北海道大学工学部研究報告
第120号（昭和59年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 120 (1984)

# 異方性厚板と積層板の変形について

五十嵐　　悟　渋川勝久

（昭和58年11月30日受理）

# On the Deformation of Homogeneous Anisotropic Thick Plates and Composite Laminates

Satoru IGARASHI and Katsuhisa SHIBUKAWA

(Received November 30, 1983)

**Abstract**

Equations of deformation of an anisotropic thick plate having differential operators to be expanded into power series in the plate-thickness are derived from fundamental equations of an elastic body. Truncating the series at appropriate terms of higher order of the plate-thickness, approximate equations of deformation with any desired accuracy are obtained for a plate subjected external load at the upper and lower surfaces of the plate.

A method proposed in the present paper for deformation of a homogeneous anisotropic plate can be applied to the deformation problem of a composite laminated plate, and equations of deformation of a composite laminate are derived by considering boundary conditions of outer and inner surfaces of the laminate.

## 1. 緒　　言

厚い板の変形に関しては，Reissner[1] がせん断変形の影響を考慮して曲げ問題を扱って以来，板の応力やひずみの分布を考慮に入れた多くの近似理論が提出されている。それらの多くは，変位を板厚方向の座標の多項式として近似するもの[2~3]，あるいは，応力を多項式として近似するもの[4~5] である。しかし，これらの理論では，板の変形を支配する方程式を導く方法が繁雑であり，得られる方程式もかなり複雑である。特に，これらの理論を積層板の変形に適用する場合[6] には，極めて多くの複雑な式の操作と計算が必要となる。さらに，これらの理論で近似の程度を高めるには多項式の次数を高める必要がある。しかし，高次の多項式を使って計算を進めることは，扱う方程式の数が増加するので極めて困難となる。

一方，Vlasov[7] は，変位と板中央面に平行な面に作用する応力を板厚方向の座標のベキ級数に展開することによって，等方性の板の変形に対する基礎方程式を導き，さらに基礎方程式から板の変形に対する任意の精度の近似方程式を得る方法を提出した。しかし，彼の理論では基礎方程式に補助関数が使われており，この方法によれば変位や応力はこの補助関数を使って求めなければならない。

精密工学科　精密機器学第二講座

著者ら[8]は，先に変位を板厚方向の座標のベキ級数に展開することによって，等方性の板の変形を支配する基礎方程式を得，第3近似までの方程式を導出した。その後，この方法を改良して，等方性板の変形に対する基礎方程式から，任意の精度の近似方程式を組織的に得ることのできる方法を提出した[9]。

本論文では，異方性の厚板に対してこの方法を適用し，均質な異方弾性板の変形に対する基礎方程式を導き，この基礎方程式から任意の精度の近似方程式を組織的に得る方法を提出する。さらに，この方法を積層板の変形問題に応用して，積層板の変形を支配する基礎方程式，および近似方程式が容易に得られることを示す。

## 2. 記号と座標系

$x_i$：直角座標，（$i=1,\ 2,\ 3$）

$\xi_i$：変位成分，（$i=1,\ 2,\ 3$）

$\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \xi_j}{\partial x_i}+\dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right)$：ひずみの成分，（$i,\ j=1,\ 2,\ 3$）

$\sigma_{ij}$：応力成分，（$i,\ j=1,\ 2,\ 3$）

$h$：板厚，

$x_1$ 軸，$x_2$ 軸を板の中央面上に，$x_3$ 軸を板厚方向にとり，下向きを正の向きとする。

## 3. 基礎方程式

弾性体が，$x_1-x_2$ 平面に平行な弾性対称面をもつ場合を考える。この場合，応力－ひずみ関係式は，$a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ を弾性定数として次式で与えられる。

$$\left\{\begin{aligned}
\sigma_{11}&=a_{11}\varepsilon_{11}+a_{12}\varepsilon_{22}+a_{13}\varepsilon_{33}+2a_{14}\varepsilon_{12},\\
\sigma_{22}&=a_{12}\varepsilon_{11}+a_{22}\varepsilon_{22}+a_{23}\varepsilon_{33}+2a_{24}\varepsilon_{12},\\
\sigma_{33}&=a_{13}\varepsilon_{11}+a_{23}\varepsilon_{22}+a_{33}\varepsilon_{33}+2a_{34}\varepsilon_{12},\\
\sigma_{12}&=a_{14}\varepsilon_{11}+a_{24}\varepsilon_{22}+a_{34}\varepsilon_{33}+2a_{44}\varepsilon_{12},\\
\sigma_{23}&=2a_{55}\varepsilon_{23}+2a_{56}\varepsilon_{31},\\
\sigma_{31}&=2a_{56}\varepsilon_{23}+2a_{66}\varepsilon_{31}.
\end{aligned}\right. \tag{3-1}$$

式（3－1）を弾性体のつり合い方程式，

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}=0,\ (i=1,\ 2,\ 3) \tag{3-2}$$

に代入して整理すれば次式を得る。

$$\left\{\begin{aligned}
&\left(a_{66}\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}+\mathscr{L}_A{}^2\right)\xi_1+\left(a_{56}\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}+\mathscr{L}_B{}^2\right)\xi_2+\mathscr{L}_D\frac{\partial}{\partial x_3}\xi_3=0,\\
&\left(a_{56}\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}+\mathscr{L}_B{}^2\right)\xi_1+\left(a_{55}\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}+\mathscr{L}_C{}^2\right)\xi_2+\mathscr{L}_E\frac{\partial}{\partial x_3}\xi_3=0,\\
&\mathscr{L}_D\frac{\partial}{\partial x_3}\xi_1+\mathscr{L}_E\frac{\partial}{\partial x_3}\xi_2+\left(a_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}+\mathscr{L}_F{}^2\right)\xi_3=0.
\end{aligned}\right. \tag{3-3}$$

ここで

$$\mathscr{L}_A^2 = a_{11}\alpha_1^2 + 2a_{14}\alpha_1\alpha_2 + a_{44}\alpha_2^2,\ \mathscr{L}_B^2 = a_{14}\alpha_1^2 + (a_{12}+a_{44})\alpha_1\alpha_2 + a_{24}\alpha_2^2,$$
$$\mathscr{L}_C^2 = a_{44}\alpha_1^2 + 2a_{24}\alpha_1\alpha_2 + a_{22}\alpha_2^2,\ \mathscr{L}_D = \mathscr{L}_G + \mathscr{L}_H,\ \mathscr{L}_E = \mathscr{L}_I + \mathscr{L}_J,$$
$$\mathscr{L}_F^2 = \mathscr{L}_G\alpha_1 + \mathscr{L}_I\alpha_2,\ \mathscr{L}_G = a_{66}\alpha_1 + a_{56}\alpha_2,\ \mathscr{L}_H = a_{13}\alpha_1 + a_{34}\alpha_2,$$
$$\mathscr{L}_I = a_{56}\alpha_1 + a_{55}\alpha_2,\ \mathscr{L}_J = a_{34}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2,$$
$$\alpha_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\ \alpha_2 = \frac{\partial}{\partial x_2},$$

とおいた。

変位成分 $\xi_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ を次のように板厚方向の座標 $x_3$ のベキ級数に展開する。

$$\xi_1 = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{u_r}{r!}x_3^r,\quad \xi_2 = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{v_r}{r!}x_3^r,\quad \xi_3 = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{w_r}{r!}x_3^r. \qquad (3-4)$$

ただし，$u_r$，$v_r$，$w_r$ は $x_1$ と $x_2$ の関数とする。式 (3−4) を式 (3−3) に代入して，左辺を $x_3$ のベキ級数に展開すれば次式が得られる。

$$\begin{cases} a_{66}u_{r+2} + a_{56}v_{r+2} + \mathscr{L}_A^2 u_r + \mathscr{L}_B^2 v_r + \mathscr{L}_D w_{r+1} = 0, \\ a_{56}u_{r+2} + a_{55}v_{r+2} + \mathscr{L}_B^2 u_r + \mathscr{L}_C^2 v_r + \mathscr{L}_E w_{r+1} = 0, \\ \mathscr{L}_D u_{r+1} + \mathscr{L}_E v_{r+1} + a_{33}w_{r+2} + \mathscr{L}_F^2 w_r = 0. \qquad (r=0,\ 1,\ 2,\cdots) \end{cases} \qquad (3-5)$$

式 (3−5) から，次の2組の関係式が導かれ，$u_r$，$v_r$，$w_r\,(r=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ が $u_0$，$v_0$，$w_0$，および $u_1$，$v_1$，$w_1$ によって表わされることがわかる。

$$\begin{bmatrix} u_{2r} \\ v_{2r} \\ w_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(r), \phi_{12}(r), \phi_{13}(r) \\ \phi_{21}(r), \phi_{22}(r), \phi_{23}(r) \\ \phi_{31}(r), \phi_{32}(r), \phi_{33}(r) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(1), \phi_{12}(1), \phi_{13}(1) \\ \phi_{21}(1), \phi_{22}(1), \phi_{23}(1) \\ \phi_{31}(1), \phi_{32}(1), \phi_{33}(1) \end{bmatrix}^r \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_1 \end{bmatrix}, \qquad (3-6)$$
$$(r=1, 2, 3, \cdots)$$

$$\begin{bmatrix} u_{2r+1} \\ v_{2r+1} \\ w_{2r+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{11}(r), \psi_{12}(r), \psi_{13}(r) \\ \psi_{21}(r), \psi_{22}(r), \psi_{23}(r) \\ \psi_{31}(r), \psi_{32}(r), \psi_{33}(r) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{11}(1), \psi_{12}(1), \psi_{13}(1) \\ \psi_{21}(1), \psi_{22}(1), \psi_{23}(1) \\ \psi_{31}(1), \psi_{32}(1), \psi_{33}(1) \end{bmatrix}^r \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_0 \end{bmatrix}. \qquad (3-7)$$
$$(r=1, 2, 3, \cdots)$$

ここで，

$$\phi_{11}(1) = (a_{56}\mathscr{L}_B^2 - a_{55}\mathscr{L}_A^2)/A,\ \phi_{12}(1) = (a_{56}\mathscr{L}_C^2 - a_{55}\mathscr{L}_B^2)/A,\ \phi_{13}(1) = (a_{56}\mathscr{L}_E - a_{55}\mathscr{L}_D)/A,$$
$$\phi_{21}(1) = (a_{56}\mathscr{L}_A^2 - a_{66}\mathscr{L}_B^2)/A,\ \phi_{22}(1) = (a_{56}\mathscr{L}_B^2 - a_{66}\mathscr{L}_C^2)/A,\ \phi_{23}(1) = (a_{56}\mathscr{L}_D - a_{66}\mathscr{L}_E)/A,$$
$$\phi_{31}(1) = \psi_{31}(1)\phi_{11}(1) + \psi_{32}(1)\phi_{21}(1),\ \phi_{32}(1) = \psi_{31}(1)\phi_{12}(1) + \psi_{32}(1)\phi_{22}(1),$$
$$\phi_{33}(1) = \psi_{31}(1)\phi_{13}(1) + \psi_{32}(1)\phi_{23}(1) + \psi_{33}(1),\ \psi_{11}(1) = \phi_{11}(1) + \phi_{13}(1)\psi_{31}(1),$$
$$\psi_{12}(1) = \phi_{12}(1) + \phi_{13}(1)\psi_{32}(1),\ \psi_{13}(1) = \phi_{13}(1)\psi_{33}(1),\ \psi_{21}(1) = \phi_{21}(1) + \phi_{23}(1)\psi_{31}(1),$$
$$\psi_{22}(1) = \phi_{22}(1) + \phi_{23}(1)\psi_{32}(1),\ \psi_{23}(1) = \phi_{23}(1)\psi_{33}(1),\ \psi_{31}(1) = -\mathscr{L}_D/a_{33},$$
$$\psi_{32}(1) = -\mathscr{L}_E/a_{33},\ \psi_{33}(1) = -\mathscr{L}_F^2/a_{33},\ A = a_{55}a_{66} - a_{56}^2,$$

とおいた。

式 (3−4) の右辺に，式 (3−6)，(3−7) を使えば，変位成分 $\xi_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ が，板中央面での変位（$u_0$，$v_0$，$w_0$）と変位勾配（$u_1$，$v_1$，$w_1$）によって表わされることが分る。

一方，式（3−3）から次の方程式が導かれる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}+\beta_1{}^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}+\beta_2{}^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}+\beta_3{}^2\right)\xi_i=0.\ (i=1,2,3) \qquad (3-8)$$

ここで，$-\beta_k{}^2(k=1,2,3)$ は次式を満たす演算子である。

$$\begin{vmatrix} a_{66}\beta_k{}^2+\mathscr{L}_A{}^2 & a_{56}\beta_k{}^2+\mathscr{L}_B{}^2 & \mathscr{L}_D\beta_k \\ a_{56}\beta_k{}^2+\mathscr{L}_B{}^2 & a_{55}\beta_k{}^2+\mathscr{L}_C{}^2 & \mathscr{L}_E\beta_k \\ \mathscr{L}_D\beta_k & \mathscr{L}_E\beta_k & a_{33}\beta_k{}^2+\mathscr{L}_F{}^2 \end{vmatrix}=0.\ (k=1,2,3) \qquad (3-9)$$

式（3−8）を満たす $\xi_i(i=1,\ 2,\ 3)$ は，次式のように書き表わすことができる。

$$\xi_i=\sum_{k=1}^{3}\{\cos(x_3\beta_k)A_i(k)+\beta_k{}^{-1}\sin(x_3\beta_k)B_i(k)\}.\ (i=1,2,3) \qquad (3-10)$$

ここで $A_i(k)$，$B_i(k)$ は $x_1$，$x_2$ の関数であり，$\cos(x_3\beta_k)$ と $\sin(x_3\beta_k)$ は，次式で定義される演算子である。

$$\begin{cases} \cos(x_3\beta_k)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\dfrac{x_3{}^{2r}}{(2r)!}\beta_k{}^{2r},\ (k=1,2,3) \\ \sin(x_3\beta_k)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\dfrac{x_3{}^{2r+1}}{(2r+1)!}\beta_k{}^{2r+1}.\ (k=1,2,3) \end{cases} \qquad (3-11)$$

式（3−11）を使って，式（3−10）の右辺を $x_3$ のベキ級数に展開し，式（3−4）と比較すれば次の関係式が得られる。

$$\begin{cases} u_{2r}=(-1)^r\sum_{k=1}^{3}\beta_k^{2r}A_1(k),\ v_{2r}=(-1)^r\sum_{k=1}^{3}\beta_k^{2r}A_2(k),\ w_{2r}=(-1)^r\sum_{k=1}^{3}\beta_k^{2r}A_3(k), \\ u_{2r+1}=(-1)^r\sum_{k=1}^{3}\beta_k^{2r}B_1(k),\ v_{2r+1}=(-1)^r\sum_{k=1}^{3}\beta_k^{2r}B_2(k),\ w_{2r+1}=(-1)^r\sum_{k=1}^{3}\beta_k^{2r}B_3(k) \end{cases} \qquad (3-12)$$

$$(r=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

式（3−6），（3−7）および（3−12）から，$A_i(k)$，$B_i(k)(i,\ k=1,\ 2,\ 3)$ は $u_j$，$v_j$，$w_j$（$j=0,\ 1$）を使って次のように表わされることが分かる。

$$\begin{bmatrix} A_1(k) \\ A_2(k) \\ B_3(k) \end{bmatrix}=\mathscr{D}_k{}^{-1}\begin{bmatrix} \Phi_{11}(k), \Phi_{12}(k), \Phi_{13}(k) \\ \Phi_{21}(k), \Phi_{22}(k), \Phi_{23}(k) \\ \Phi_{31}(k), \Phi_{32}(k), \Phi_{33}(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_1 \end{bmatrix},\ (k=1,2,3) \qquad (3-13)$$

$$\begin{bmatrix} B_1(k) \\ B_2(k) \\ A_3(k) \end{bmatrix}=\mathscr{D}_k{}^{-1}\begin{bmatrix} \Psi_{11}(k), \Psi_{12}(k), \Psi_{13}(k) \\ \Psi_{21}(k), \Psi_{22}(k), \Psi_{23}(k) \\ \Psi_{31}(k), \Psi_{32}(k), \Psi_{33}(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_0 \end{bmatrix}.\ (k=1,2,3) \qquad (3-14)$$

ここで，

$$\mathscr{D}_1=(\beta_1{}^2-\beta_2{}^2)(\beta_1{}^2-\beta_3{}^2),\ \mathscr{D}_2=(\beta_2{}^2-\beta_1{}^2)(\beta_2{}^2-\beta_3{}^2),\ \mathscr{D}_3=(\beta_3{}^2-\beta_1{}^2)(\beta_3{}^2-\beta_2{}^2),$$

$$\Phi_{ij}(k)=\mathscr{E}_k\delta_{ij}+\mathscr{F}_k\phi_{ij}(1)+\phi_{ij}(2),\ \Psi_{ij}(k)=\mathscr{E}_k\delta_{ij}+\mathscr{F}_k\psi_{ij}(1)+\psi_{ij}(2),$$

$$\mathcal{E}_1=\beta_2{}^2\beta_3{}^2,\ \mathcal{E}_2=\beta_1{}^2\beta_3{}^2,\ \mathcal{E}_3=\beta_1{}^2\beta_2{}^2,\ \mathcal{Q}_1=\beta_2{}^2+\beta_3{}^2,\ \mathcal{Q}_2=\beta_1{}^2+\beta_3{}^2,\ \mathcal{Q}_3=\beta_1{}^2+\beta_2{}^2,$$
$$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3)$$

とおいた。

以上から，弾性板の変形は6つの未知関数 $u_i(x_1,\ x_2)$，$v_i(x_1,\ x_2)$，$w_i(x_1,\ x_2)\ (i=0,\ 1)$ によって決定されることが分った。これらの未知関数に対する方程式，すなわち板の変形を支配する方程式は，板の上面および下面での境界条件から導かれる。

## 4. 板の上，下面での境界条件と板の基礎方程式

板の上面および下面に作用する外力の成分（単位面積当り）を $X_+$，$Y_+$，$Z_+$ および $X_-$，$Y_-$，$Z_-$ とすれば，板の上，下面での境界条件は，

$$x_3=\pm\frac{h}{2}\ \text{で},\ X_{\pm}=\sigma_{31},\ Y_{\pm}=\sigma_{32},\ Z_{\pm}=\sigma_{33}, \tag{4-1}$$

と書ける。式（3－1）と式（3－10）を使って式（4－1）を整理すれば，次の2組の方程式が得られる。

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{3}\cos\left(\frac{h}{2}\beta_k\right)\{B_1(k)+\alpha_1A_3(k)\}=\frac{a_{55}}{A}\frac{X_++X_-}{2}-\frac{a_{56}}{A}\frac{Y_++Y_-}{2},\\
&\sum_{k=1}^{3}\cos\left(\frac{h}{2}\beta_k\right)\{B_2(k)+\alpha_2A_3(k)\}=\frac{a_{66}}{A}\frac{Y_++Y_-}{2}-\frac{a_{56}}{A}\frac{X_++X_-}{2},\\
&\sum_{k=1}^{3}\beta_k{}^{-2}\left\{\frac{h}{2}\cos\left(\frac{h}{2}\beta_k\right)-\beta_k{}^{-1}\sin\left(\frac{h}{2}\beta_k\right)\right\}\{\mathcal{L}_UB_1(k)+\mathcal{L}_VB_2(k)+\mathcal{L}_WA_3(k)\}=\\
&\qquad=\frac{h}{2}\left(\alpha_1\frac{X_++X_-}{2}+\alpha_2\frac{Y_++Y_-}{2}\right)+\frac{Z_+-Z_-}{2},
\end{aligned}\right. \tag{4-2}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{3}\beta_k{}^{-1}\sin\left(\frac{h}{2}\beta_k\right)\{\mathcal{L}_A{}^2A_1(k)+\mathcal{L}_B{}^2A_2(k)+\mathcal{L}_HB_3(k)\}=\frac{X_--X_+}{2},\\
&\sum_{k=1}^{3}\beta_k{}^{-1}\sin\left(\frac{h}{2}\beta_k\right)\{\mathcal{L}_B{}^2A_1(k)+\mathcal{L}_C{}^2A_2(k)+\mathcal{L}_JB_3(k)\}=\frac{Y_--Y_+}{2},\\
&\sum_{k=1}^{3}\cos\left(\frac{h}{2}\beta_k\right)\{\mathcal{L}_HA_1(k)+\mathcal{L}_JA_2(k)+a_{33}B_3(k)\}=\frac{Z_++Z_-}{2}.
\end{aligned}\right. \tag{4-3}$$

ここで，

$$\mathcal{L}_U=\left(\frac{\mathcal{L}_D}{a_{33}}\mathcal{L}_H-\mathcal{L}_A^2\right)\alpha_1+\left(\frac{\mathcal{L}_D}{a_{33}}\mathcal{L}_J-\mathcal{L}_B^2\right)\alpha_2,\ \mathcal{L}_V=\left(\frac{\mathcal{L}_E}{a_{33}}\mathcal{L}_H-\mathcal{L}_B^2\right)\alpha_1+\left(\frac{\mathcal{L}_E}{a_{33}}\mathcal{L}_J-\mathcal{L}_C^2\right)\alpha_2,$$

$$\mathcal{L}_W=\frac{\mathcal{L}_F^2}{a_{33}}\left(\mathcal{L}_H\alpha_1+\mathcal{L}_J\alpha_2\right),$$

とおいた。

式（4－2），（4－3）の左辺を式（3－11）を使って$h$のベキ級数に展開し，さらに式(3－12)を使えば，式（4－2），（4－3）は次のように書き表わすことができる。

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2r}\{u_{2r+1}+\alpha_1 w_{2r}\}=\frac{1}{2A}\{a_{55}(X_+ + X_-)-a_{56}(Y_+ + Y_-)\},\\
&\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\ }{(2r)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2r}\{v_{2r+1}+\alpha_2 w_{2r}\}=\frac{1}{2A}\{a_{66}(Y_+ + Y_-)-a_{56}(X_+ + X_-)\},\\
&\frac{h^3}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{r+1}{(2r+3)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2r}\{\mathscr{L}_{\mathrm{U}}u_{2r+1}+\mathscr{L}_{\mathrm{V}}v_{2r+1}+\mathscr{L}_{\mathrm{W}}w_{2r}\}=\frac{h}{2}\{\alpha_1(X_+ + X_-)+\\
&\qquad +\alpha_2(Y_+ + Y_-)\}+Z_+ - Z_-,
\end{aligned}
\right.
\tag{4-4}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&h\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2r}\{\mathscr{L}_{\mathrm{A}}^2 u_{2r}+\mathscr{L}_{\mathrm{B}}^2 v_{2r}+\mathscr{L}_{\mathrm{H}} w_{2r+1}\}=X_- - X_+,\\
&h\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2r}\{\mathscr{L}_{\mathrm{B}}^2 u_{2r}+\mathscr{L}_{\mathrm{C}}^2 v_{2r}+\mathscr{L}_{\mathrm{J}} w_{2r+1}\}=Y_- - Y_+,\\
&\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2r}\{\mathscr{L}_{\mathrm{H}}u_{2r}+\mathscr{L}_{\mathrm{J}}v_{2r}+a_{33}w_{2r+1}\}=\frac{Z_+ + Z_-}{2}.
\end{aligned}
\right.
\tag{4-5}
$$

式（4－2）と（4－3）あるいは，式（4－4）と（4－5）が板の変形を支配する基礎方程式である。ただし，$A_i(k)$，$B_i(k)$（$i$，$k$＝１，２，３）は式（3－13），（3－14）によって，$u_r$，$v_r$，$w_r$（$r$＝２，３，…）は式（3－6），（3－７）によってそれぞれ $u_i$，$v_i$，$w_i$（$i$＝０，１）で表わされる。

板の変形に対する近似方程式は，式（4－4），（4－5）の展開を適当な項で打切ることによって得られる。すなわち，展開を最初の n＋１項で近似すれば板の変形に対する第 n 近似の方程式が得られる。一例として，上面で圧縮荷重$-p$を受ける板を考える。この場合の曲げ変形に対する第０近似式は，式（4－4）の右辺に$X_\pm = Y_\pm = Z_+ = 0$，$Z_- = -p$を代入し，左辺を展開の第１項のみで近似することによって，次のように得られる。

$$u_1=-\alpha_1 w_0=-\frac{\partial}{\partial x_1}w_0, \tag{4-6}$$

$$v_1=-\alpha_2 w_0=-\frac{\partial}{\partial x_2}w_0, \tag{4-7}$$

$$\frac{h^3}{12}\{\mathscr{L}_{\mathrm{U}}u_1+\mathscr{L}_{\mathrm{V}}v_1+\mathscr{L}_{\mathrm{W}}w_0\}=p. \tag{4-8}$$

式（4－6），（4－7）の$u_1$，$v_1$を式（4－8）に代入して整理すれば次式を得る。

$$(D_1\alpha_1^4+4D_2\alpha_1^3\alpha_2+2D_3\alpha_1^2\alpha_2^2+4D_4\alpha_1\alpha_2^3+D_5\alpha_2^4)w_0=p. \tag{4-9}$$

ここで，

$$D_1=\frac{h^3}{12}\cdot\frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{a_{33}},\quad D_2=\frac{h^3}{12}\cdot\frac{a_{33}a_{14}-a_{13}a_{34}}{a_{33}},$$

$$D_3=\frac{h^3}{12}\cdot\frac{a_{33}(a_{12}+2a_{44})-a_{13}a_{23}-2a_{34}{}^2}{a_{33}},$$

$$D_4=\frac{h^3}{12}\cdot\frac{a_{33}a_{24}-a_{23}a_{34}}{a_{33}},\quad D_5=\frac{h^3}{12}\cdot\frac{a_{22}a_{33}-a_{23}{}^2}{a_{33}},$$

とおいた。式（4－9）は板の曲げ変形に関する第０近似方程式であり，この式は通常の薄板理論による異方性板の曲げ変形の方程式に他ならない。また，式（4－6）と（4－7）は薄板理論で仮定される関係式である。

## 5. 対称性の良い材料に対する関係式

これまでに述べてきた方法を，より対称性の良い材料に対して適用する場合には，独立な弾性定数の数が減少するので，関係式が簡単になる。ここでは，直交異方性の場合，横等方性（直交異方性でさらに弾性対称軸をもつ場合）で弾性対称軸が $x_3$ 軸に垂直な場合，横等方性で弾性対称軸が $x_3$ 軸に平行な場合，および等方性の場合について考察する。

### 5.1 直交異方性の場合

直交異方性の場合には，異方性の軸と座標軸を一致させたきの弾性定数を $a'_{ij}$ とすれば，独立な弾性定数は $a'_{11}$，$a'_{12}$，$a'_{13}$，$a'_{22}$，$a'_{23}$，$a'_{33}$，$a'_{44}$，$a'_{55}$，$a'_{66}$，の９個であり，残りは０である。しかし，座標系を$x_3$軸の回りに $\theta$ だけ回転した場合，応力―ひずみ関係式はやはり式（3－1）で表わされる。ただし，この場合の定数 $a_{ij}$ は，$l=\cos\theta$，$m=\sin\theta$ として，$a'_{ij}$ を使って次のように書くことができる。

$$a_{11}=\ell^4a'_{11}+2\ell^2m^2(a'_{12}+2a'_{44})+m^4a'_{22},\ a_{22}=\ell^4a'_{22}+2\ell^2m^2(a'_{12}+2a'_{44})+m^4a'_{11},\ a_{33}=a'_{33},$$
$$a_{12}=(\ell^4+m^4)a'_{12}+\ell^2m^2(a'_{11}+a'_{22}-4a'_{44}),\ a_{13}=\ell^2a'_{13}+m^2a'_{23},$$
$$a_{14}=\ell m\{m^2a'_{22}-\ell^2a'_{11}+(\ell^2-m^2)(a'_{12}+2a'_{44})\},\ a_{23}=\ell^2a'_{23}+m^2a'_{13},$$
$$a_{24}=\ell m\{\ell^2a'_{22}-m^2a'_{11}+(m^2-\ell^2)(a'_{12}+2a'_{44})\},\ a_{34}=\ell m(a'_{23}-a'_{13}),$$
$$a_{14}=(\ell^2-m^2)^2a'_{44}+\ell^2m^2(a'_{11}+a'_{22}-2a'_{12}),\ a_{55}=\ell^2a'_{55}+m^2a'_{66},$$
$$a_{66}=\ell^2a'_{66}+m^2a'_{55},\ a_{56}=\ell m(a'_{55}-a'_{66}).$$

### 5.2 横等方性で対称軸が $x_3$ 軸に垂直な場合

対称軸が $x_1$ 軸と一致している場合，弾性定数は，$a'_{11}$，$a'_{22}=a'_{33}$，$a'_{12}=a'_{13}$，$a'_{55}=(a'_{22}-a'_{23})/2$，$a'_{44}=a'_{66}$ の５個となる。直交異方性の場合と同様に座標系を $x_3$ 軸の回りに $\theta$ だけ回転したときの応力―ひずみ関係式は，式（3－1）で表わされる。この場合の定数 $a_{ij}$ は直交異方性の場合の定数に上の $a'_{ij}$ についての関係式を代入すれば直ちに得られる。

さらにこの場合，式（3－9）を満たす演算子は次のように書き表わされる。

$$\beta_k{}^2=(c_k\gamma_1{}^2+\gamma_2{}^2).\ (k=1,2,3) \tag{5-1}$$

ここで，$\gamma_1=(l\alpha_1-m\alpha_2)$，$\gamma_2=(m\alpha_1+l\alpha_2)$ であり，$c_k$ は次式で与えられる。

$$c_1=\frac{2a'_{44}}{a'_{22}-a'_{23}},\ c_2+c_3=\frac{a'_{11}a'_{22}-a'_{12}(a'_{12}+2a'_{44})}{a'_{22}a'_{44}},\ c_2c_3=\frac{a'_{11}}{a'_{22}}. \tag{5-2}$$

### 5.3 横等方性で対称軸が $x_3$ 軸に平行な場合

この場合の応力―ひずみ関係式は，座標系の $x_3$ 軸回りの回転に対して不変である。独立な弾性定数は式（3−1）において，$a_{11}=a_{22}$，$a_{13}=a_{23}$，$a_{33}$，$a_{44}=(a_{11}-a_{12})/2$，$a_{55}=a_{66}$ の５個で他の定数はすべて０である。式（3−9）を満たす演算子 $\beta_k$ は次のように書き表わされる。

$$\beta_k{}^2 = c_k\alpha^2. \quad (k=1,2,3) \tag{5-3}$$

ここで，$\alpha^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2$ であり，$c_k(k=1,\ 2,\ 3)$ は，

$$c_1=\frac{a_{11}-a_{12}}{2a_{55}}, \quad c_2+c_3=\frac{a_{11}a_{33}-a_{13}(a_{13}+2a_{55})}{a_{33}a_{55}}, \quad c_2c_3=\frac{a_{11}}{a_{33}}, \tag{5-4}$$

で与えられる。

式（3−10）の変位成分は，$u_i$，$v_i$，$w_i(i=0,\ 1)$ を使って次のように書き表わすことができる。

$$\xi_1=\alpha^{-2}(\alpha_1\Xi+\alpha_2\Omega), \tag{5-5}$$

$$\xi_2=\alpha^{-2}(\alpha_2\Xi-\alpha_1\Omega), \tag{5-6}$$

$$\begin{aligned}\xi_3=\frac{1}{c_2-c_3}\Bigg[&\left\{\left(\frac{a_{55}}{a_{33}}-c_3\right)\cos(x_3\beta_2)-\left(\frac{a_{55}}{a_{33}}-c_2\right)\cos(x_3\beta_3)\right\}w_0+\frac{a_{13}+a_{55}}{a_{33}}\alpha^{-2}\{\cos(x_3\beta_2)-\\&-\cos(x_3\beta_3)\}\,\Xi_1-\left\{\left(\frac{a_{11}}{a_{55}}-c_2\right)\beta_2^{-1}\sin(x_3\beta_2)-\left(\frac{a_{11}}{a_{55}}-c_3\right)\beta_3^{-1}\sin(x_3\beta_3)\right\}w_1-\\&-\frac{a_{11}(a_{13}+a_{55})}{a_{33}a_{55}}\{\beta_2^{-1}\sin(x_3\beta_2)-\beta_3^{-1}\sin(x_3\beta_3)\}\,\Xi_0\Bigg].\end{aligned} \tag{5-7}$$

ここで

$$\Omega=\cos(x_3\beta_1)\,\Omega_0+\beta_1{}^{-1}\sin(x_3\beta_1)\,\Omega_1, \tag{5-8}$$

$$\begin{aligned}\Xi=\frac{1}{c_2+c_3}\Bigg[&\left\{\left(\frac{a_{11}}{a_{55}}-c_3\right)\cos(x_3\beta_2)-\left(\frac{a_{11}}{a_{55}}-c_2\right)\cos(x_3\beta_3)\right\}\Xi_0+\frac{a_{13}+a_{55}}{a_{55}}\{\cos(x_3\beta_2)-\\&-\cos(x_3\beta_3)\}w_1-\left\{\left(\frac{a_{55}}{a_{33}}-c_2\right)\beta_2^{-1}\sin(x_3\beta_2)-\left(\frac{a_{55}}{a_{33}}-c_3\right)\beta_3^{-1}\sin(x_3\beta_3)\right\}\Xi_1-\\&-\frac{a_{13}+a_{55}}{a_{33}}\alpha^2\{\beta_2^{-1}\sin(x_3\beta_2)-\beta_3^{-1}\sin(x_3\beta_3)\}w_0\Bigg],\end{aligned} \tag{5-9}$$

であり，$\Omega_i$，$\Xi_i(i=0,\ 1)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\Omega_i&=\alpha_2u_i-\alpha_1v_i, \quad (i=0,1)\\ \Xi_i&=\alpha_1u_i+\alpha_2v_i. \quad (i=0,1)\end{aligned} \tag{5-10}$$

板の変形に対する基礎方程式は，式（4−2），（4−3）から次のように書くことができる。

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{h}{2}\beta_1\right)\Omega_1=\frac{1}{2a_{55}}\{\alpha_2(X_++X_-)-\alpha_1(Y_++Y_-)\},\\
&\frac{1}{c_2-c_3}\left[\left\{\left(\frac{a_{13}}{a_{33}}+c_2\right)\cos\left(\frac{h}{2}\beta_2\right)-\left(\frac{a_{13}}{a_{33}}+c_3\right)\cos\left(\frac{h}{2}\beta_3\right)\right\}\Xi_1-\right.\\
&\qquad\left.-\left\{\left(\frac{a_{13}}{a_{33}}+c_3\right)\cos\left(\frac{h}{2}\beta_2\right)-\left(\frac{a_{13}}{a_{33}}+c_2\right)\cos\left(\frac{h}{2}\beta_3\right)\right\}\alpha^2 w_0\right]=\\
&\qquad=\frac{1}{2a_{55}}\{\alpha_1(X_++X_-)+\alpha_2(Y_++Y_-)\},\\
&\frac{3a_{33}a_{55}}{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}\,\frac{1}{c_2-c_3}\left(\frac{h}{2}\right)^{-2}\left[\left\{\left(\frac{a_{13}}{a_{33}}+c_3\right)H\left(\frac{h}{2}\beta_2\right)-\left(\frac{a_{13}}{a_{33}}+c_2\right)H\left(\frac{h}{2}\beta_3\right)\right\}\alpha^2 w_0-\right.\\
&\qquad\left.-\left\{\left(\frac{a_{13}}{a_{33}}+c_2\right)H\left(\frac{h}{2}\beta_2\right)-\left(\frac{a_{13}}{a_{33}}+c_3\right)H\left(\frac{h}{2}\beta_3\right)\right\}\Xi_1\right]=\\
&\qquad=\frac{1}{D}\Big[(Z_+-Z_-)+h\{\alpha_1(X_++X_-)+\alpha_2(Y_++Y_-)\}\Big],
\end{aligned}
\right.
\tag{5-11}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\beta_1\sin\left(\frac{h}{2}\beta_1\right)\Omega_0=\frac{1}{2a_{55}}\{-\alpha_1(Y_+-Y_-)+\alpha_2(X_+-X_-)\},\\
&\frac{1}{c_2-c_3}\alpha^2\left[\left\{\left(\frac{a_{13}}{a_{33}}+c_2\right)\beta_2^{-1}\sin\left(\frac{h}{2}\beta_2\right)-\left(\frac{a_{13}}{a_{33}}+c_3\right)\beta_3^{-1}\sin\left(\frac{h}{2}\beta_3\right)\right\}\Xi_0+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{a_{13}}{a_{11}}\left\{\left(\frac{a_{11}}{a_{33}}+c_2\right)\beta_2^{-1}\sin\left(\frac{h}{2}\beta_2\right)-\left(\frac{a_{11}}{a_{33}}+c_3\right)\beta_3^{-1}\sin\left(\frac{h}{2}\beta_3\right)\right\}w_1\right]=\\
&\qquad=\frac{-1}{2a_{11}}\{\alpha_1(X_+-X_-)+\alpha_2(Y_+-Y_-)\},\\
&\frac{1}{c_2-c_3}\left[\left\{\left(\frac{a_{13}}{a_{33}}+c_3\right)\cos\left(\frac{h}{2}\beta_2\right)-\left(\frac{a_{13}}{a_{33}}+c_2\right)\cos\left(\frac{h}{2}\beta_3\right)\right\}w_1+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{a_{13}}{a_{33}}\left\{\left(\frac{a_{11}}{a_{13}}+c_3\right)\cos\left(\frac{h}{2}\beta_2\right)-\left(\frac{a_{11}}{a_{13}}+c_2\right)\cos\left(\frac{h}{2}\beta_3\right)\right\}\Xi_0\right]=\frac{-1}{2a_{33}}(Z_++Z_-).
\end{aligned}
\right.
\tag{5-12}
$$

ただし，

$$
\left\{
\begin{aligned}
&D=\frac{1}{12}\left(a_{11}-\frac{a_{13}^2}{a_{33}}\right)h^3,\\
&H(x)=x^{-1}\sin(x)-\cos(x),
\end{aligned}
\right.
\tag{5-13}
$$

とおいた。

### 5.4　等方性の場合

材料が等方性の場合には，独立な弾性定数は2個で，式（3−1）の定数は Lamé 定数 $\lambda$，$\mu$ を用いて，次のように表わされる。すなわち，　$a_{11}=a_{22}=a_{33}=\lambda+2\mu$，$a_{12}=a_{23}=a_{13}=\lambda$，$a_{44}=a_{55}=a_{66}=\mu$ であり他の定数はすべて0である。

式 (3−9) を満たす $\beta_k{}^2$ は,

$$\beta_k{}^2=\alpha^2=\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2,\ (k=1,2,3) \tag{5-14}$$

で与えられる。この場合は, 式 (3−10), (3−13), (3−14) で $\beta_k^2=\alpha^2+\varepsilon_k^2(k=1,2,3)$ とおき, $\varepsilon_k\to 0$ なる極限操作を行えば変位成分が次のように書き表わされることが分る。

$$\xi_1=\cos(x_3\alpha)\left\{u_0+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x_3\alpha^{-2}\alpha_1\Theta_1\right\}+\alpha^{-1}\sin(x_3\alpha)\left\{u_1-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\alpha^{-2}\Theta_1+x_3\Theta_0)\right\}, \tag{5-15}$$

$$\xi_2=\cos(x_3\alpha)\left\{v_0+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x_3\alpha^{-2}\alpha_2\Theta_1\right\}+\alpha^{-1}\sin(x_3\alpha)\left\{v_1-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\alpha_2(\alpha^{-2}\Theta_1+x_3\Theta_0)\right\}, \tag{5-16}$$

$$\xi_3=\cos(x_3\alpha)\left\{w_0-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}x_3\Theta_0\right\}+\alpha^{-1}\sin(x_3\alpha)\left\{w_1+\frac{\lambda+\mu}{2\mu}(\Theta_0-x_3\Theta_1)\right\}. \tag{5-17}$$

ここで, $\Theta_0$, $\Theta_1$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\Theta_0&=\alpha_1u_0+\alpha_2v_0+w_1,\\ \Theta_1&=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}(\alpha_1u_1+\alpha_2v_1-\alpha^2w_0).\end{aligned} \tag{5-18}$$

板の変形に対する基礎方程式は次のように書き表わすことができる。

$$\left\{\begin{aligned}&\cos\left(\frac{h}{2}\alpha\right)\Omega_1=\frac{1}{2\mu}\{\alpha_2(X_++X_-)-\alpha_1(Y_++Y_-)\},\\ &2\alpha^2\cos\left(\frac{h}{2}\alpha\right)w_0+\left\{\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\cos\left(\frac{h}{2}\alpha\right)-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{h}{2}\alpha\sin\left(\frac{h}{2}\alpha\right)\right\}\Theta_1=\\ &\qquad=\frac{1}{2\mu}\{\alpha_1(X_++X_-)+\alpha_2(Y_++Y_-)\},\\ &\frac{3}{8}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}D\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{-2}H\left(\frac{h}{2}\alpha\right)\{2\alpha^2w_0+\Theta_1\}+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\alpha^2\left(\frac{h}{2}\alpha\right)^{-1}\sin\left(\frac{h}{2}\alpha\right)\Theta_1\right]=\\ &\qquad=-\left[Z_++Z_-+\frac{h}{2}\{\alpha_1(X_++X_-)+\alpha_2(Y_++Y_-)\}\right],\end{aligned}\right. \tag{5-19}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\alpha\sin\left(\frac{h}{2}\alpha\right)\Omega_0=\frac{1}{2\mu}\{\alpha_1(Y_+-Y_-)-\alpha_2(X_+-X_-)\},\\ &2\alpha\sin\left(\frac{h}{2}\alpha\right)w_1=-\frac{h}{2}\alpha^2\left\{\frac{\lambda+\mu}{\mu}\cos\left(\frac{h}{2}\alpha\right)+\left(\frac{h}{2}\alpha\right)^{-1}\sin\left(\frac{h}{2}\alpha\right)\right\}\Theta_0=\\ &\qquad=\frac{1}{2\mu}\{\alpha_1(X_+-X_-)+\alpha_2(Y_+-Y_-)\},\\ &2\cos\left(\frac{h}{2}\alpha\right)w_1+\left\{\frac{\lambda}{\mu}\cos\left(\frac{h}{2}\alpha\right)+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{h}{2}\alpha\sin\left(\frac{h}{2}\alpha\right)\right\}\Theta_0=\frac{1}{2\mu}(Z_++Z_-).\end{aligned}\right. \tag{5-20}$$

ここで

$$\Omega_i = \alpha_2 u_i - \alpha_1 v_i \text{ , } (i = 0 \text{ , } 1)$$

とおいた。近似方程式は，上式を $h$ のベキ級数に展開することによって，あるいは，式 (4−4)，(4−5) に式 (3−6)，(3−7) を使うことによって容易に求めることができる。

## 6.　積層板への応用

上に述べてきた均質な板の変形に対する議論は，複合材料としての積層板に対しても適用できる。均質な板の場合と同様に，積層板の中央面に $x_1$，$x_2$ 軸をとり $x_3$ 軸はこれに垂直に下向きを正にとる。積層板を構成している各層（総数 $N$）に上の層から順に番号を付け，$s$ 番目の層の厚さを $h_s$ とし，次のような局部座標系 ($\overset{(s)}{x}_1$, $\overset{(s)}{x}_2$, $\overset{(s)}{x}_3$) をとる。すなわち，上から $s$ 番目の層に対して $\overset{(s)}{x}_3$ 軸は $x_3$ 軸と一致させ，層の中央面上に $\overset{(s)}{x}_1$，$\overset{(s)}{x}_2$ 軸を $x_1$，$x_2$ 軸に平行にとる。$s$ 番目の層に関する量に，$\overset{(s)}{a}_{ij}$，$\overset{(s)}{\xi}_i$ のように添字 ($s$) をつけ局部座標系を使えば，積層板を構成している各層に対して，3章で求めた基礎方程式がそのまま成立する。

積層板の上面および下面での境界条件を均質な板の場合と同様にとれば，次の条件式が得られる。

$$\left\{\begin{aligned} &X_+ = \overset{(1)}{\sigma}_{31}\left(x_1,\ x_2,\ -\frac{h_1}{2}\right),\ Y_+ = \overset{(1)}{\sigma}_{32}\left(x_1,\ x_2,\ -\frac{h_1}{2}\right),\ Z_+ = \overset{(1)}{\sigma}_{33}\left(x_1,\ x_2,\ -\frac{h_1}{2}\right), \\ &X_- = \overset{(N)}{\sigma}_{31}\left(x_1,\ x_2,\ \frac{h_N}{2}\right),\ Y_- = \overset{(N)}{\sigma}_{32}\left(x_1,\ x_2,\ \frac{h_N}{2}\right),\ Z_- = \overset{(N)}{\sigma}_{33}\left(x_1,\ x_2,\ \frac{h_N}{2}\right). \end{aligned}\right. \tag{6−1}$$

積層板の場合は，さらに内部の層の境界面で変位 ($\xi_i$) と応力 ($\sigma_{3i}$) が連続でなければならない。したがって，次の条件式が得られる。

$$\left\{\begin{aligned} &\overset{(s)}{\xi}_i\left(x_1,\ x_2,\ \frac{h_s}{2}\right) = \overset{(s+1)}{\xi}_i\left(x_1,\ x_2,\ -\frac{h_{s+1}}{2}\right),\ (i=1,\ 2,\ 3;\ s=1\sim N-1) \\ &\overset{(s)}{\sigma}_{3i}\left(x_1,\ x_2,\ \frac{h_s}{2}\right) = \overset{(s+1)}{\sigma}_{3i}\left(x_1,\ x_2,\ -\frac{h_{s+1}}{2}\right),\ (i=1,\ 2,\ 3;\ s=1\sim N-1) \end{aligned}\right. \tag{6−2}$$

$6N$ ケの未知関数 $\overset{(s)}{u}_i$，$\overset{(s)}{v}_i$，$\overset{(s)}{w}_i$ ($i=0$，$1$；$s=1\sim N$) についての上記 $6N$ 本の方程式が，積層板の変形を支配する基礎方程式を与える。

積層板に対する近似方程式は，式 (6−1) の右辺および式 (6−2) の両辺を式 (3−11) を使って $h$ のベキ級数に展開し，さらに式 (3−12) を使って $\overset{(s)}{A}_i(k)$，$\overset{(s)}{B}_i(k)$ を $\overset{(s)}{u}_n$，$\overset{(s)}{v}_n$，$\overset{(s)}{w}_n$ で表わし，展開を $h$ の適当な次数の項で打切ることによって得ることができる。

## 7.　結　　　　言

変位成分を板厚方向の座標のベキ級数に展開し，弾性体のつり合い方程式と板の表面での境界条件を使って，任意の厚さをもつ均質な異方性板の変形に対する基礎方程式を導出した。これら

の基礎方程式を板厚のベキ級数に展開した形で書き表わし，展開を適当な次数の項で打ち切ることによって，板の変形に対する任意の精度の近似方程式を組織的に得る方法を提出した。

均質な異方性板の変形を解析する上記の手法を，複合材料である積層板の場合に応用し，積層板の外表面および内部接合面での境界条件を考慮して，積層板の変形を支配する基礎方程式を導き，変形に対する任意の精度の近似方程式が得られることを示した。

## 参 考 文 献


1) Reissner, E.: J. Appl. Mech. **12** (1945), A69-77.
2) Essenburg, F.: J. Appl. Mech. **42** (1975), 127-132.
3) Lo, K. H., Christensen, R. M, Wu, E. M.: J. Appl. Mech. **44** (1977), 663-668.
4) アンバルツミヤン（神谷紀生訳）：異方弾性板の理論（1975），1-173，森北出版.
5) 平島健一，村松正重：土木学会論文報告集，第304号（1980），33-46.
6) Lo, K. H., Christensen, R. M., Wu, E. M.: J. Appl. Mech. **44** (1977), 669-676.
7) Vlasov, V. Z.: Proc. 9th Int. Cong. Appl. Mech., Brussels (1957), 321-330.
8) Igarashi, S., Miyauchi, A., Takizawa, É. I., Nishimura, T.: Memo. Fac. Engng., Hokkaidô Univ. XV (1980) 357-366.
9) 五十嵐悟，渋川勝久：精機学会昭和58年度北海道支部学術講演論文集（1983），16-18.