$$f_1\in(\mu_1)_\alpha,\ f_2\in(\mu_2)_\alpha,\quad \int_X f_1\,\mathrm{dm}=z_1,\quad \int_X f_2\,\mathrm{dm}=z_2$$

となる　$\mu_1,\mu_2\in\tau_*^{-1}(\tilde{f})$が存在する。

仮定とDebreu([9]，定理7･1)より，任意の$\rho\in[0,1]$に対応して

$$\int_{E\rho} f_1\,\mathrm{dm}=\rho z_1,\qquad \int_{E\rho} f_2\,\mathrm{dm}=\rho z_2$$

となる$E_\rho\in\mathcal{F}$が存在する。

従って，

$$\left.\begin{array}{l} E_\rho \text{ 上で} f_1 \\ E_\rho^c \text{ 上で} f_2 \end{array}\right\}$$

に一致する$f_\rho\in[\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m$が存在し，

$$\int_X f_\rho\,\mathrm{dm}=\int_{E_\rho} f_1\,\mathrm{dm}+\int_{E_\rho^c} f_2\mathrm{dm}=\rho z_1+(1-\rho)z_2$$

となる。又，f_ρ について，定義より，任意の$x\in X$に対し，

$$\tau_x f_\rho\in\tilde{f}(x)_\alpha$$

が成立する。実際

$$\left.\begin{array}{l} E_\rho\ni x \text{ のとき } \tau_x f_\rho=\tau_x f_1=f_1(x) \\ E_\rho^c\ni x \text{ のとき } \tau_x f_\rho=\tau_x f_2=f_2(x) \end{array}\right\}\in\tilde{f}(x)_\alpha$$

である。

従って，$\nu_\alpha \ni f_\rho$となる$\nu \in \widetilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m)$で$\tau_*^{-1}(\widetilde{f})$の要素となるものの存在を示せばよい。

$$\delta_0 \triangleq \sup\{\beta | f_1 \in (\mu_1)_\beta \text{かつ} f_2 \in (\mu_2)_\beta\}$$

とする。SACの定義から，$\delta_0 > \alpha$となり，又，$\delta_0 > {}^\forall\beta$に対し$f_1 \in (\mu_1)_\beta, f_2 \in (\mu_2)_\beta$となる。

今，次のように定義する。

$$\beta < \delta_0 \text{のとき，} \quad \nu_\beta \triangleq (\mu_1)_\beta \cup (\mu_2)_\beta \cup \{f_\rho\}$$

$$\beta \geqq \delta_0 \text{のとき，} \quad \nu_\beta \triangleq (\mu_1)_\beta \cup (\mu_2)_\beta$$

但し，$\delta_0 = 1$のとき，第１式のみ有効とする。

このとき，$\{\nu_\beta, \beta \in I\}$は$[\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m$上のSACとなることは容易に示せる。

実際，

$\gamma < \delta_0$のとき，

$$\bigcup_{\gamma<\beta} \nu_\beta = (\bigcup_{\gamma<\beta<\delta_0} \nu_\beta) \cup (\bigcup_{\delta_0 \leqq \beta} \nu_\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta<\delta_0} \{(\mu_1)_\beta \cup (\mu_2)_\beta \cup \{f_\rho\}\} \cup \{\bigcup_{\delta_0 \leqq \beta} ((\mu_1)_\beta \cup (\mu_2)_\beta)\}$$

$$= \bigcup_{\gamma<\beta} \{(\mu_1)_\beta \cup (\mu_2)_\beta\} \cup \{f_\rho\} = (\mu_1)_\gamma \cup (\mu_2)_\gamma \cup \{f_\rho\} = \nu_\gamma,$$

$\gamma \geqq \delta_0$のとき，

$$\bigcup_{\gamma<\beta} \nu_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} \{(\mu_1)_\beta \cup (\mu_2)_\beta\} = (\mu_1)_\gamma \cup (\mu_2)_\gamma = \nu_\gamma,$$

又，単調性は明らかである。

このSAC$\{\gamma_\alpha, \alpha \in I\}$によって決定される$\widetilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m)$の要素を，再び，$\gamma$と書くと，

${}^\forall x \in X$と${}^\forall \beta \in I$について

$\beta < \delta_0$のとき

$$\tau_X(\gamma)_\beta = \tau_X(\gamma_\beta) = \tau_X((\mu_1)_\beta \cup (\mu_2)_\beta \cup \{f_\rho\}) = \tau_X((\mu_1)_\beta) \cup \tau_2((\mu_2)_\beta) \cup \{\tau_X(f_\rho)\}$$

$$= \widetilde{f}(x)_\beta \cup \widetilde{f}(x)_\beta \cup \{f_\rho(x)\} = \widetilde{f}(x)_\beta$$

$\beta \geqq \delta_0$のときも同様にして証明できる。

従って，$\gamma \in \tau_*^{-1}(\widetilde{f})$となる。故に，$\zeta^*(\widetilde{f})_\alpha \geqq \nu_\alpha \ni f_\rho$ となり，

$$l_X(f_\rho) = \rho z_1 + (1-\rho) z_2 \in l_X(\zeta^*(\widetilde{f}))_\alpha \text{となる。}$$

各$\rho \in [0,1]$に対して，このようなγを構成して，それをγ_ρと書けば

$$\bigcup_{\rho \in [0.1]} \gamma_\rho \in \tau_*^{-1}(\widetilde{f})$$

となり，従って，任意の$\rho \in [0,1]$に対し，

$$f_\rho \in (\bigcup_{\rho \in [0.1]} \gamma_\rho)_\alpha \text{ かつ } \int_X f_\rho \, \mathrm{dm} = \rho z_1 + (1-\rho) z_2 \in l_X(\zeta^*(\widetilde{f}))_\alpha$$

となるので，$l_X(\zeta^*(\widetilde{f}))_\alpha$は凸集合となる。（証明終）

4．あ　と　が　き

本論文では，ファジィ集合値(ファジィ数値)関数の可測性と積分の定義を与え，その基本的性質を調べた。その積分の従来のルベーグ積分と著しく異なる結果として，一般に，(1) 線形性が

成立しない，(2) 加法性が成立しない，ことがわかった。又，測度空間の非アトム性の条件のもとで，積分値の凸性が示された。この結論はfuzzy random variables[3] の期待値の凸性に関する補助確率空間の条件の緩和を示唆する。

これらファジィ数値関数の積分の基本的性質は，その値が非数値的な，例えば，言語的値[15]をとる母数をもつ母集団のパラメータを推定するような「ファジィ統計」[16] の理論的基礎となるものである。

尚，本研究の一部は文部省科学研究費の援助により行なわれたことを付記する。

参考文献

1) 菅野道夫：計測自動制御学会論文集，第8巻（昭47）No. 2, p. 94；第9巻（昭48）No. 3, p. 361.
2) E. Klement : Fuzzy sets and systems, **4** (1980) p. 83.
3) H. Kwakernaak : Information Sciences, **15** (1978) p. 1 ; **17** (1979) p. 253.
4) D. Dubois and H. Prade : Fuzzy sets and systems, 8 (1978) p. 1 ; p. 105 ; p. 225.
5) Lyapunov, A. : Bull. Acad. Sci. URSS Ser. Math., **4** (1940) p. 465.
6) D. Blackwell : Proc. A. M. S., **2** (1951) p. 390.
7) H. Richter : Math. Annalen, **150** (1963) p. 85.
8) G. Debreu : Proc. 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, **2** (1967) p. 351.
10) 菅野道夫：〝集中講義録〟北大大学院情報工学専攻（昭53）.
11) M. Mizumoto and K. Tanaka : Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, Eds. M. M. Gupta, R. K. Ragade, R. R. Yager (1979) North-Holland, p. 153.
12) L. A. Zadeh : Information and Control, 8 (1965) p. 238.
13) Lowen, R. : Fuzzy sets and systems, **3** (1980) p. 291.
14) P. R. Halmos : Measure Theory, Springer Verlag (1974).
15) L. A. Zadeh : Information Sciences, 8 (1975) p. 199.
16) M. Miyakoshi and M. Shimbo : Fuzzy sets and systems (to appear).