



Title	Variational System Theoryの構成
Author(s)	島, 公脩; Shima, Masasuke
Citation	北海道大學工學部研究報告, 120, 109-119
Issue Date	1984-03-30
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41861">https://hdl.handle.net/2115/41861</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	120_109-120.pdf



## Variational System Theory の構成

島 公 脩

(昭和58年11月30日受理)

### On the Framework of Variational System Theory

Masasuke SHIMA

(Received November 30, 1983)

#### Abstract

In this paper, we present a framework of nonlinear system theory based on the variational methods. We treat the nonlinear systems with  $C^\infty$ -structures and inputs appearing linearly, which are found in various fields of engineering, medicine, ecology, economics and science.

Basic tools are the variational formulas  $\Delta J(t) = \delta J(t) + \delta^2 J(t) + R$  of a functional  $J(t) = F(x(t))$  corresponding to the input variation  $\delta u(t)$  and the state trajectory  $x(t)$ . Utilizing these formulas and the approach developed by L.I. Rozonoër, we can derive many important properties of vector fields associated with the system dynamics, among which are a series of necessary and sufficient conditions of Complete Invariance and Output Controllability. Together with the conditions of Stability and Functional Independence, various notions and procedures of structural analysis and design are shown to be reduced to combinations of these basic principles.

It is well known that the optimal control theory can be studied via variational method. The possibilities of applications of variational approach are discussed in the studies of local properties of control system and identification problems, with which almost all aspects of system theory are included in the scope of our framework.

#### 1. 緒 言

入力あるいはパラメータについて線形である非線形常微分方程式によって記述される制御系の構造解析・設計・制御に関する研究は、1970年代に微分幾何学の理論を用いてすすめられた<sup>1)</sup>。その結果、線形定係数制御系の理論において得られた成果のうち、かなりの部分が上記の非線形系に対して拡張され、現在は入力に対する線形性を仮定しない、より一般的な場合の理論が展開されつつある<sup>2)</sup>。

しかしながら、それらの膨大な研究の多くは難解であり、少くとも一般の技術者がよく理解して応用することは、現段階では不可能に近いであろう。一方、入力について線形である非線形系は、多関節ロボット、原子炉、化学反応工学、生態系、数理経済学、などの広い分野に現われる。情報処理技術の急速な進歩により、まだ計算速度による制限はあるけれども、非線形演算のアル

ゴリズムを Real Time で用いることが可能となった。したがって、そのような非線形系の解析・設計・制御に関するわかりやすく、応用に便利な理論をつくることは、有益かつ重要な課題であろう。そこで、本稿では、系の状態量  $x$  の「汎関数」 $J=F(x)$  の挙動を、変分学の方法を用いてしらべることにより、系の構造解析・設計および最適制御の理論を統一的に扱う、著者の一連の研究の基本的な考え方・得られた成果および展望について述べ、非線形システム論のひとつの枠組みを提案する<sup>3-10)</sup>。

## 2. 系の記述と変分の計算

### 2.1 系の記述

系の状態量を  $x = \text{col}(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ , 系への入力あるいは系のパラメータを  $u = \text{col}(u^1, \dots, u^r) \in \mathbb{R}^r$ , 系よりの出力を  $y = \text{col}(y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m$  とする。col. は列ベクトルを表わし、 $\mathbb{R}^s$  ( $s = n, r, m$ ) は  $s$  次元ユークリッド空間である。系の挙動は

$$\dot{x}^i = f^i(x) + \sum_{j=1}^r g_j^i(x) u^j(t), \quad i = 1, \dots, n \quad \text{または} \quad \dot{x} = f(x) + G(x)u(t) \quad (1)_1$$

$$y^k = h^k(x), \quad k = 1, \dots, m \quad \text{または} \quad y = h(x) \quad (1)_2$$

により記述され、 $x$  の関数はすべて  $C^\infty$  級であるものとする。なお、(1)式において、

$$g_0(x) \triangleq f(x) \triangleq \text{col}(f^1(x), \dots, f^n(x)); \quad g_j(x) \triangleq \text{col}(g_j^1(x), \dots, g_j^n(x)), \\ j = 1, \dots, r; \quad (2)$$

$$G(x) \triangleq (g_1(x), \dots, g_r(x)); \quad h(x) \triangleq \text{col}(h^1(x), \dots, h^m(x));$$

$$\|x\| \triangleq |x^1| + \dots + |x^n|, \quad \|u\| \triangleq |u^1| + \dots + |u^r|.$$

とする。許容入力  $u(t)$  は、任意の有界な区間  $[t_0, t_1]$  上で定義された、有界かつ区分的に連続な  $r$  次元ベクトル値関数とし、その取り得る値の制限：

$$u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \quad \Omega \text{ は } \mathbb{R}^r \text{ の有界かつ凸な開集合} \quad (3)$$

を考慮する場合もある。どのような許容入力  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , 初期条件  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  に対しても、(1)式の解の存在と一意性が保証され、Finite Escape Time を持たないものとする。

### 2.2 変分の計算

(1)<sub>1</sub>式の解を  $x(t) = x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$  と表わす。 $x(t)$  の定義されている区間は、入力  $u(t)$  と同じであり、 $[t_0, t_1]$  とする。 $C^\infty$  級のスカラー値関数  $F(x)$  の軌道  $x(t)$  に沿っての変動により、「汎関数」

$$J(t) \triangleq F(x(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4)$$

を定義する。 $F(x)$  は、系(1)の出力  $y$  のいずれかの成分とみなすこともでき、また、たとえば最小にすべき評価規範と考えることもできる。

さて、入力  $u(t)$  に対する変分  $\delta u(t)$  を考え、 $\delta u(t)$  に対する  $J(t_1)$  の変動分

$$\Delta J(t_1) \triangleq F(x(t_1) + \Delta x(t_1)) - F(x(t_1)) \quad (5)$$

を計算しよう。ここで、 $u(t) + \delta u(t)$  もまた区間  $[t_0, t_1]$  で定義された許容入力となり、かつ

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\delta u(t)\| dt < \varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (6)$$

であるものとする。また、 $\Delta x(t)$  は  $\delta u(t)$  による  $x(t)$  の変分：

$$\Delta x(t) \triangleq x(t; t_0, x_0, u(\cdot) + \delta u(\cdot)) - x(t; t_0, x_0, u(\cdot)), t_0 \leq t \leq t_1 \quad (7)$$

である。L.I.Rozonoér<sup>11)</sup>によれば、 $\Delta J(t_1)$  は

$$\Delta J(t_1) = \delta J(t_1) + \delta^2 J(t_1) + R(t_1, \theta), \quad (8)$$

となる。ここに、

$$\delta J(t_1) = - \int_{t_0}^{t_1} \{H(x, p, u + \delta u) - H(x, p, u)\} dt \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 J(t_1) = & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H(x, p, u)}{\partial x^i \partial x^j} \delta x^i \delta x^j + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial^2 H(x, p, u)}{\partial x^i \partial u^\alpha} \delta x^i \delta u^\alpha \right] dt \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F(x(t_1))}{\partial x^i \partial x^j} \delta x^i(t_1) \delta x^j(t_1) \end{aligned} \quad (10)$$

であり、ハミルトニアン  $H(x, p, u)$  は

$$H(x, p, u) \triangleq \sum_{i=1}^n p_i \{f^i(x) + \sum_{\alpha=1}^r g_j^\alpha(x) u^\alpha\} \quad (11)$$

により定義される。 $p$  は補助変数で、 $p = \text{row}(p_1, \dots, p_n)$  (row は行ベクトルを表わす) であり、

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H(x, p, u)}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n \quad (12)_1$$

の解として、区間  $[t_0, t_1]$  上で定義される。(12)<sub>1</sub> 式を  $H(x, p, u)$  を用いて表わした式

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H(x, p, u)}{\partial p_i}, i = 1, \dots, n \quad (12)_2$$

とあわせて、正準方程式と呼ばれる。満足すべき境界条件は、

$$x^i(t_0) = x_0^i, p_i(t_1) = - \frac{\partial F(x(t_1))}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n \quad (13)$$

である。(12)<sub>1</sub>, (13)式の解は、 $u(t)$ の定義区間  $[t_0, t_1]$  上で一意的に存在し、その解  $x(t)$  および  $p(t)$  の変分  $\delta u(t)$  に対する変分  $\Delta x(t)$ ,  $\Delta p(t)$  は、大きさが  $\varepsilon$  のオーダーである第一変分  $\delta x(t)$ ,  $\delta p(t)$  と高次の項の和として表わされる。 $\delta x(t)$  および  $\delta p(t)$  は(12)式の変分方程式：

$$\delta \dot{x}^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 H(x, p, u)}{\partial p_i \partial x^j} \delta x^j + \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial^2 H(x, p, u)}{\partial p_i \partial u^\alpha} \delta u^\alpha, i = 1, \dots, n \quad (14)_1$$

$$\delta \dot{p}_i = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 H(x, p, u)}{\partial x^i \partial x^j} \delta x^j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 H(x, p, u)}{\partial x^i \partial p_j} \delta p_j - \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial^2 H(x, p, u)}{\partial x^i \partial u^\alpha} \delta u^\alpha, i = 1, \dots, n \quad (14)_2$$

および境界条件

$$\delta x^i(t_0) = 0, \delta p_i(t_1) = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F(x(t_1))}{\partial x^i \partial x^j} \delta x^j(t_1), i = 1, \dots, n \quad (15)$$

の解であり,  $u(t)$ ,  $x(t)$ ,  $p(t)$  の定義されている区間  $[t_0, t_1]$  上で定義される。  $R(t_1, \theta)$  は  $\varepsilon$  について三次以上の項である。

### 2.3 最大原理, 最適 Regulator 問題および最適特異制御問題

L.I. Rozonoér<sup>11)</sup> は以上の表現を用いて, L.S. Pontryagin の最大原理を<sup>12)</sup>, さきに述べた許容関数族に対して導いた。この方法は, 最大原理へのもっともわかりやすい入り方のひとつとして知られている。最大原理は次のように述べられる。

**最大原理:** もしある許容入力  $u(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) が,  $J(t_1) = F(x(t_1))$  を最小にするならば,

$$H(x(t), p(t), u(t)) = \text{Max}_{u \in Q} H(x(t), p(t), u), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (16)$$

が, (12) および (13) 式の解  $x(t)$ ,  $p(t)$  に沿ってなりたっていないなければならない。ただし, 等号は  $u(t)$  の不連続点を除いてなりたてばよい。

さて, (8)~(15) は, (1<sub>1</sub>) のように  $u$  についての線形性を仮定しなくても用いることができる。もし, 最大原理 (16) が最適であるべき  $u$  を,

$$u = u(x, p); \quad \frac{\partial H(x, p, u(x, p))}{\partial u^\alpha} = 0, \alpha = 1, \dots, r; \quad \left( \frac{\partial^2 H(x, p, u(x, p))}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right), \quad (17)$$

$\alpha, \beta = 1, \dots, r$  が負定値

という形で与えるならば, (9), (10) 式は

$$\delta J(t_1) = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(x, p, u(x, p))}{\partial u} \delta u dt = 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 J(t_1) = & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 H(x, p, u(x, p))}{\partial x^i \partial x^j} \delta x^i \delta x^j \right. \\ & + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^r \frac{\partial^2 H(x, p, u(x, p))}{\partial x^i \partial u^\alpha} \delta x^i \delta u^\alpha + \sum_{\alpha, \beta=1}^r \frac{\partial^2 H(x, p, u(x, p))}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \delta u^\alpha \delta u^\beta \left. \right] dt \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F(x(t_1))}{\partial x^i \partial x^j} \delta x(t_1) \delta x(t_2) \end{aligned} \quad (19)$$

となり, (8) 式の  $R(t_1, \theta)$  には  $\varepsilon^3$  以上の項がもうひとつ追加されることになる。なんらかの原因により, 軌道が, (17) 式の  $u = u(x, p)$  を (12) 式に代入し, (13) 式の境界条件のもとで求めた解  $x(t)$  および  $p(t)$  から外れたものとしよう。そのとき, あくまで  $J(t_1)$  を最小にするように修正動作  $\delta u(t)$  を加えるには, (18) 式がなりたっているから, (19) 式を最小にするように決定すればよい。(19) 式には  $\delta p(t)$  が現われないから, (14<sub>1</sub>) 式のもとで (19) 式の最小化をはかればよく, Accessory Minimum Problem として<sup>13)</sup>, いわゆる最適レギュレータ問題が現われる。(17) 式より求まる  $x(t)$  が恒等的に 0 に等しいならば, 系 (1<sub>1</sub>) が線形定係数系であるものとして, Bolza 型の評価規範を Mayer 型に変換して, 普通の教科書にのっている場合となる。しかし, この最適な  $x(t)$  を求めることは, 二点境界値問題を解くことであり, 一般には難しい。

さらに, (16) 式の最大原理によっても, 最適制御が  $u = u(x, p)$  という形に決定できない, いわゆる

る特異制御問題は、(17)式の条件が満たされていない場合に現われる。(1)<sub>1</sub> 式の形の系は、その典型的な場合であり、多くの応用において現われる重要な問題である<sup>14)</sup>。その場合は、

$$\begin{aligned} H(x, p, u + \delta u) - H(x, p, u) &= 0, t \in [t_2, t_3] \subset [t_0, t_1] \\ \sum_{i=1}^n p_i(t) g_i^{\alpha}(x(t)) &= 0, \alpha = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (20)$$

となるから、(9)式の  $\delta J(t_1)$  が (少なくとも) 区間  $[t_2, t_3]$  で 0 となり、対応する Accessory Minimum Problem は、(14)<sub>1</sub> 式と境界条件  $\delta x(t_2) = \delta x(t_3) = 0$  のもとで (10) 式の積分範囲を区間  $[t_2, t_3]$  でおきかえた  $\delta^2 J$  を最小にする問題となる。これは、古典変分法の Regular でない場合 (Singular Case) であり、十分な研究はなされていなかった。システム制御論の研究者により求められた、一般化 Legendre-Clebsch の条件は<sup>15)</sup>、特異制御の最適性の判定条件であるが、区間  $[t_2, t_3]$  を決めることはできない。この問題が、L.I. Rozonoér<sup>16)</sup> や Kelley<sup>17)</sup> の論文に現われてより、二十年以上の時日が経過し、多くの研究者の努力が重ねられたにもかかわらず、完全な解決は得られていない。これは、言いかえれば、緒言に述べた広い分野における最適制御の問題の多くが、解き得ない状態のままであることを意味する。

### 3. Complete Invariance の条件と出力可制御性の条件

ある量の変動が別の挙動に影響を与えない条件は、どのように記述されるであろうか。系 (1) において、入力  $u(t)$  の変動  $\delta u(t)$  が関数  $F(x(t))$  の挙動に影響を与えない条件は、前節に求めた公式によりしらべることができる。しかし、前節の公式は、ある特定の入力  $u(t)$  および初期条件  $x_0$  に伴う軌道  $x(t)$  について、最終時刻  $t_1$  における  $J(t_1) = F(x(t_1))$  の変動を表わす “local” な公式である。L.I. Rozonoér<sup>18)</sup> は、この local な条件を出発点として、あらゆる許容入力、初期条件、および区間  $[t_0, t_1]$  において、 $F(x)$  が入力の変動に対してその挙動を変えない、Complete Invariance の必要条件、十分条件を与えた。対象とする系を (1) 式で記述されるものに限れば、同じ論法により、必要十分条件を得ることができる<sup>3)</sup>。以下に、この “global” な条件を示す。

#### 3.1 ベクトル値関数 $\Psi_{i; s, i_1 \dots i_s}(x)$ の定義

以下の定義と記号は Rozonoér<sup>18)</sup> が用いたものの一般化である。現代の微分幾何学の記法と異なるところがあるので注意されたい。まず、ベクトル値関数の列を次のように定義する。

$$\Psi_i(x) \triangleq g_i(x), i = 1, \dots, r; \Psi_{i; 1, j}(x) \triangleq \langle \Psi_{i; 0}, g_j \rangle, i = 1, \dots, r; j = 0, 1, \dots, r \quad (20)_1$$

$$\begin{aligned} \Psi_{i; s, i_1 \dots i_s}(x) &\triangleq \langle \Psi_{i; s-1, i_2 \dots i_s}, g_{i_1} \rangle + \dots + \langle \Psi_{i; s-1, i_1 \dots i_{s-1}}, g_{i_s} \rangle \\ i &= 1, \dots, r; s = 0, 1, 2, \dots; 0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s \leq r \end{aligned} \quad (20)_2$$

ここに、(20)<sub>2</sub> 式の和は相異なる添字の組合せについてとるものとする。また、 $n$  次元ベクトル値関数  $a(x)$  と  $b(x)$  とに対して定義される Angular Bracket  $\langle a(x), b(x) \rangle$  は、その第  $i$  成分が

$$\langle a(x), b(x) \rangle^i \triangleq \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial a^i}{\partial x^j} b^j - \frac{\partial b^i}{\partial x^j} a^j \right\}, i = 1, \dots, n \quad (21)$$

により定義される  $n$  次元ベクトル値関数である。さらに、ベクトル場を

$$D(a(x)) \triangleq \sum_{i=1}^n a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (22)$$

により定義すると、ベクトル場の交換子積と、Angular Bracket との間には、

$$[D(a), D(b)] = D(\langle b, a \rangle) \quad (23)_1$$

$$\langle\langle a, b \rangle, c \rangle + \langle\langle b, c \rangle, a \rangle + \langle\langle c, a \rangle, b \rangle = 0 \quad (23)_2$$

がなりたつ。さらに、 $u^0 \triangleq 1, u^1, \dots, u^r$  を任意の定数とするとき、

$$\Psi_{i;s} \triangleq \sum_{\substack{i_1, \dots, i_s=0 \\ i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s}} u^{i_1} u^{i_2} \dots u^{i_s} \Psi_{i;s, i_1 \dots i_s}, \quad i = 1, 2, \dots, r; s = 1, 2, \dots \quad (24)$$

により、 $\Psi_{i;s}$  を定義すれば、

$$\Psi_{i;s+1} = \langle \Psi_{i;s}, f + \sum_{j=1}^r u^j g_j \rangle \quad (25)$$

がなりたち、軌道に沿っての微分が表現できる。

### 3.2 Complete Invariance の必要十分条件

以下の条件 I, II, III は Complete Invariance の必要十分条件として同値である。

**条件 I**  $F(x)$  が一階連立偏微分方程式系：

$$D(\Psi_{i;s, i_1 \dots i_s}) F(x) = 0, \quad x \in R^n, i = 1, \dots, r; s = 0, 1, \dots; 0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq r \quad (26)$$

を満足する。(25)式の式の数、たかだか  $n$  個の独立な方程式を選びだせばよく<sup>19)</sup>、 $F(x)$  はその独立な方程式から生成される完全系の積分である。

なお、(26)式のベクトル値関数の構成手順を考慮すると、(26)式はより簡単な条件

$$D(\Psi_{i;s, 0 \dots 0}) F(x) = 0, \quad x \in R^n, i = 1, \dots, r; s = 0, 1, \dots, n-1 \quad (27)$$

により置き換えてよい<sup>4)</sup>。  $s=n-1$  までで十分であることに注意されたい。また、 $F(x)$  が既知であるときは、完全系を生成する計算の必要はない。 $F(x)$  が系(1)<sub>1</sub> の出力であるならば、(27)式がなりたつかどうかの計算は容易であり、(27)式がなりたてば  $F(x)$  は入力の影響を全く受けない。

**条件 II** 関数の系列  $F_0, F_1, \dots$  を

$$F_0(x) \triangleq F(x), F_s(x) \triangleq D(f + \sum_{j=1}^r u^j g_j) F_{s-1}(x), \quad s = 1, 2, \dots \quad (28)$$

により定義する。 $F_1(x), F_2(x), \dots$  を計算し、最初に入力が陽に現われるのが  $F_l(x)$  であるとき、 $F(x)$  の系(1)<sub>1</sub> における対応定数<sup>20)</sup>(Relative Order; 相対次数)  $P$  は  $l$  に等しいものと定義する。 $F_l(x)$  以降の関数列には、入力  $u$  が陽に現われてくるが、条件 I と同値な条件として、

$$D(\Psi_{j;0}) F_s(x) = 0, \quad x \in R^n, j = 1, \dots, r; s = 0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

がなりたつこと、である。この時(28)式で定義される  $F_s(x)$  には、入力  $u$  は現われない。

**条件 III** (28)式で定義される  $F_s(x)$  があらゆる  $x \in R^n$  で  $u$  を陽に含まない。

### 3.3 出力可制御性

変分の表現(8)~(10)式を用いた local な議論と、ベクトル場(20)を用いた global な議論との関連は、出力可制御性の考察においても同様に現われる。global には、系(1)<sub>1</sub> において、入力  $u$  に対して出力  $F(x)$  が Completely Invariant でないとき、 $F(x(t))$  の挙動は入力  $u(t)$  およびその変分  $\delta u$  の影響を受けるはずである。 $r=m=1$  として、(27)式がなりたたず、

$$D(\Psi_{1;s,0\dots 0})F(x) = 0, s = 0, 1, \dots, p-2; D(\Psi_{1;p-1,0\dots 0})F(x) \neq 0, \\ x \in R^n, 1 \leq p \leq n \quad (30)$$

となるとき、出力 $F(x)$ は入力 $u^1$ により可制御であるための必要十分条件とみなそう。(30)式に現われる $p$ は対応定数で、さきに与えた定義と同値である<sup>6)</sup>。この条件が、軌道 $x(t) = x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ に沿っての local な意味での出力可制御性と同値であることは、第一変分の表現(9)式を用いて証明できる<sup>6)</sup>。一般の、 $r$ 入力 $m$ 出力の場合の条件はまだ満足すべき形では得られていないが、(30)式の条件と(27)式の条件とをあわせて用いるだけでもかなりの成果が得られる。次節に示そう。

#### 4. 構造解析と設計

制御系の設計理論には、ある特定の軌道とその周辺における挙動を対象とする場合と、入力あるいは初期条件にかかわらない、系の構造を対象とする場合とがある。前者の例としては、最適制御・最適特異制御・サーボ機構における Tracking 問題・パラメータ変動の影響を扱う感度解析などがあり、変分公式(8)~(10)を用いた解析が(原理的には)有効であることが多い。また、後者の例としては、可制御性・可観測性・正準形・正準構造・極配置・無干渉制御系の設計・逆システムの設計・外乱無干渉化制御系の設計・モデル追従制御系の設計などがある。もちろん、この local な性質と global な性質とを、互いに独立に研究を進め得るものではなく、前節にも述べたとおりである。この節では、後者の問題のいくつかについて、その考え方を説明しよう。

##### 4.1 可制御性

可制御性は、系(1)<sub>1</sub>において、入力 $u$ に関して Completely Invariant となる関数は定数しか存在しない、という形で定義できる。条件(27)を、一階連立偏微分方程式系 :

$$\Sigma : D(\Psi_{i;s,0\dots 0})E(x) = 0, i = 1, \dots, r; s = 0, 1, \dots, n-1 \quad (31)$$

と考え、 $\Sigma$ より生成される完全系を $[\Sigma]$ と表わし、 $[\Sigma]$ の独立な方程式の数を $\dim[\Sigma]$ と表わすと、上に述べた定義は、

$$\dim[\Sigma] = n \quad (32)$$

と同値である<sup>19)</sup>。この条件が、線形定係数系の場合には、通常の可制御性の条件と一致することは、容易に示すことができる。一方、出力可制御性の考え方をを用いるならば、一般に $r$ 入力 $m$ 出力の場合の出力可制御性の条件の特別な場合として、 $m=n$ かつ $y^k = x^k(k = 1, \dots, n)$ ととれば、(32)式と同値な条件が得られるはずである。しかし、文献6)の方法を拡張する方向でのこの研究は未完成である。

##### 4.2 可観測性

出力あるいは汎関数としての $F(x)$ の変化をしらべてゆく、本稿の変分を用いる考え方は、系の構造をどちらかと言えば観測値の側からしらべているのであり、適当な汎関数の時間的変動により系の安定性を論ずるリヤプノフの安定論に、その方法において通ずるものがある。

したがって、もし系(1)において、入力 $u$ が0であるならば、(28)式と同様に定義した関数列

$$h_0^i(x) \triangleq h^i(x), h_1^i(x) \triangleq D(f+Gu)h_0^i(x), \dots, \\ h_{i-1}^i(x) \triangleq \{D(f+Gu)\}^{i-1}h_0^i(x), i = 1, \dots, r \quad (33)$$

より  $n$  個の独立な関数を選ぶことができるとき、系(1)は可観測であると定義できる。この意味での可観測性は、入力  $u$  が 0 でなくても用い得るし、線形定係数系の場合には従来の定義と一致する。また、このとき、系の出力および系への入力をあわせて入力として用いて、系の状態  $x(t)$  の値を推定する非線形状態観測器の設計が可能であるが、後に述べる。

それでは、(33)式の関数のうちで、 $u=0$  において、独立なものの数が  $N(N < n)$  である場合はどうなるであろうか。そのとき、出力より得られる、系に関する情報は、その  $N$  個の関数の時間的挙動によってわかる範囲にとどまる。 $u \neq 0$  の場合には、(33)式の関数の形より明らかなように、各出力の対応定数  $p_i$  との関連もあるが、 $u=0$  の場合に観測できなかった状態量まで観測できる可能性がある。この場合の観測器などもあわせて、興味ある問題であるが未解決である。

### 4.3 正準形 (Canonical)

本稿の方法により正準形を求める手がかりは(28)式ないしは(33)式にある。すなわち、たとえば  $F(x)$  が系(1)<sub>1</sub> の出力であり、その対応定数が  $p$  であるものとし、軌道  $x(t)$  に沿って  $F(x(t))$  を微分してゆけば、

$$\dot{F}_0 = \dot{F}_1, F_2, \dots, \dot{F}_{p-2} = F_{p-1}, \dot{F}_{p-1} = F_p + \sum_{\alpha=1}^r u^\alpha(t) D(g_\alpha) F_{p-1}(x(t)), \dots \quad (34)$$

となり、この形は  $F_0, F_1, \dots, F_{p-1}, F_p$  を新しい座標にとれば、Canonical Form そのものである。論点を整理し、精密な議論をすすめることにより、線形系に対する正準形の求め方を包含する形で、かなり限定的な条件のもとにはあるが、系(1)に対する正準形を求めることができる<sup>4)</sup>。

その正準形は、高木ら<sup>21)</sup>によって、微分幾何の方法により特異制御の最適性の判定条件を求める際の出発点として用いられた。その結果の普遍性より見ると、文献4に求めた正準形は、あるものと考えられる。この方面の研究も未完である。また、正準形を用いれば、系の状態がすべて観測できるという前提のもとで、非線形系(1)<sub>1</sub> にあたかも線形系であるかのような挙動をさせるフィードバック制御則を容易に導出できるのであり、これは極配置 (Pole Assignment) の理論の一般化である<sup>9, 20)</sup>。

なお、正準構造 (Canonical Structure) については、可観測性について  $u=0$  か  $u \neq 0$  による相異を考慮して、六つの部分により構成されることが予想できる。

### 4.4 無干渉制御系<sup>7)</sup>

無干渉化の基本的な考え方は、入出力の数を同じ ( $r=m$ ) として、入力  $u^i$  は出力  $y^i$  のみに作用し、他の出力  $y^j (j \neq i)$  には全く影響を与えなくすることである。「作用する」という事は出力可制御性によって、「影響を受けない」事は Complete Invariance によっておきかえて良いであろう。

それぞれの必要十分条件はすでに3節に与えられているので、それを組み合わせて用いればよい。ただし、ここでの Complete Invariance は、他の入力  $u^j (j \neq i)$  がどのようなであっても、出力  $y^i$  に作用し得るのは入力  $u^i$  のみであることを要請する。この点に修正を加えた条件を用いると、系(1)が無干渉制御系であるための必要十分条件は、次の二つの条件がなりたつことである。

**条件 I** (Complete Invariance) 出力  $y^i = h^i(x) (i = 1, \dots, r)$  のそれぞれに対して、次式がなりたつ。

$$\begin{aligned} D(\Psi_{j; s, i_1 \dots i_s}) h^i(x) &= 0, j = 1, \dots, r; j \neq i; s \\ &= 0, 1, \dots; 0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq r \end{aligned} \quad (35)$$

**条件 II** (出力可制御性) 出力  $y^i = h^i(x) (i = 1, \dots, r)$  のそれぞれに対して、

$$\text{rank} \left( \frac{\partial h_0^{i,j}(x)}{\partial x^k} \right) = M_i, j, k = 1, \dots, n; h_0^{i,j}(x) \triangleq \{D(f)\}^{j-1} h^i(x), \quad (36)$$

であるとき、各  $M_i$  に対して対応定数  $p^i$  が存在して、次式がなりたつ。

$$0 < p^i \leq M_i; D(\Psi_i; p^i, 0, \dots, 0) H^i(x) \neq 0, i = 1, \dots, r \quad (37)$$

さらに、状態フィードバック

$$u = a(x) + B(x)v \quad (38)$$

により、系(1)が無干渉制御系となるための必要十分条件は

(1)各出力  $y^i = h^i(x)$  に対して、対応定数  $p^i$  が存在する。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} D(\Psi_1; 0) h_0^{1,p^1}(x) \cdots D(\Psi_r; 0) h_0^{r,p^r}(x) \\ \vdots \\ D(\Psi_1; 0) h_0^{1,p^r}(x) \cdots D(\Psi_r; 0) h_0^{r,p^r}(x) \end{bmatrix} = r \quad (39)$$

の二つがなりたつことである。

文献7)には、これらの結果とともに、線形定係数系における無干渉化の最終的な形であるCDシステムの非線形系(1)における表現の求め方を示した。入出力の数が異なる場合の定義はいくつもあり得るが、出力可制御性の一般的な条件が求まれば、本稿の方法がそのまま拡張できる。

#### 4.5 外乱無干渉化制御系の設計<sup>9)</sup>

系に入力も外乱も線形に作用するものとし、(1)<sub>1</sub> 式のかわりに、

$$\dot{x}^i = f^i(x) + \sum g_j^i(x) u^j(t) + \sum g_{i+\alpha}^i(x) w^\alpha(t), i = 1, \dots, n \quad (40)_1$$

$$x = f(x) + G_u(x)u + G_w(x)w$$

$$y^k = h^k(x), k = 1, \dots, m \quad y = h(x) \quad (40)_2$$

について考えよう。前項と同様に  $r=m$  として、外乱  $w$  の影響が  $y$  に現われず、かつ  $u$  と  $y$  との間は前項の意味で無干渉化制御系となるように状態フィードバック則を定めることができるであろうか。この問題も、外乱もまた入力の一部とみなして、入力のある部分が出力に影響を与えないという意味の Complete Invariance の条件と、出力可制御性の条件を組合せればよいことは明らかである。詳細は文献9)に述べたので省略するが、無干渉制御系の設計条件を包含する形で条件は求まり、線形系のパラメータ変動の影響の考察への応用の可能性がある。

#### 4.6 逆システムの設計<sup>9)</sup>

系(1)の逆システムの設計が可能となる条件は、無干渉化制御の場合と同様に、対応定数を用いて求めることができる。その条件は、ややゆるい形となるが、その間の関係は微妙である。文献8)には、非線形系の逆システムを導びく方法により、線形系の逆システムを行列演算のみを用いる求め方を示した。非線形系では、理論面では別として、逆システムは実用的でないと思われる。

#### 4.7 非線形状態観測器の設計<sup>5)</sup>

Luenberger<sup>22)</sup>により提案された、線形系に対するオブザーバ(状態観測器)の設計方法を、構造の面から分析するならば、その基本的性質が、I. 推定誤差の入力に対する Complete Invariance, II. 推定誤差の変動における Stability, III. 出力の関数  $h(x)$  と推定される関数  $\Phi(x)$  とあわせて  $n$  個の関数の関数的独立性、にあることがわかる。したがって、それらの条件を系(1)に対

して記述することは容易である。その詳細と具体的な設計例については、文献5を参照されたい。可制御性・可観測性に関する仮定、汎関数観測器の設計など、まだまだ研究の必要があるが、一応実用性は十分にあると考えている。

#### 4.8 モデル追従制御系の設計<sup>10)</sup>

モデルに追従するというのを、モデルの出力から系の出力をひいた誤差が、入力について、モデルも合せた系に関して Completely Invariant であり、かつその誤差が  $t \rightarrow \infty$  とするとき 0 に近づくこと、つまり安定であることと考える。すると、モデル追従制御系の設計は前項のオブザーバの設計と同様に行える。この方法は、さらに発展させることができ、また自然な考え方であろう。

### 5. 考察および結言

前節に示したように、入力について線形である非線形制御系の大域的な (global) 構造の解析と設計の理論は、変分公式(8)~(10)より導かれた Complete Invariance と出力可制御性との、二つの性質に基いて構成することができる。未完成の部分も多く、計算量もかなり多くなるが、用いる予備知識としては、連立一階偏微分方程式論と古典変分法の入門段階を知っていればよく、応用も容易である。変分公式(8)~(10)の本来の用い方である、局所的な (local) 解析と設計の理論については述べなかったが、最適 (特異) 制御理論については、多くの研究がある。感度解析等に、変分公式を用いることは、従来あまり有用でないとされているが、再検討の余地がありそうに思える。安定性の研究については、4.2 に述べたように、大域的な議論は系の状態  $x$  の汎関数  $V(x)$  の動特性解析と微分不等式によって扱える。軌道の近傍における挙動は変分公式と変分方程式(14)を用いて解析され、出力可制御性・正準形・特異軌道の最適性の判定条件などの理論と密接な関連がある。また、系の同定に関しては、Volterra 級数あるいは Wiener-Hermite 展開を用いる方法が<sup>23)</sup>本稿の方法の重要な側面であるテンソル表記と整合性があり、系の表現にも十分用い得るものと考えられる。このように、汎関数の性質に基いて、系の構造・設計・安定性・同定を論じようとする本稿の方法は、非線形システム理論を構成するひとつの枠組となり得るであろう。また、少なくとも4節に要約した結果は、十分に実用的である。

しかしながら、本稿の方法には、初等的であるための限界も存在するであろう。微分幾何学における大域的な記述が実用に際してどこまで有用であるか、少なからぬ疑問もあるが、現在急速に進展しつつある非線形システム理論は、近い将来において必ず重要かつ本質的な成果を与えるであろう。緒言に述べた、広い応用分野を考慮するとき、本稿の方法は理論面においても、応用の面においても、さらに研究を続けなければならない。なお、4節では、出力フィードバックによる設計<sup>24)</sup>・多関節ロボットの無干渉化制御<sup>25)</sup>・特異摂動系への適用<sup>26)</sup>などについては述べなかった。また、同様に変分の方法を用いて導かれる、最適インパルス制御系の理論<sup>27)</sup>とその応用<sup>28)</sup>についても述べなかった。Rozonoér の方法は、この分野にも拡張された<sup>29)</sup>。また、係数に入力を含む、双線形双曲型偏微分方程式によって記述される系への拡張も可能である<sup>30)</sup>。したがって、変分による local な条件を、状態空間全体へのより global な条件に発展させる方法を見つけることができるならば、インパルス制御系、分布定数系に本稿の方法を拡張でき、様々な設計方法が導びかれるであろう。しかし、離散時間系について、現在研究中であるけれども、この拡張は必ずしも容易ではない。

おわりに、この研究に、ご討論・ご協力をいただき、あるいは暖かく励まして下さった多くの

方々に御礼を申し上げます。その方々のおかげで、まだ不十分かつ不完全なものではありますが、この研究を続け得からであります。

#### 参 考 文 献

- 1) C. Lobry : SIAM J. Control & Optimization, 8 (1970), pp. 573-605.
- 2) H. Sussman : *ibid.*, 21 (1983), 5, pp. 686-713.
- 3) 島, 川上, 得丸 : システムと制御, 23 (1979), 10, pp. 594-601.
- 4) 島 : *ibid.*, 24 (1980), 12, pp. 816-824.
- 5) 島, 川上, 北 : *ibid.*, 24 (1980), 9, pp. 621-629.
- 6) 島 : *ibid.*, 25 (1981), 12, pp. 778-787.
- 7) 北, 島 : *ibid.*, 26 (1982), 4, pp. 247-255.
- 8) 北, 島 : *ibid.*, 26 (1982), 12, pp. 791-800.
- 9) 島, 石動, 運崎 : *ibid.* (投稿中).
- 10) 石動, 島 : 第26回自動制御連合講演会前刷, (1983), pp. 47-48.
- 11) L. I. Rozonoër : Automation & Remote Control, 20 (1959), 10, pp. 1288-1302.
- 12) L. S. Pontryagin, et al. : The Mathematical Theory of Optimal Processes, (1962), Interscience.
- 13) G. A. Bliss : Lectures on the Calculus of Variations, (1946), Univ. of Chicago Press.
- 14) 島 : システムと制御, 16 (1972), 12, pp. 942-952.
- 15) H. M. Robbins : IBM Journal, (1967), July, pp. 361-372.
- 16) L. I. Rozonoër : Automation & Remote Control, 20 (1959), 10, pp. 1405-1421.
- 17) H. J. Kelley : AIAA J., 1 (1963), pp. 1578-1580.
- 18) L. I. Rozonoër : Automation & Remote Control, 24 (1963), pp. 793-799.
- 19) 占部 : 微分方程式, (1958), 共立出版.
- 20) 得丸, 岩井 : 計測自動制御学会論文集, 4 (1968), 3, pp. 271-279.
- 21) 高木, 片山 : システムと制御, 27 (1983), 1, pp. 73-81.
- 22) D. G. Luenburger : IEEE Trans. Military Electronics, 8 (1964), pp. 74-80.
- 23) 小倉 : システム制御, 27 (1983), 8, pp. 498-507.  
および, M. Fliess et al. : IEEE Trans. Circuits & Systems, 30 (1983), 8, pp. 554-570.
- 24) 運崎 : 京都大学大学院工学研究科数理工学専攻修士論文, (1983).
- 25) 運崎, 得丸, 島 : 第25回自動制御連合講演会前刷, (1982).
- 26) 梶崎, 得丸, 島 : 第15回計測自動制御学会北海道支部学術講演会論文集, (1983).
- 27) 島 : システムと制御, 23 (1979), 8, pp. 471-479.
- 28) 河内, 島, 得丸 : 第14回計測自動制御学会北海道支部学術講演会論文集, (1982), pp. 41-42.
- 29) Yu. V. Orlov : Systems & Control Letters, 3 (1983), 4, pp. 227-234.
- 30) 池田, 岡本, 島 : 計測自動制御学会論文集, 10 (1974), 3, pp. 311-320.