北海道大学工学部研究報告
第119号（昭和59年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 119 (1984)

ISMにおける推論構造と推論アルゴリズム

大内　　東　栗原　正仁　加地　郁夫

（昭和58年9月30日受理）

Implication Structure and Algorithm for Interpretive Structural Modeling

Azuma OHUCHI, Masahito KURIHARA and Ikuo KAJI

(Received September 30,1983)

Abstract

The interpretive structural modeling (ISM) process makes computer assistance available in structuring complex systems or issues through transitive contextual relations. ISM process consists of two phases, i. e., transitive embedding and structural analysis. In this paper the transitive embedding process in ISM is considered from the stand point of implication structure and implication algorithm. The necessary and sufficient condition for partially filled matrix M to be a reachability matrix is proved. Consistency and maximality properties are introduced. Then the implication structure is clarified in terms of twelve imlication patterns, which lead to the complete and independent implication theorem. Finally, using the theorem, two algorithms for implication are proposed. The new alogirthms perform the embedding process by dividing the implication into three phases of so-called "1->1 implication", "1->0 implication" and "0->0 implication". The algorithm uses only square matrix M and is easily implemented.

1．まえがき

システム工学の対象は大規模，複雑，多目的かつあいまいなシステムへと広がってきた。対象の構造が十分に把握されていない複雑なシステムの解析を計算機援用のもとで行う構造モデリングの代表的手法の1つとして，J. N. Warfield 氏らが中心となって開発したISM (Interpretive Structural Modeling) 法がある。[1)~3)] ISMでは，システムをその構成要素集合 N，及びN上の二項関係 R ($\subseteq N \times N$) の組 $\langle N, R\rangle$ ととらえ，Rのもつ推移性を用いてモデル化を行い，モデルの階層構造をはじめ各種の内在構造を抽出する。この過程はすべてコンピュータとの対話に基いて進行し，システムを構成している多数の要素間の関係がしだいに明確になってゆく。

ISMにおけるモデル形成の過程においては，モデルは部分的に既知 (partially filled) な推移的二値行列 M として表現される。本稿では M が可達行列となるための必要十分条件として推論方程式を導く。また，推論方程式に基いて，M に対する自然な要請として，無矛盾・極大性の概念を導入する。更に，推論方程式から得られる12の基本推論パターンを整理し，これらに基づく推論構造を明らかにする。この結果を用いて，推論を実行するアルゴリズムを構成する。このア

電気工学科　系統工学講座

ルゴリズムは対称性を有し，きわめて単純化されており，インプリメントも容易である。

2．推論方程式

2．1 諸定義

本稿で使用する諸記号，諸定義について述べる。演算は特に断らない限り論理演算である。

$N=\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$：システム要素に対応する添字集合。

$\hat{R}$：システム要素間の二項関係を表すステートメント(Contexual Relation)。$\hat{R}$は推移的($i\hat{R}j$ かつ $j\hat{R}k$ ならば $i\hat{R}k$) であるとする。例えば，$i\hat{R}j \triangleq$「i は j に影響を与える」等である。

R, $\bar{R}$, $\tilde{R}$：いずれも N 上の二項関係であり，$i\hat{R}j$ が成り立つとき iRj, $i\hat{R}j$ が成り立たないとき $i\bar{R}j$, $i\hat{R}j$ が成り立つか否か，現時点では不明のとき $i\tilde{R}j$ とする。R, $\bar{R}$, $\tilde{R}$ は $N\times N$ の分割となっている。すなわち，$R\cap\bar{R}=\bar{R}\cap\tilde{R}=\tilde{R}\cap R=\phi$, $R\cup\bar{R}\cup\tilde{R}=N\times N$。

iRX：すべての $x\in X$ に対して iRx を表わす。$i\bar{R}X$, $i\tilde{R}X$ も同様に用いる。

XRi：すべての $x\in X$ に対して xRi を表わす。$X\bar{R}i$, $X\tilde{R}i$ も同様に用いる。

XRY：すべての $x\in X$ ($y\in Y$) について xRY (XRy) を表わす。$X\bar{R}Y$, $X\tilde{R}Y$ も同様に用いる。

M, A, X：いずれも N を添字集合とする正方行列でそれぞれの要素は次式で定める。

$$M_{ij}=\begin{cases}1 & , iRj\\ 0 & , i\overline{R}j\\ x_{ij} & i\tilde{R}j\end{cases}\qquad A_{ij}=\begin{cases}1, & iRj\\ \\ 0, & \text{その他}\end{cases}\qquad X_{ij}=\begin{cases}x_{ij}, & i\tilde{R}j\\ \\ 0 & ,\text{その他}\end{cases} \tag{1}$$

ただし，X_{ij}は論理変数である。明らかに

$$M=A+X \tag{2}$$

が成立する。また以下では便宜上 R は反射的でもあるとする。すなわち，すべての $i\in N$ に対し

$$iRi,\ M_{ii}=1,\ A_{ii}=1,\ X_{ii}=0 \tag{3}$$

$D(i)\triangleq\{k \mid M_{ki}=1\}$：$i$ の下位集合。

$\bar{D}(i)\triangleq\{k \mid M_{ki}=0\}$：$i$ の非下位集合。

$L(i)\triangleq\{k \mid M_{ik}=1\}$：の上位集合。

$\bar{L}(i)\triangleq\{k \mid M_{ik}=0\}$：$i$ の非上位集合。

$M_{ii}=1$ より，$i\in L(i)$ かつ $i\in D(i)$ に注意する。

可達行列：正方，反射的，推移的二値行列 M が可達行列であるための必要十分条件は

$$M^2=M,\qquad M+I=M \tag{3}$$

である。

2．2 推論方程式

［定理1］ M は $M_{ii}=1$, $M_{ij}\in\{1, 0, x_{ij}\}$, $i\neq j$ を満たす正方行列とする。M が可達行列であるための必要十分条件は，未知数 $\{x_{ij}\}$ が次の方程式（推論方程式）を満すことである。

$$\delta(S_0)+\sum_{S_1\cup S_2}x_{ij}+\sum_{S_3}\bar{x}_{ij}+\sum_{T_1}x_{ij}x_{jk}+\sum_{T_2}x_{ij}\bar{x}_{kj}+\sum_{T_3}x_{ij}\bar{x}_{ik}+\sum_{T_4}x_{ij}x_{jk}\bar{x}_{ik}=0 \tag{4}$$

ただし，$\delta(S_0)=1$ if $S_0\neq\phi$, $=0$ if $S_0=\phi$。

$S_0=\{(i, j) \mid i\bar{R}j,\ \exists k\ \ iRk,\ kRj\}$

$S_1=\{(i, j) \mid i\tilde{R}j,\ \exists k\ \ k\bar{R}j,\ kRi\}$

$S_2=\{(i,\ j)\ \mid i\tilde{R}j,\ \exists\, k\quad i\bar{R}k,\ jRk\}$
$S_3=\{(i,\ j)\ \mid i\tilde{R}j,\ \exists\, k\quad iRk,\ kRj\}$
$T_1=\{(i,\ j,\ k)\ \mid i\bar{R}k,\ i\tilde{R}j,\ j\tilde{R}k\}$
$T_2=\{(i,\ j,\ k)\ \mid kRi,\ k\tilde{R}j,\ i\tilde{R}j,\ k\neq i\}$
$T_3=\{(i,\ j,\ k)\ \mid jRk,\ i\tilde{R}k,\ i\tilde{R}j,\ k\neq j\}$
$T_4=\{(i,\ j,\ k)\ \mid i\tilde{R}k,\ i\tilde{R}j,\ j\tilde{R}k\}$

（証明）

M が可達行列であるための必要十分条件のうち，$M+I=M$ は $M_{ii}=1$ より満している。従って，$M^2=M$ と(4)が同値であることを示せばよい。M に(2)式を代入して展開すると

$$\sum_k A_{ik}A_{kj}+\sum_k A_{ik}X_{kj}+\sum_k X_{ik}A_{ki}+\sum X_{ik}X_{kj}=A_{ij}+X_{ij} \tag{5}$$

左辺の非零の項を集め，$A_{ii}=A_{jj}=1$ 及び $X_{ij}+X_{ij}=X_{ij}$ に注意すると

$$\delta(O_{ij})+X_{ij}+\sum_{k\in P_{ij}}x_{kj}+\sum_{k\in Q_{ij}}x_{ik}+\sum_{k\in R_{ij}}x_{ik}x_{kj}=A_{ij}+X_{ij} \tag{6}$$

ただし，

$\delta(O_{ij})=1\quad if\quad O_{ij}\neq\phi,=0\quad if\quad O_{ij}=\phi$。

$O_{ij}=\{k\mid iRk,\ kRj\}$
$P_{ij}=\{k\mid iRk,\ k\tilde{R}j,\ k\neq i\}$
$Q_{ij}=\{k\mid i\tilde{R}k,\ kRj,\ k\neq j,\ k\neq j\}$
$R_{ij}=\{k\mid i\tilde{R}k,\ k\tilde{R}j\}$

ブール方程式 $fg+\bar{f}g=0$ を用いて(6)を変形すると

$$\begin{aligned}&[\delta(o_{ij})+X_{ij}+\sum_{k\in P_{ij}}x_{kj}+\sum_{k\in Q_{ij}}x_{ik}+\sum_{k\in R_{ij}}x_{ik}x_{kj}]A_{ij}X_{ij}\\&\qquad+\bar{\delta}(O_{ij})\overline{X}_{ij}\prod_{k\in P_{ij}}\bar{x}_{kj}\prod_{k\in Q_{ij}}\bar{x}_{ik}\prod_{k\in R_{ij}}\overline{x_{ik}x_{kj}}(A_{ij}+X_{ij})=0\end{aligned} \tag{7}$$

(7)を iRj，$i\bar{R}j$，$i\tilde{R}j$ の3つの場合に分けて書き直す。

（i）iRj の場合，$A_{ij}=1$，$X_{ij}=0$，及び $O_{ij}\neq\phi$（$\because i\in Q_{ij}$）なので(7)は恒等式　$0=0$　となる。

（ii）$i\bar{R}j$ の場合。　$A_{ij}=X_{ij}=0$　なので

$$\delta(O_{ij})+\sum_{k\in P_{ij}}x_{kj}+\sum_{k\in Q_{ij}}x_{ik}+\sum_{k\in R_{ij}}x_{ik}x_{kj}=0 \tag{8}$$

（iii）$i\tilde{R}j$ の場合。　$A_{ij}=0$，$X_{ij}=x_{ij}$，及び　$\bar{X}_{ij}X_{ij}=0$ に注意して

$$\delta(O_{ij})\bar{x}_{ij}+\sum_{k\in P_{ij}}x_{kj}\bar{x}_{ij}+\sum_{k\in Q_{ij}}x_{ik}\bar{x}_{ik}+\sum_{k\in R_{ij}}x_{ik}x_{kj}\bar{x}_{ij}=0,\ i\tilde{R}j \tag{9}$$

一般にブール方程式系　$h_1=h_2=\cdots\cdots=0$　は　$h_1+h_2+\cdots\cdots=0$　と等価であるから，(8)(9)は一本の方程式

$$\sum_{(i,j)\in\bar{R}}[(8)\text{の左辺}]+\sum_{(i,j)\in\tilde{R}}[(9)\text{の左辺}]=0$$

となる。整理して(4)を得る。　　Q．E．D．

2．3　無矛盾性と極大性

［定義１］(4)において，$S_0=\phi$ のとき，M は無矛盾であるという。$S_1=S_2=S_3=\phi$ のとき，M は極大であるという。

M の無矛盾性・極大性は，多くの応用において自然な仮定である。M が無矛盾でないときは，iRk，kRj であるにもかかわらず $i\bar{R}j$ であるような $(i,\ j,\ k)\in N\times N\times N$ が存在し，R の推移性に矛盾する。(iRk，kRj より iRj でなければならぬ)　この場合，$\delta\ (S_0)=1$ であるから推論方程式には解が存在しない。M が極大でないときは，推論方程式から，$x_{ij}=0$，$(i,\ j)\in S_1\cup S_2$ または　$x_{ij}=1$，$(i,\ j)\in S_3$ のように値が一意に定まる未知数が存在する。

［系１］　M が無矛盾・極大ならば，推論方程式は次式となる。(10)には常に解が存在する。

$$\sum_{T_1} x_{ij}\,x_{jk}+\sum_{T_2} x_{ij}\,\bar{x}_{kj}+\sum_{T_3} x_{ij}\,\bar{x}_{ik}+\sum_{T_4} x_{ij}\,x_{jk}\,\bar{x}_{ik}=0 \tag{10}$$

（証明）定理１と定義１より明らかである。解の存在はすべての未知数を０とおくと(10)を満すことから明らかである。

系１から，未知数に適当な値を与えることにより，M を可達行列にできることが判る。特に $X=0$ と置いた $M=A$ は可達行列である。

3．推論構造

以下では，M は無矛盾・極大であるものとして議論する。

3．1　基本推論

推論方程式(10)は、左辺の各項が各々０であることを意味している。一般にブール方程式　$xy=0$ は，$x\rightarrow\bar{y}(y\rightarrow\bar{x})$ と等価であるから，以下の推論が得られる。(→は含意"ならば"を表わす)この際，前提条件（→の左側の変数）が x_{ij} となるように添字を変換し，次に推論の前提条件と結果の値によって推論の内容を分類する。すなわち，(ｉ)$x_{ij}\rightarrow x_{kl}$ となる場合，これを１→１推論，(ii)$x_{ij}\rightarrow\bar{x}_{kl}$ となる場合，これを１→０推論，(iii)$\bar{x}_{ij}\rightarrow\bar{x}_{kl}$ となる場合，これを０→０推論とそれぞれ呼ぶ３つに分類する。推論方程式から $\bar{x}_{ij}\rightarrow x_{kl}$ のような推論は出てこないことに注意する。

(ｉ)　１→１推論

(ａ) $x_{ij}\rightarrow x_{kj}$；kRi，$i\tilde{R}j$，$k\tilde{R}j$，

(ｂ) $x_{ij}\rightarrow x_{ik}$；jRk，$i\tilde{R}j$，$i\tilde{R}k$，

(ｃ) $x_{ij}\rightarrow\ (x_{ik}\rightarrow x_{ik})$；$i\tilde{R}j$，$j\tilde{R}k$，$i\tilde{R}k$，

(ｄ) $x_{ij}\rightarrow\ (x_{ki}\rightarrow x_{kj})$；$i\tilde{R}j$，$k\tilde{R}i$，$k\tilde{R}j$，

(ii)　０→０推論

(ｅ) $\bar{x}_{ij}\rightarrow\bar{x}_{kj}$；$iRk$，$i\tilde{R}j$，$k\tilde{R}j$，

(ｆ) $\bar{x}_{ij}\rightarrow\bar{x}_{ik}$；$kRj$，$i\tilde{R}j$，$i\tilde{R}k$　　(ｇ) $\bar{x}_{ij}\rightarrow\ (x_{ik}\rightarrow x_{kj})$；$i\tilde{R}j$，$i\tilde{R}k$，$k\tilde{R}j$

(ｈ) $\bar{x}_{ij}\rightarrow\ (x_{kj}\rightarrow\bar{x}_{ik})$；$i\tilde{R}j$，$k\tilde{R}j$，$i\tilde{R}k$

(iii)　１→０推論

(ｉ) $x_{ij}\rightarrow\bar{x}_{jk}$；$i\bar{R}k$，$i\tilde{R}j$，$j\tilde{R}k$

(ｊ) $x_{ij}\rightarrow\bar{x}_{kj}$；$k\bar{R}j$，$i\tilde{R}j$，$k\tilde{R}j$

(ｋ) $x_{ij}\rightarrow\ (\bar{x}_{ik}\rightarrow\bar{x}_{jk})$；$i\tilde{R}j$，$i\tilde{R}k$，$j\tilde{R}k$

(ｌ) $x_{ij}\rightarrow\ (\bar{x}_{kj}\rightarrow\bar{x}_{kj})$；$i\tilde{R}j$，$k\tilde{R}i$，$k\tilde{R}j$　　(11)

(ａ)(ｂ)(ｅ)(ｆ)(ｉ)(ｊ)を基本二項推論，(ｃ)(ｄ)(ｇ)(ｈ)(ｋ)(ｌ)を基本三項推論と呼ぶ。

3．2　完全二項推論

基本三項推論は用いず，基本二項推論のみを1つ以上組合せて得られる推論を$\overset{*}{\rightarrow}$で表わす。すなわち，$\tilde{V}$を未知数の集合　$\tilde{V}=\bar{V}\cup V$，$\bar{V}=\{\bar{x}_{ij}\mid i\tilde{R}j\}$，$V=\{x_{ij}\mid i\tilde{R}j\}$とするとき，以下で定義される。

［定義2］　次の3つの条件を満す$\tilde{V}$上の二項関係$\overset{*}{\rightarrow}$を完全二項推論という。

（i）$\alpha\rightarrow\gamma$　ならば　$\alpha\overset{*}{\rightarrow}\gamma$

（ii）$\alpha\overset{*}{\rightarrow}\beta$，$\beta\overset{*}{\rightarrow}\gamma$ならば　$\alpha\overset{*}{\rightarrow}\gamma$

（iii）上記のときに限り　$\alpha\overset{*}{\rightarrow}\gamma$

$\overset{*}{\rightarrow}$は$\rightarrow$を$\tilde{V}$上の二項関係とみると明らかに$\rightarrow$の推移的閉包となっている。基本推論のときと同様に$x_{ij}\overset{*}{\rightarrow}x_{kl}$，$\bar{x}_{ij}\overset{*}{\rightarrow}\bar{x}_{kl}$，$x_{ij}\overset{*}{\rightarrow}\bar{x}_{kl}$の形の推論を1→1，0→0，1→0推論と呼ぶことにする。完全二項推論について次の定理が成り立つ。

［定理2］完全二項推論定理

Mが無矛盾・種大であるとき

（1）$x_{ij}\overset{*}{\rightarrow}x_{lm}$であるための必要十分条件は，$i\tilde{R}j$，$l\tilde{R}m$，$lRi$，$jRm$

（2）$\bar{x}_{ij}\overset{*}{\rightarrow}\bar{x}_{lm}$であるための必要十分条件は，$i\tilde{R}j$，$l\tilde{R}m$，$iRl$，$mRj$

（3）$x_{ij}\overset{*}{\rightarrow}x_{lm}$であるための必要十分条件は，$(i\tilde{R}j,\ l\tilde{R}m)\wedge((iRl,\ i\bar{R}m)\vee(mRi,\ l\bar{R}j))$

である。

(証明)

（1）［必要性］　一般に$x_{ab}\rightarrow x_{cd}$のときにはcRa，bRdであることが（11－a）（11－b）よりわかる。従って，$x_{ij}\overset{*}{\rightarrow}x_{lm}$のとき，以下のような二項推論の系列が存在し，［　］内の条件が成り立つ。

$x_{ij}\rightarrow x_{pe}$　$[pRi,\ jRe]$

$x_{pe}\rightarrow x_{qf}$　$[qRp,\ eRf]$

$x_{qf}\rightarrow x_{rg}$　$[rRq,\ fRg]$

……………

$x_{sh}\rightarrow x_{lm}$　$[lRs,\ hRm]$

従って，Mの無矛盾・極大性より，lRi，jRmが成り立つ

［十分性］　$i=l$　または　$j=m$のときは基本二項推論$x_{ij}\rightarrow x_{lm}$が成り立ち，$x_{ij}\overset{*}{\rightarrow}x_{lm}$となる。$i\neq l$，$j\neq m$と仮定する。$i\tilde{R}j$，$l\tilde{R}m$，$lRi$，$jRm$より$l\tilde{R}j$を得る。（$lRj$とすれば$lRm$，$l\bar{R}j$とすれば$i\bar{R}j$が得られ矛盾が生じる）　従って，$x_{ij}\rightarrow x_{lj}$，　（2）$x\text{-}_{ij}\overset{*}{\rightarrow}\bar{x}_{lm}$は$x_{lm}\overset{*}{\rightarrow}x_{ij}$と等価なので，本定理の（1）より明らか。

（3）［必要性］$x_{ij}\overset{*}{\rightarrow}\bar{x}_{lm}$のとき，次のような推論の系列が存在し，本定理の（1）（2）と（11－i）（11－j）より［　］内の条件が成り立つ。

$x_{ij}\overset{*}{\rightarrow}x_{st}$　$[sRi,\ jRt]$

$x_{st}\overset{*}{\rightarrow}\bar{x}_{uv}$　$[(s\bar{R}v,\ t=u)\vee(u\bar{R}t,\ s=v)]$

$\bar{x}_{uv}\overset{*}{\rightarrow}\bar{x}_{lm}$　$[uRl,\ mRv]$

ここで，第2の条件のうち$(s\bar{R}v,\ t=u)$が成り立っているとすると，jRt，$t=u$，uRlよりiRlが得られ，$s\bar{R}v$，sRi，mRvより$i\bar{R}m$が得られる。同様に第2の条件のうち$(u\bar{R}t,\ s=v)$が成り立つときは，mRi及び$l\bar{R}j$が得られる。従って，$(jRl,\ i\bar{R}m)\vee(mRi,\ l\bar{R}j)$が成り立つ。

［十分性］$i=m$，$j=l$のときは自明、$i\neq m$，$j\neq l$と仮定する。$i\tilde{R}j$，$l\tilde{R}m$で$(jRl,\ i\bar{R}m)$が成立するときは$i\tilde{R}l$となっている。従って，$x_{ij}\rightarrow x_{il}$，$x_{il}\rightarrow\bar{x}_{lm}$が成り立ち，$x_{ij}\overset{*}{\rightarrow}\bar{x}_{lm}$，$i\tilde{R}j$，$l\tilde{R}m$，

$(mRi,\ l\bar{R}j)$ のときも同様にして，$x_{ij}\to x_{mj}$，$x_{mj}\to \bar{x}_{lm}$ より $x_{ij}\overset{*}{\to}\bar{x}_{lm}$ を得る。　Q. E. D.

定理２から，１つの未知数 x_{ij} が"$x_{ij}=1$"と決定したとき，これから得られるすべての二項推論は（１）と（３）の条件を満す未知数であり、且つこれ以外に存在しない。また，$x_{ij}=0$ からの二項推論は（２）の条件を満す未知数がすべてであり，これ以外にない。

定理２の証明の過程から次の系を得る。

［系２］　M が無矛盾・極大ならば，任意の完全二項推論 $\overset{*}{\to}$ は高々２つの基本二項推論 $\to$ から得ることができる。すなわち，

（１）$x_{ij}\overset{*}{\to}x_{lm}$ は　$x_{ij}\to x_{lm}$　または　$(x_{ij}\to x_{lj},\ x_{lj}\to x_{lm})$

（２）$\bar{x}_{ij}\overset{*}{\to}\bar{x}_{lm}$ は　$x_{ij}\to x_{lm}$　または　$(\bar{x}_{ij}\to x_{im}\to x_{lm})$

（３）$x_{ij}\overset{*}{\to}\bar{x}_{lm}$ は　$x_{ij}\to x_{lm}$　または　$(x_{ij}\to x_{il},\ x_{il}\to \bar{x}_{lm})$

または　$(x_{ij}\to x_{mj},\ x_{mj},\ x_{mj}\to \bar{x}_{lm})$

基本二項推論が"１つの未知数に対して与えられた値と，すでに既知の値のみを用いて実行されること"を思い起し，系２と考え合せると１→１，０→０，１→０の各推論は独立に実行できることが理解される。例えば，$x_{ij}=1$ が与えられたとき，定理２から１→１と１→０推論が可能であるが，１→０推論を実行する上で，１→１推論の結果生じた１は必要ではなく（もちろん使用しても良い），$x_{ij}=1$ とすでにMにおいて既知となっていた値のみを用いて１→０推論が実行できるのである。この事実と定理２から，次の定理３を得る。

［定理３］　独立推論定理

Mが無矛盾・極大ならば，$1\overset{*}{\to}1$，$1\overset{*}{\to}0$，$0\overset{*}{\to}0$ 推論は独立に実行して良く，その実行順序によらない。

３．３　三項推論

前節では基本二項推論及びその系列（推移的閉包）である完全二項推論について考察した。本節では二項推論だけでなく，三項推論も含めた推論を考察する。(11)のすべての推論の組合せ全体からなる推論を $\overset{\#}{\to}$ とする、明らかに，$\forall\ v,\ z\in\tilde{V}$ に対し，$v\overset{*}{\to}z$ ならば $v\overset{\#}{\to}z$ である。次の定理はその逆が成り立つことを示している。

［定理４］　三項推論定理

$v\overset{\#}{\to}z$　ならば　$v\overset{*}{\to}z$

（証明）

$v\overset{\#}{\to}z$，$v\overset{*}{\nrightarrow}z$ と仮定する。このとき，ある三項推論

$$w\to\ (y\to z')\tag{12}$$

が存在して，以下が成立する。

$$v\overset{*}{\to}w,\ \ v\overset{*}{\to}y\tag{13}$$

$$v\overset{*}{\to}z'\tag{14}$$

$$z'\overset{\#}{\to}z\quad\text{または}\quad z'=z\tag{15}$$

いま，$v=x_{ab}\in V$ とおく。($v=\bar{x}_{ab}\in\bar{V}$ でない。なぜなら，(13)より，$w,\ y\in\bar{V}$ となるが，このとき（12）の形の基本三項推論は（11）の中に存在しない）　(12）が基本三項推論（11－g）の形　$\bar{x}_{ij}\to\ (x_{ik}\to\bar{x}_{kj})$　であるとすると，(13)（14）はそれぞれ

$$x_{ab}\overset{*}{\to}\bar{x}_{kj}w\qquad x_{ab}\overset{*}{\to}\bar{x}_{ij},\ \ x_{ab}\overset{*}{\to}x_{ik}\tag{17}$$

となる。
定理2と（17）から

$[bRi,\ a\bar{R}j] \vee [jRa,\ i\bar{R}b],\ iRa,\ bRk$ (18)

iRa が成り立っているので $i\bar{R}b$ は成り立たない。（$i\bar{R}b$ とすると $a\bar{R}b$ となり $v_{ab} \in V$ に矛盾）
従って，（18）は次式となる。

$bRi,\ a\bar{R}j,\ iRa,\ bRk$ (19)

（19）の bRk, $a\bar{R}j$ より，$x_{ab} \overset{*}{\rightarrow} \bar{x}_{kj}$。これは（16）に矛盾する。

同様にして，三項推論（12）が他の形の場合にも（13）を用いて矛盾を導ける。 Q. E. D.

定理4から基本三項推論を使用する推論はすべて完全二項論から得ることができることが示された。また，完全二項推論は高々二つの基本二項論から得られる。更に，定理2からすべての完全二項推論は定理2の条件を満すものがすべてであり，且つ，これに限る。これらの事実をまとめると次の定理5を得る。

［定理5］ 完全推論定理

M 無矛盾・極大であるとき，未知数 x_{ij} に対し

（1）$x_{ij}=1$ が与えられたとき，

（a）$1 \overset{*}{\rightarrow} 1$ 推論 $x_{ij} \overset{*}{\rightarrow} x_{lm}$；$j,\ l\tilde{R}m,\ lRi,\ jRm$

（b）$1 \overset{*}{\rightarrow} 0$ 推論 $x_{ij} \overset{*}{\rightarrow} \bar{x}_{lm}$；$iRj,\ l\tilde{R}m,\ (jRl,\ i\bar{R}m) \vee (mRi,\ l\bar{R}j)$

（2）$x_{ij}=0$ が与えられたとき

（c）$0 \overset{*}{\rightarrow} 0$ 推論 $\bar{x}_{ij} \overset{*}{\rightarrow} \bar{x}_{lm}$；$i\bar{R}j,\ l\tilde{R}m,\ iRl,\ mRj$

がすべての推論であり，且つこれ以外にない。

更に，$x_{ij}=1$ のときの $1 \overset{*}{\rightarrow} 1$，$1 \overset{*}{\rightarrow} 0$ 推論は独立に実行して良く，その順序によらない。

4．推論のアルゴリズム

本章では推論を実行する2つのアルゴリズムについて述べる。1つは定理5の結果を忠実に反映したものであり，他の1つは計算の手間について改善したものである。

4．1 諸記号

未知数 x_{ij} に対して，値1又は0が与えられたとき，定理5によって推論される未知数の添字対集合を定義する。但し，$(i,\ j)$ についてはその決定した値を強調して書き入れてある。

$W1 \triangleq \{(l,\ m) \mid iRj,\ l\tilde{R}m,\ l \in D(i),\ m \in L(j)\}$；$1 \rightarrow 1$ 推論によって値1が決まる添字対集合。

$W0_{\mathrm{L}} \triangleq \{(l,\ m) \mid iRj,\ l\tilde{R}m,\ l \in L(j),\ m \in \bar{L}(i)\}$；$1 \rightarrow 0$ 推論によって値0が決まる添字対集合の1つ。

$W0_{\mathrm{D}} \triangleq \{(l,\ m) \mid iRj,\ l\tilde{R}m,\ l \in \bar{D}(j),\ m \in D(i)\}$；$1 \rightarrow 0$ 推論によって値0が決まるもう1つの添字対集合。

$W0 \triangleq \{(l,\ m) \mid i\bar{R}j,\ l\tilde{R}m,\ l \in L(i),\ m \in D(j)\}$；$0 \rightarrow 0$ 推論によって値0が決まる添字対集合。

次に $W1 \sim W0$ から条件（$l\tilde{R}m$）を除いた添字対集合 $Y1 \sim Y0$ を定義する。

$Y1 \triangleq \{(l,\ m) \mid iRj,\ l \in D(i),\ m \in L(j)\}$

$Y0_{\mathrm{L}} \triangleq \{(l,\ m) \mid iRj,\ l \in L(j),\ m \in \bar{L}(i)\}$

$Y0_D \triangleq \{(l,\ m) \mid iRj,\ l \in \bar{D}(j),\ m \in D(i)\}$
$Y0 \triangleq \{(l,\ m) \mid i\bar{R}j,\ l \in L(i),\ m \in D(j)\}$
更に以下も定義する。
$K1 \triangleq \{(l,\ m) \mid M_{lm} = 1\}$；$M$ において値1で既知である添字対集合。
$K0 \triangleq \{(l,\ m) \mid M_{lm} = 0\}$；$M$ において値0で既知である添字対集合。
$Z1 \triangleq Y1 \cap K1$
$Z0_L \triangleq Y0_L \cap K0$
$Z0_D \triangleq Y0_D \cap K0$
$Z0 \triangleq Y0 \cap K0$

4．2　アルゴリズムＩ

定理5を忠実に実行すると次のアルゴリズムを得る。

```
{推論のアルゴリズムＩ}
    begin
1.0     if  M_ij = x_ij = 1  then
1.1         M_lm := 1  for  all  (l, m) ∈ W1;
1.2         M_lm := 0  for  all  (l, m) ∈ W0_L ∪ W0_D ;
2.0     else
2.1         M_lm := 0  for  all  (l, m) ∈ W0;
    end
```

上のアルゴリズムで重要な点は $M_{ij} = x_{ij} = 1$ のとき，ステップ1．1で1→1推論を実行し M を書きかえて，次のステップ1．2ではこの書きかわった M に対して1→0推論を実行していることである。このようにしても良いことは推論の独立性から保障されている。

4．3　アルゴリズムII

アルゴリズムＩをインプリメントする上での要点は，$W1 \sim W0$ の添字対集合を求めることである。例えば $W1$ の決定には，$l \in D(i)$，$m \in L(j)$ で且つ $l\tilde{R}m$ なる3つの条件を満す $(l,\ m)$ を見出す必要がある。次に述べるアルゴリズムIIは $l\tilde{R}m$ の条件判定を必要とせず2つの条件判定で済む。すなわち，$W1 \sim W0$ の代りに $Y1 \sim Y0$ を用いて推論を実行できる。

```
{推論のアルゴリズムII}
    begin
1.0     if  M_ij = x_ij = 1  then
1.1         M_lm := 1  for  all  (l, m) ∈ Y1;
1.2         M_lm := 0  for  all  (l, m) ∈ Y0_L ∪ Y0_D ;
2.0     else
2.1         M_lm := 0  for  all  (l, m) ∈ Y0;
    end
```

（証明）

$W1\sim W0$ の代りに $Y1\sim Y0$ を用いても正しく推論が実行されることを示す。

（i） $1\rightarrow 1$ 推論

$Y1$ は $W1$ から条件 $l\tilde{R}m$ を除いた集合であることから，$(l,\ m)\in Y1$ は $l\tilde{R}m$ 又は lRm 又は $l\bar{R}m$ の3通りの場合が考えられる。このうち，$l\tilde{R}m$ の場合は $W1$ の条件そのものであり，lRm の場合はすでに $M_{lm}=1$ となっているところを値1で2度書するだけで問題は生じない。問題は $l\bar{R}m$ となっている場合である。このような $(l,\ m)$ が $Y1$ に含まれると，すでに値0で既知となっている要素を書きかえて $M_{lm}=1$ としてしまうことになる。従って，$Y1$ が $l\bar{R}m$ なる添字対を含まないことを示せば良い。すなわち，

$$Y1=W1\oplus Z1,\ \text{但し}\oplus\text{は直和を表わす}, \tag{20}$$

を示せば良い。

（a） $W1\cap Z1=\phi$

$W1$ の条件 $l\tilde{R}m$ と定義 $Z1=Y1\cap K1$ の $K1$ における条件 lRm が互に排反であることから明らかである。

（b） $Y1\supset W1\oplus Z1$

$Y1\supset W1$ は $W1$ の条件 $l\tilde{R}m$ を除いた集合が $Y1$ であることから，また $Z1=Y1\cap K1$ より $Y1\supset Z1$ であることから言える。

（c） $Y1\subset W1\oplus Z1$

任意の $(l,\ m)\in Y1$ に対して，$(l,\ m)\in W1\cup K1\cup K0$。今，$(l,\ m)\in K0$ と仮定すると，$(l,\ m)\in Y1\cap K0$ より lRi, jRm, $l\bar{R}m$ となっている。ところがこの場合，M の無矛盾・極大性から iRj を決定する以前の M においてすでに $i\bar{R}j$ となっていなければならず，$i\tilde{R}j$ に矛盾する。よって，$(l,\ m)\notin K0$。故に $Y1\subset W1\cup K1$。これから

$Y1\subset Y1\cap(W1\cup K1)=W1\cup Z1=W1\oplus Z1$。

（a）（b）（c）より (20) が証明された。

（ii） $1\rightarrow 0$ 推論

（i）と同様の考察より，証明すべき事項は (21) である。

$$Y0_{\mathrm{L}}\oplus Y0_{\mathrm{D}}=W0_{\mathrm{L}}\oplus W0_{\mathrm{D}}\oplus Z0_{\mathrm{L}}\oplus Z0_{\mathrm{D}} \tag{21}$$

（a） $Y0_{\mathrm{L}}\oplus Y0_{\mathrm{D}}$, $W0_{\mathrm{L}}\oplus W0_{\mathrm{D}}\oplus Z0_{\mathrm{L}}\oplus Z0_{\mathrm{D}}$

$(l,\ m)\in Y0_{\mathrm{L}}\wedge Y0_{\mathrm{D}}$ と仮定すると，lRm, mRi, $l\bar{R}j$ より M の極大性から $i\bar{R}j$ となっていなければならない。これは $i\tilde{R}j$ であったことに反する。故に，$Y0_{\mathrm{L}}\wedge Y0_{\mathrm{D}}=\phi$。同様にして右辺の排反性が言える。

（b） $Y0_{\mathrm{L}}\oplus Y0_{\mathrm{D}}\supset W0_{\mathrm{L}}\oplus W0_{\mathrm{D}}\oplus Z0_{\mathrm{L}}\oplus Z0_{\mathrm{D}}$

$W0_{\mathrm{L}}$ と $W0_{\mathrm{D}}$ の条件から $l\tilde{R}m$ を除くと $Y0_{\mathrm{L}}$ と $Y0_{\mathrm{D}}$ になること，及び　$Z0_{\mathrm{L}}$ と $Z0_{\mathrm{D}}$ の定義から明らか。

（c） $Y0_{\mathrm{L}}\oplus Y0_{\mathrm{D}}\subset W0_{\mathrm{L}}\oplus W0_{\mathrm{D}}\oplus Z0_{\mathrm{L}}\oplus Z0_{\mathrm{D}}$

任意の $(l,\ m)\in Y0_{\mathrm{L}}$ に対して，lRm, $l\bar{R}m$, $l\tilde{R}m$ のいずれか。更に，lRm のときは $(l,\ m)\in K1$ 又は $(l,\ m)\in W1$（ステップ1．1で lRm となった場合）のいずれかである。$(l,\ m)\in Y0_{\mathrm{L}}\cap K1$ のとき，$i\bar{R}m$, jRl, lRm より $i\bar{R}j$ となっていなければならず $i\tilde{R}j$ に反する。また，$(l,\ m)\in Y0_{\mathrm{L}}\cup W1$ のときは $i\bar{R}m$, jRm より $i\bar{R}j$ となっていなければならず，$i\tilde{R}j$ に反する。以上より，$Y0_{\mathrm{L}}\subset W0_{\mathrm{L}}\cup K0$。これから

$$Y0_{\mathrm{L}}\subset Y0_{\mathrm{L}}\cap(W0_{\mathrm{L}}\cup K0)=W0_{\mathrm{L}}\oplus Z0_{\mathrm{L}}。 \tag{22}$$

同様にして

$Y0_Z \subset Y0_D \oplus Z0_D$。　　(23)

(22) (23) より (21) を得る。

(iii) $0 \to 0$ 推論

証明すべき事項は (24) であり，(i) (ii) と同様にして証明できる。

$Y0 = W0 \oplus Z0$　　(24)

以上でアルゴリズムIIの証明を終える。　　Q. E. D.

5．推論の数

推論の数とは $M_{ij}=x_{ij}$ に対して，$x_{ij}=1$　又は　0の値が与えられたとき，これから推論されて値が決まる未知要素の個数である。これまでの議論から推論の数は以下のようになる。

(a) $x_{ij}=1$ のとき

$\mu_{ij} \triangleq |W1| + |W0_L| + |W0_D|$

(b) $x_{ij}=0$ のとき

$\nu_{ij} \triangleq |W0|$

上の μ_{ij}, ν_{ij} は正確な数であるが，近似的には次のように求められる。

$\mu'_{ij} \triangleq |Y1| + |Y0_L| + |Y0_D|$

$\nu'_{ij} \triangleq |Y0|$

明らかに μ_{ij} と μ'_{ij} (ν_{ij} と ν'_{ij}) の差は $|Z1| + |Z0_L| + |Z0_D|$ ($|Z0|$) である。従って，大まかに言えば未知数が多いときは μ_{ij} と μ'_{ij} (あるいは ν_{ij} と ν'_{ij}) の差は小さく，未知数が少なくなるにつれてその差が出てくると考えられる。

6．あとがき

推移的システムの推論構造を明らかにし，推論のアルゴリズムについて述べた。主要な結果は以下のとおりである。

(1) 無矛盾・極大性の概念を導入し，理論展開を明解にした。

(2) 完全二項推論定理によって与えられる，$1 \to 1$，$1 \to 0$，$0 \to 0$ 推論と呼ぶ推論がすべての推論であり，これらは独立に実行して良いことを示した。

(3) 上記3つの推論を実行するためのアルゴリズムを2つ提案し，その正当性を証明した。

当研究室では本文で述べた推論のアルゴリズムを8ビット，パーソナルコンピュータにC言語によりインプリメントしている。このプログラムは従来のISM法を改良したより柔軟な推移的具象化を可能とする改良ISM法のシステムの1部として使われており，その有効性が確かめられている。

参考文献

1) J. N. Warfield : Societal Systems, (1976), Wiley.
2) 田村担之：計測と制御，18 (昭54)
3) 河村和彦：計測と制御，16 (昭52)
4) J. N. Warfield : IEEE Trans., SMC−6 (1976)
5) 栗原，大内，加地：電子通信学会技術研究報告CAS 83−93〜108 (昭58)
6) 大内，栗原，加地：同上
7) 栗原，大内，加地：電気学会論文誌C，104，1 (昭59)