北海道大学工学部研究報告
第120号（昭和59年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 120 (1984)

標本化定理の構造について

長　島　知　正　　瀧　澤　英　一*

（昭和58年11月30日受理）

Remarks on Sampling Theorems

Tomomasa NAGASHIMA and Éiichi TAKIZAWA

(Received November 30, 1983)

Abstract

With the intention of unifying sampling theories of various types, the sampling theorem by Shannon is critically reconsidered.

The Shannon's sampling expansion formula is derived without relying on Fourier analysis and, as a result, a sufficient condition which guarantees the Shannon's sampling formula is presented in terms of the growth rate of sampled function in complex domain. The relation between the sufficient condition obtained in this paper and the Fourier transform of band limited functions is discussed in the light of the Paley-Wiener's theorem.

1. 序　　　論

シャノンの標本化定理に代表される標本化定理，即ち，帯域幅の制限された連続波形を離散化した時刻（標本点）での波の高さに置き換える型の定理は，古くから通信理論，情報理論を始めとし，システム制御理論等に於いても良く知られている[1,2]。

ところで，シャノンの標本化定理は，裏返して見れば，連続関数に対する内挿公式(補間式)を与えるものであり，ラグランジュの内挿公式が多項式を対象とすることに対比して，関数のクラスを超越整関数の（一部の）領域へ自然な形で拡張したものとなっている。又，そこに現われる展開公式はテーラー展開やフーリエ級数と異なる，連続関数に対する関数の表現を与えるという意味で興味深いものがある。

しかしながら，この型の定理は，無限の過去から未来に亘る標本点での値を必要とすること，及び，標本点での関数値を指定された順序に加えねばならないこと，又，代数曲線を直接扱えないこと等，実用的な面から見ると役に立たせにくいという評価もされている。更に，補間問題に関しては，実用性にすぐれているとされるスプライン補間が普及し，近年，シャノン型の標本化定理の研究は，すたれつつあるように見える。

本論文で，シャノン型の定理を再び取り上げるのは，シャノンの標本化定理自身に限っても，それが成立つ必要充分条件が明きらかにされていないという現状を改良するという狭義の目的に加え，次のような背景もある：

精密工学科　精密機器学第二構座
*横浜国立大　工学部　応用数学

即ち，シャノンの標本化定理が，極めてユニークな点は，この定理が，連続量を離散化すること（関数値を離散化する，いわゆる量子化という意味ではない）に関した命題を正面から取り扱う点にあり，デジタル計算機を常用するようになった現在でさえ，連続量の離散化の問題に関して，我々に，数学的に厳密な知識を提供してくれる極めて数少ない理論と考えられる。この離散化の問題は，サンプル値制御等[0)]で，問題とされることもあるが，数理科学の問題としては，基本的な解決の望まれる問題をはらんだ，未開の処女地と思われる。従って，この観点から，シャノンの定理の周辺でなされて来た従来からの結果を見直すと共に，通常は，静的な理論として考えられている標本化定理を，微分方程式の離散化との関連を含む動的な理論へ拡張し，数値解析の基礎理論・近似理論として発展させていく試みが今日，成されて良いと考えられる。

本論文では，§2でシャノンの標本化定理の簡単な説明を与え，§3では，シャノン型の標本化定理の構造を統一的に鳥瞰するという立場から，従来得られた各種の結果をまとめる。§4では，シャノンの標本化定理を，フーリエ解析を用いずに，通常考察される狭い範囲で証明する。§5では，§4で得た結果をPaley-Wienerの定理を仲立ちとして，フーリエ解析で求めた場合と比較する。対象とする関数が $L_2(-\infty,\infty)$ に属さない場合[3)]に対する，シャノンの定理の拡張等については，本論文に引き続く論文で述べることにする。

2. シャノンの標本化定理

ここでは，シャノンの標本化定理について，極く簡単に述べる。

［定理］

$f(t)$ を連続関数（$-\infty<t<\infty$）とし，そのフーリエ変換 $F(\omega)$ が，

$$F(\omega)=0,\quad |\omega|>\mathrm{A}, \tag{1}$$

とする。この時，次の展開が成立つ：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\mathrm{A}}\right)\cdot\frac{\sin(\mathrm{A}t-n\pi)}{\mathrm{A}t-n\pi}. \tag{2}$$

上の定理は，通常，次のように説明される：

$f(t)$ が $F(\omega)$ のフーリエ変換として

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega, \tag{3}$$

と表わされるとする。ここで，帯域幅が制限されているので，

$$f(t)=\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} F(\omega)\cdot e^{i\omega t}\,d\omega, \tag{4}$$

である。今，$F(\omega)$ は，ω に関して，有限で切れているので，次のフーリエ級数を考える。

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\cdot e^{-i\frac{n\pi}{\mathrm{A}}\omega}, \tag{5}$$

ここで，係数は，

$$a_n = \frac{1}{2\mathrm{A}} \int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} F(\omega) \cdot \mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{\mathrm{A}}\omega} \mathrm{d}\omega \,, \tag{6}$$

と与えられる。(6)と(4)の右辺を比べると

$$a_n = \frac{1}{2\mathrm{A}} f\left(\frac{n\pi}{\mathrm{A}}\right), \tag{7}$$

を得る。(7)を(5)に代入すると，

$$F(\omega) = \frac{1}{2\mathrm{A}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\mathrm{A}}\right) \cdot \mathrm{e}^{-i\frac{n\pi}{\mathrm{A}}\omega} \,. \tag{8}$$

更に，(8)を(4)に代入して，項別積分すれば，(2)の展開が得られる。

ところで，このシャノンの標本化定理に現われた展開公式(2)は，連続関数 $f(t)$ を離散時刻 $t_n = n\pi/\mathrm{A}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) に於ける関数値のみで表わせることを示している。この定理の補間公式としての意味や情報理論に於ける役割等に関しては，標準的なテキストに譲り，ここでは省略する。以上述べたシャノンの標本化定理の説明は通常のテキストにあるものであるが，次の点は，注意を要するであろう。(i) $f(t)$ は，可積分関数又は，2乗可積分関数と考えられる，(ii) 項別積分が許るされるものとする，(iii) nに関する和は，複素型のフーリエ級数の意味，即ち，$\pm|n|$ を pair にとる必要がある。これらのことは，以下の実用上の問題点と結び付いていると考えられる。(i)は，基本的な連続関数のクラス，例えば，定数，三角関数等を除外している，(ii)は，$f(t)$ のフーリエ・スペクトル $F(\omega)$ は，滑らかでなければならない，又，(iii)は，離散時刻のデータから，連続関数を構成する際，過去のデータから和を逐次とってゆくという機械的な操作は，必ずしも許されていないということを夫々意味している。

3.　シャノン型の標本化定理の構造

前章で述べた如く，シャノンの標本化定理には，サンプリング間隔が一定であることに加え，かなり強い数学的制約が果たされており，それが実用上の難点にも継がっている。それらを解決又は緩和するために，シャノンの標本化定理を拡張し，一般化する試みが著者の一人，Takizawa[4]や数多くの人達によってなされている。ここでは，その中でも基本的と考えられる2つの方向について論じよう。

1　サンプリング間隔が一定でない標本化定理の構成：

シャノンの標本化定理に於いて，サンプリング間隔が一定値をとるのは，標本化関数 $S_n(t) \equiv \sin(\mathrm{A}t - n\pi)/(\mathrm{A}t - n\pi)$ に現われる三角関数 $\sin t$ の周期性に基因している。又，この三角関数は，フーリエ変換によって $f(t)$ を表現したことに始まっている。従って，$f(t)$ をフーリエ積分以外の適当な性質を備えた積分変換によって表現することを考えれば，不等間隔の標本化定理が得られる可能性が生まれる。

Kramer[5]は，このような考えから，整数次のベッセル関数を用いた標本化定理を考案した。

この方向での，標本化定理の一般化のあらすじは，以下のようにまとめられよう。

以下，I を有限区間，$K(x, t)$ を積分変換の核（kernel）として，$f(t)$ が，

$$f(t)=\int_{I}\phi(x)\cdot K(x,t)\,\mathrm{d}x\,, \tag{9}$$

と表わされるとする。ここで，$K(x, t_n)(n=1, 2, 3, \cdots)$ が，I 上で正規完全直交系を成すならば，$\phi(x)$ は，次の直交関数展開を持つであろう。

$$\phi(x)=\sum_{n}\mathrm{C}_n\cdot K^*(x, t_n)\,, \tag{10}$$

＊は，複素共役である。ここで，展開係数は，

$$C_n=\int_{I}\phi(x)\cdot K(x, t_n)\,\mathrm{d}x\,. \tag{11}$$

(11)を(9)と比較すれば，

$$C_n=f(t_n) \tag{12}$$

(12)を(10)へ代入すると，

$$\phi(x)=\sum_{n}f(t_n)\cdot K^*(x, t_n)\,. \tag{13}$$

(13)を(9)に代入し，項別積分を仮定すれば，一般化された標本化展開として，

$$\begin{aligned} f(t)&=\int_{I}\Big\{\sum_{n}f(t_n)\cdot K^*(x, t_n)\Big\}\cdot K(x, t)\,\mathrm{d}x\\ &=\sum_{n}f(t_n)\cdot\Big\{\int_{I}K^*(x, t_n)\cdot K(x, t)\,\mathrm{d}x\Big\}\\ &\equiv\sum_{n}f(t_n)\cdot S_n(t) \end{aligned} \tag{14}$$

を得る。ここで，$S_n(t)\equiv\int_{I}K^*(x, t_n)\cdot K(x, t)\mathrm{d}x$ は，一般化された標本化関数を，又，t_n は，標本点を表わす。$K(x, t)$ として，$K(x, t)=\mathrm{e}^{ixt}$ をとれば，§2での議論が，$f(t)\in L_2(-\infty, \infty)$の範囲で再現されよう。

2　標本点に於ける微係数を含めた場合，及び $f(t)$ が $L_2(-\infty, \infty)$ に属さない関数に対する標本化定理の構成：

この問題への標本化定理の拡張は，次の考察に基づいてなされる。先ず，シャノンの標本化展開(2)を変形して，次の如く書く。

$$\frac{f(t)}{\sin At} = \sum_n (-)^n \cdot f\left(\frac{n\pi}{A}\right) \cdot \frac{1}{At - n\pi} \quad , \tag{15}$$

ここで，実数 t を複素数 z へ拡張すれば，

$$\frac{f(z)}{\sin Az} = \sum_n (-)^n \cdot \frac{f\left(\frac{n\pi}{A}\right)}{Az - n\pi} \quad , \tag{16}$$

と書かれる。今，$f(z)$ を全複素平面で整関数とすれば，(16)の左辺は，全複素平面で有理型関数となり，右辺は，その無限部分分数展開を見ることが出来る。又，標本点は，有理型関数 $f(z)$ $f(z)/\sin Az$ の特異点（pole），即ち，$\sin Az$ の零点に一致している。

従って，一般論として，$f(z)$ 及び $g(z)$ を整関数として，有理型関数 $f(z)/g(z)$ の無限部分分数展開を考えて，もし，それが収束するように出来れば，標本点 z_n を $g(z_n)=0$ とする標本化展開を，又，更に，零点の位数が2位以上の整関数 $g(z)$ を考え，有理型関数 $f(z)/g(z)$ の無限部分分数展開の中，収束するものは，標本点での関数値のみならず，微係数をも含んだ標本化展開を与えているものと考えられる。ここで述べた複素解析に基づく方法は，シャノンの標本化定理を，対象とする関数のクラスを拡げるという意味で拡張を考える際にも，有効と考えられ，次章以降で議論を行なう。Jagerman-Fogel[6]らを始めとして，シャノンの標本化定理が成立つ，$f(t)$ の充分条件は，いくつか与えられているが，未だ，必要充分条件は求められていないようである。

ここに述べた１，２いずれの一般的方法とも形式的には単純なものであるが，有用な標本化公式を導くためには，いずれの方法に於いても，収束の仕方が鍵となる。

4. 複素解析に基づくシャノンの標本化定理

ここでは，前章２で述べた一般的方法の応用の一つとして，$F(\omega)$ の帯域幅が制限された関数の場合（Distribution でないという意味）に対して，シャノンの標本化定理を，フーリエ変換を用いずに証明する。（簡単化のため，以下帯域幅に相当する(1)，(2)のAは１とおく。）即ち，次の定理が成立つ。

［定理１］

$f(z)$ を整関数とする（$z \in \mathbf{C}$）。$\sin z$ の零点 $a_\ell = |\ell| \cdot \pi$（$\ell = 0, 1, 2, \cdots$）のうち，$|\ell| \leq n$ のみを内部に含む正方形の列を $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ とする。

$^\exists M > 0$，　$^\exists \varepsilon > 0$，　$s.t.$

$$|f(z)| \leq M \cdot |z|^{-\varepsilon} e^{|\mathrm{Im} z|} \quad \text{on} \quad \bigcup_n C_n \ , \tag{17}$$

$$\Rightarrow$$

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\ell=-n}^{n} f(\ell\pi) \cdot \frac{\sin(z - \ell\pi)}{z - \ell\pi} \quad . \tag{18}$$

証明：

以下，z を C_n 内部の点として，C_n に沿って次の積分を考える。（必要な記号等を図１に示した）

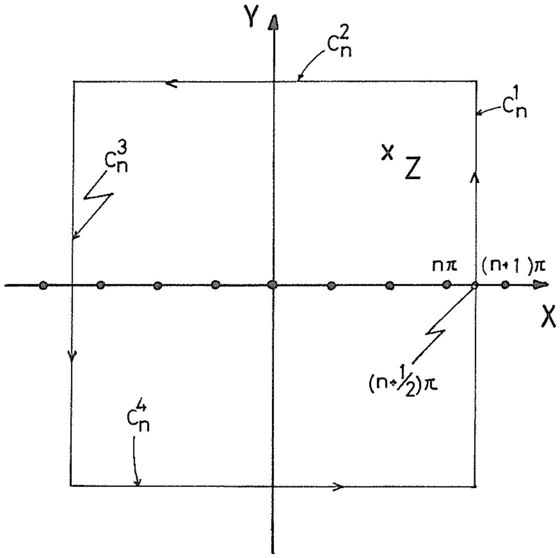

図1　積分路 C_n（但し，$C_n = \bigcup_{i=1} C_n^i$）

$$I_n(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\cdot \sin\zeta}\, d\zeta \ . \tag{19}$$

コーシーの積分定理より，(19)は，C_n 内の留数の和として表わされ，

$$= \sum_{\left\{\substack{C_n\text{内の}\\ \text{Pole}}\right\}} \mathrm{Res}\left[\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\cdot \sin\zeta}\right] , \tag{20}$$

となる。ここで，C_n 内には，$\zeta = z$，及び $\zeta = |\ell|\cdot\pi$ ($|\ell| = 0, 1, \cdots, n$) に夫々1位の pole があることに注意して，それらの留数を求めると，次のように与えられる，

$$\begin{aligned} &\mathop{\mathrm{Res}}_{\zeta = z}\left[\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\cdot\sin\zeta}\right] = \frac{f(z)}{\sin z} \\ &\mathop{\mathrm{Res}}_{\zeta = \ell\pi}\left[\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\cdot\sin\zeta}\right] = (-)^{\ell}\cdot\frac{f(\ell\pi)}{\ell\pi - z} \quad (|\ell| = 0, 1, \cdots, n). \end{aligned} \tag{21}$$

従って，

$$\begin{aligned} I_n(z) &= \frac{f(z)}{\sin z} - \frac{f(0)}{z} + \sum_{|\ell|=1}^{n}\left\{(-)^{|\ell|}\cdot\frac{f(|\ell|\pi)}{|\ell|\pi - z} + (-)^{-|\ell|}\cdot\frac{f(-|\ell|\pi)}{-|\ell|\pi - z}\right\} \\ &\equiv \frac{f(z)}{\sin z} + \sum_{\ell=-n}^{n}(-)^{\ell}\cdot\frac{f(\ell\pi)}{\ell\pi - z} \ . \end{aligned} \tag{22}$$

以下，$|I_n(z)|$ を評価する：

$$|\mathrm{I}_n(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_n}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\cdot\sin\zeta}\cdot d\zeta\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{C_n}\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\cdot\sin\zeta}\right|\cdot|d\zeta|$$

ε を任意の正の実数として，

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{C_n}\left|\frac{\zeta^{\varepsilon}\cdot f(\zeta)}{\zeta^{\varepsilon}\cdot(\zeta-z)\cdot\sin\zeta}\right|\cdot|d\zeta|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{C_n}\left|\frac{\zeta^{\varepsilon}\cdot f(\zeta)}{\sin\zeta}\right|\cdot\frac{|d\zeta|}{|\zeta^{\varepsilon}\cdot(\zeta-z)|}$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{2\pi}\cdot\int_{C_n}\left|\frac{\zeta^{\varepsilon}\cdot f(\zeta)}{e^{|Im\zeta|}}\right|\cdot\frac{|d\zeta|}{|\zeta^{\varepsilon}|\cdot|\zeta-z|}\ . \tag{23}$$

ここで，付録1で示した如く，C_n 上で，次を充たす n に依存しない定数 $\alpha>0$ が存在することを用いた；

$$\left|\frac{1}{\sin\zeta}\right| \leqslant \alpha\cdot e^{-|Im\zeta|}\ . \tag{24}$$

従って，C_n 上で次を充たす定数 $M>0$ があれば，即ち $f(\zeta)$ が不等式；

$$\sup_{\zeta\in C_n}\left|\frac{\zeta^{\varepsilon}\cdot f(\zeta)}{e^{|Im\zeta|}}\right| \leqslant M \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{25}$$

を充たしている時，(23)は，

$$|\mathrm{I}_n(z)| \leqslant \frac{\alpha\cdot M}{2\pi}\cdot\int_{C_n}\frac{|d\zeta|}{|\zeta^{\varepsilon}|\cdot|\zeta-z|}\ , \tag{26}$$

となる。ここで，右辺の積分は，$n\to\infty$ で消えること(付録2参照)より，$|\mathrm{I}_n(z)|\to 0\ (n\to\infty)$ である。従って，

$$\frac{f(z)}{\sin z} = \lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=-n}^{n}\frac{(-)^{\ell}\cdot f(\ell\pi)}{z-\ell\pi}\ , \tag{27}$$

が云える。(27)の両辺に，$\sin z$ をかけて，定理1の展開式が得られる。又，上の評価で用いた $f(\zeta)$ に対する条件式(25)は，

$$|f(\zeta)| \leqslant M\cdot\frac{e^{|Im\zeta|}}{||\zeta|^{\varepsilon}|} \quad \text{on} \quad C_n\ (n=0,1,2,\cdots) \tag{28}$$

を意味するから，定理1が証明された。尚，定理1に於ける，$|z|^{-\varepsilon}$ は，$||z|^{-\varepsilon}|$ の意味である。

5. 結　　び

ここでは，シャノンの標本化定理の前提条件である，帯域幅有限の条件と定理1の条件の関係

を考察しよう。この問題に関して，Paley-Wicner の定理：「整関数 $f(\zeta)$ が，台（Support）(*) が有限区間 $[-A, A]$ に含まれる C^∞ 級関数 $F(\omega)$ のフーリエ変換であるための必要充分条件は，

$$\forall N\ (\text{整数}),\ \exists K_N > 0,\ s.t.\ |f(\zeta)| \leqslant K_N(1+|\zeta|)^{-N} \cdot e^{A \cdot |Im\zeta|},$$

である」は基本的である。ところで，

$$\forall N\ (\text{整数}),\ \exists K_2 > 0,\ s.t.\ |f(\zeta)| \leqslant K_2 \cdot |\zeta|^{-N} \cdot e^{|Im\zeta|},$$

$$\Longrightarrow$$

$$\exists K_1 > 0,\ \exists \varepsilon > 0,\ s.t.\ |f(\zeta)| \leqslant K_1 \cdot |\zeta|^{-\varepsilon} \cdot e^{|Im\zeta|}.$$

であるが，逆は，一般には成立たない。従って，定理1の条件は，($|\zeta| \gg 1$ に対して）上の Paley-Wiener の条件を含んでいると云えよう。定理1の条件は，Paley-Wicner の条件の内，C^∞ 級の条件を緩めたものと考えられる。

以上のことより，我々は，フーリエ解析を経由せずに，$F(\omega)$ の帯域幅が有限な関数である場合に，標本化定理を，$F(\omega)$ の滑らかさを緩めた形で証明できたと云えるだろう。

§4及び§5で用いた議論は，シャノンの標本化定理を，$F(\omega)$ が超関数となる場合へ拡張する際にも有効と考えられる。$F(\omega)$ のクラスとして，工学的に重要なデルタ関数やその微分を含む場合の標本化定理については，本論文に引き続く，論文で論ずることにする。

付録1,

C_n 上で，$\left|\dfrac{1}{\sin\zeta}\right| \leqslant \alpha \cdot e^{-|Im\zeta|}\ (0 < \alpha < \infty)$：

(証明)

(i) $(\zeta = \pm(n+1/2)\pi + iy)$ に対して，

$$\begin{aligned}|\sin\zeta| &= \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x}\\ &= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\\ &\geqslant \frac{1}{2} e^{|y|}\end{aligned}$$

(ii) $\zeta = x \pm i(n+1/2)\pi$ に対しては，y を一般的に考えて，

$$\begin{aligned}|\sin\zeta| &= \frac{1}{2}|e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}|\\ &\geqslant \frac{1}{2}\big|\,|e^{ix-y}| - |e^{-ix+y}|\,\big|\\ &= \frac{1}{2}|e^{-y} - e^{y}|\\ &= \frac{1}{2}(e^{|y|} - e^{-|y|})\\ &= \frac{1}{2}e^{|y|} \cdot (1 - e^{-2|y|})\\ &\geqslant \frac{1}{2}\tilde{\alpha} \cdot e^{|y|} \quad (\tilde{\alpha} > 0 \text{ for } |y| > 1). \qquad \text{Q.E.D.}\end{aligned}$$

(*) $F(\omega)$ の台 $\Leftrightarrow \{\omega \mid F(\omega) \neq 0\}^{cl}$

付録 2.

$$\mathrm{K}_n(z) \equiv \int_{\mathrm{C}_n} \frac{|\mathrm{d}\zeta|}{|\zeta^{\varepsilon}| \cdot |\zeta - z|} \quad \to 0 \quad (n \to \infty):$$

（証明）

図 1 に示された積分路 $\mathrm{C}_n^i(i=1,2,3,4)$ 上の積分を K_n^i とすれば，$\mathrm{K}_n(z) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{K}_n^i(z)$。

（i）　$i=1,3$ に対して　$\zeta = \pm(n+1/2)\pi + iy$ ，

イ）　$|\zeta| = \sqrt{(n+1/2)^2\pi^2 + y^2} \geqq (n+1/2)\pi$ より，$|\zeta^{\varepsilon}| = ||\zeta|^{\varepsilon}| \geqq (n+1/2)^{\varepsilon}\pi^{\varepsilon}$

ロ）　z を半径が $(n+1/2)\pi$ の円内の点と仮定してよいから，

$$|\zeta - z| \geqq |\zeta| - |z| = \sqrt{(n+1/2)^2\pi^2 + y^2} - |z| \geqq (n+1/2)\pi - |z|$$

イ)，ロ)を用いて，

$$\mathrm{K}_n^i(z) \leqq \int_{-(n+1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi} \frac{\mathrm{d}y}{(n+1/2)^{\varepsilon} \cdot \pi^{\varepsilon} \cdot \{(n+1/2)\pi - |z|\}}$$

$$= \frac{2 \cdot (n+1/2)\pi}{(n+1/2)^{\varepsilon} \cdot \pi^{\varepsilon} \cdot \{(n+1/2)\pi - |z|\}}$$

$$\to 0 \quad (n \to \infty)$$

（ii）　$i=2,4$ に対して $(\zeta = x \pm i(n+1/2)\pi)$，

ハ）　$|\zeta - z| \geqq |\zeta| - |z| = \sqrt{x^2 + (n+1/2)^2\pi^2} - |z| \geqq (n+1/2)\pi - |z|$

ニ）　$|\zeta| = \sqrt{x^2 + (n+1/2)^2\pi^2} \geqq (n+1/2)\pi$ より，$|\zeta^{\varepsilon}| = ||\zeta|^{\varepsilon}| \geqq (n+1/2)^{\varepsilon}\pi^{\varepsilon}$

ハ)，ニ)を用いて，

$$\mathrm{K}_n^i(z) \leqq \int_{-(n+1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(n+1/2)^{\varepsilon} \cdot \pi^{\varepsilon} \cdot \{(n+1/2)\pi - |z|\}}$$

$$= \frac{2 \cdot (n+1/2)\pi}{(n+1/2)^{\varepsilon} \cdot \pi^{\varepsilon} \cdot \{(n+1/2)\pi - |z|\}}$$

$$\to 0 \quad (n \to \infty).$$

$$\therefore \quad \mathrm{K}_n(z) \to 0 \quad (n \to \infty). \qquad \text{Q.E.D.}$$

参 考 文 献

0) R. E. Kalman: Proc. Symp. on Nonlinear Circuit Analysis **6** (1956) 273.
1) C. E. Shannon: Proc. IRE **37** (1949) 10.
2) A. J. Jerri: Proc. IEEE **65** No. 11 (1977) 1565.
3) 杉山宏：第 2 回情報理論とその応用研究会資料 (1979) p. 359.
4) E. I. Takizawa: ZAMM **59** (1979) 15.
5) H. P. Kramer: J. Math. Phys. **38** (1959) 68.
6) D. L. Jagerman and L. J. Fogel: IRE Trans. **IT-2** (1956) 136.