



Title	2次曲面及び4次曲面（トーラス）の相貫曲線解析解
Author(s)	嘉数, 侑昇; Kakazu, Yukinori; 沖野, 教郎 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 120, 65-74
Issue Date	1984-03-30
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41866">https://hdl.handle.net/2115/41866</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	120_65-74.pdf



## 2次曲面及び4次曲面(トーラス)の相貫曲線解析解

嘉数侑昇 沖野教郎 渡部広一

(昭和58年11月30日受理)

### Analytic Solution of Intersection between High-order Surfaces

—The case of Quadric, Fourth-order Surfaces (Torus)—

Yukinori KAKAZU, Norio OKINO and Hirokazu WATABE

(Received November 30, 1983)

#### Abstract

In the fields of Computer Aided Design and Computer Graphics, to determine the intersectional lines between two curved surfaces is one of the most important problems. This paper gives an analytical exact solution of the intersecting lines of complex shapes with curved surfaces. These curved surface shapes are torus, sphere and ruled surfaces. By adapting the parametric method for representation of these shapes, the problem of finding the solution of the intersecting lines of torus-torus and torus-ruled surface are reduced to the problem of solving a fourth-order equation, and the case of torus-sphere is reduced to the problem of solving a linear trigonometric equation. For the evaluation of the proposed method, by using the acquired solutions, we actually plot the intersecting lines for visual check, and calculate whether the set of points on the intersecting lines are on both shapes for numerical check. These show the expected results for the proposed method.

#### 1. 緒 言

CAD,あるいは、図形処理の分野において、形状間の相貫曲線を高速にかつ精度よく求めることが要求されている。その要求を満足する最も良い方法は、相貫曲線の解析的厳密解を利用することであろう。一般に解析解を求めることは困難であるが、2次曲面同士についてはいくつかの方法が存在する。一つは、直接4次方程式を解く方法<sup>1)</sup>。もう一つは、パラメータ表現を利用して2次方程式を解く問題に帰着させる方法<sup>2)</sup>である。本研究では、2次曲面だけでなく4次曲面であるところのトーラスを含めた各形状間の相貫曲線を解析的に求めることを試みた。2次曲面と4次曲面との相貫線を求める問題は、一般には8次方程式を解く問題となるが、8次方程式は解析的には解けない。ところが、曲面をパラメトリックに表現すると、4次方程式(球とトーラスの場合は三角方程式)を解く問題に帰着できるので、4次方程式の解の公式を用いて相貫曲線の解析解が得られる。

## 2. 相貫曲線の一般的求め方

本研究では、次の二つの方法を用いて相貫曲線を求める。すなわち、二つの曲面をパラメータ表現にして求める方法と、一方をパラメータ表現、他方を直交座標表現にして求める方法である。

### 2.1 パラメータ法

二つの曲面  $P, Q$  を次のように二つのパラメータ  $s, t$  を用いて表す。

$$P = f(s_1, t_1) \quad (1)$$

$$Q = g(s_2, t_2) \quad (2)$$

$P = Q$  より次の3本の式が得られる。

$$f_x(s_1, t_1) = g_x(s_2, t_2) \quad (3)$$

$$f_y(s_1, t_1) = g_y(s_2, t_2) \quad (4)$$

$$f_z(s_1, t_1) = g_z(s_2, t_2) \quad (5)$$

これら3本の式より、 $s_2, t_2$  を消去して、 $s_1$  を  $t_1$  の関数として求める。

$$s_1 = s_1(t_1) \quad (6)$$

式(6)を式(1)に代入すると、式(7)が得られる。

$$P = f(s(t_1), t_1) = f'(t_1) \quad (7)$$

ここで、 $P$  はパラメータ  $t_1$  のみの関数となり、これが求める相貫曲線の式となる。トーラスとトーラス、トーラスと球の場合にこの方法を適用する。

### 2.2 パラメータ&直交座標法

一方を直交座標表現、他方をパラメータ表現式で表す。すなわち、

$$f(x, y, z) = 0 \quad (8)$$

$$(x, y, z) = P = g(s, t) \quad (9)$$

式(9)を式(8)に代入すれば、次式が得られる。

$$f'(s, t) = 0 \quad (10)$$

式(10)を  $s$  について解き、 $s$  を  $t$  の関数として求める。すなわち、

$$s = s(t) \quad (11)$$

式(11)を式(9)に代入すれば、求める相貫曲線が式(12)により決定される。

$$P = g(s(t), t) = g'(t) \quad (12)$$

トーラスと線織面の場合にこの方法を適用する。

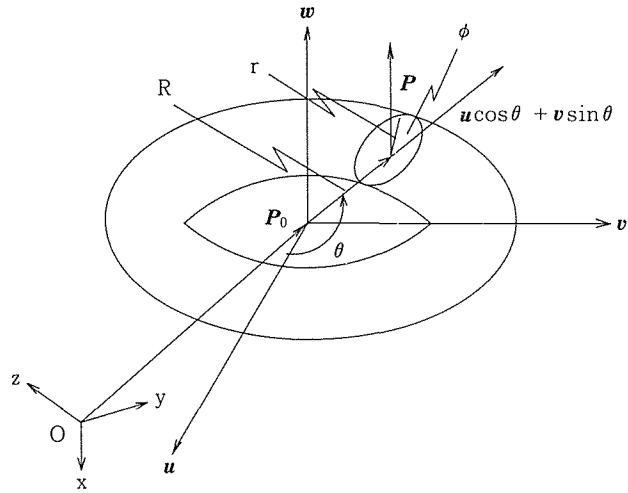


図1 トーラスのパラメータ表現

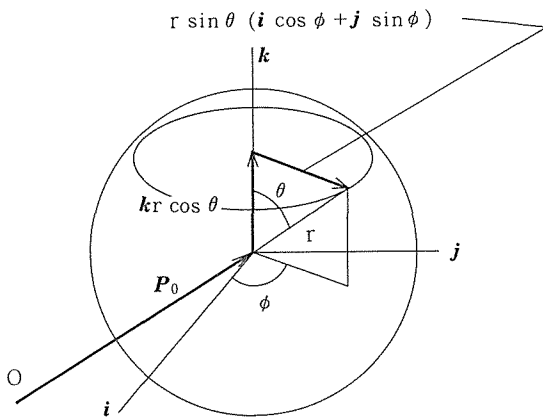


図2 球のパラメータ表現

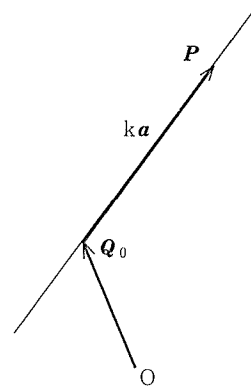


図3 直線のパラメータ表現

### 3. 曲面のパラメータ表現

ここで扱う曲面は、トーラス、線織面、及び球である。トーラス、球のパラメータ表現式を以下に示す（図1, 2参照）。

$$P = P_0 + (R + r \cos \phi) (u \cos \theta + v \sin \theta) + w r \sin \phi \tag{13}$$

$$P = P_0 + r k \cos \theta + r \sin \theta (i \cos \phi + j \sin \phi) \tag{14}$$

線織面は直線の集りであるから、直線のパラメータ表現式を示しておく（図3参照）。

$$\text{直線： } P = Q_0 + ka \tag{15}$$

トーラスのパラメータは  $\phi, \theta$ ; 球のパラメータは  $\phi, \theta$ ; 直線のパラメータは  $k$  である。

### 4. トーラスと直線との相貫点

トーラスを直交座標表現, 直線をパラメータ表現にして求める。トーラスの直交座標表現は次式で与えられる。

$$T = -(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^2 + 2(R^2 + r^2)(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2) - 4R^2(w_x d_x + w_y d_y + w_z d_z)^2 - (R^2 - r^2)^2 = 0 \quad (16)$$

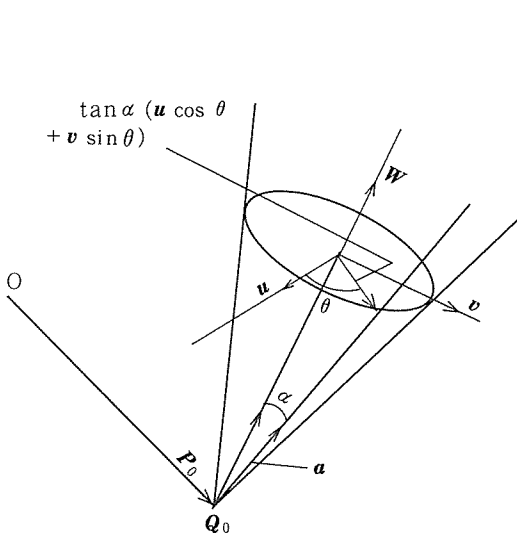


図5 円錐の母線の始点と方向余弦

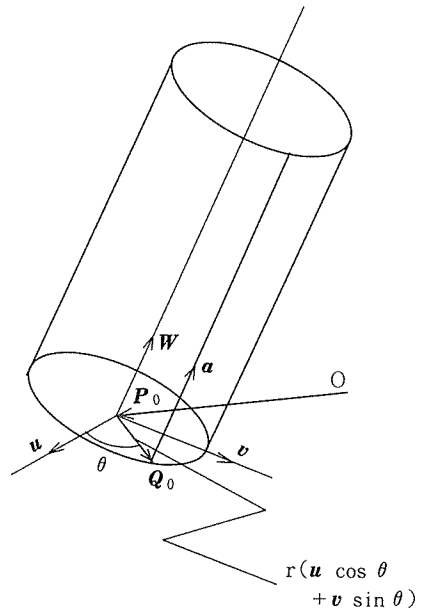


図4 円柱の母線の始点と方向余弦

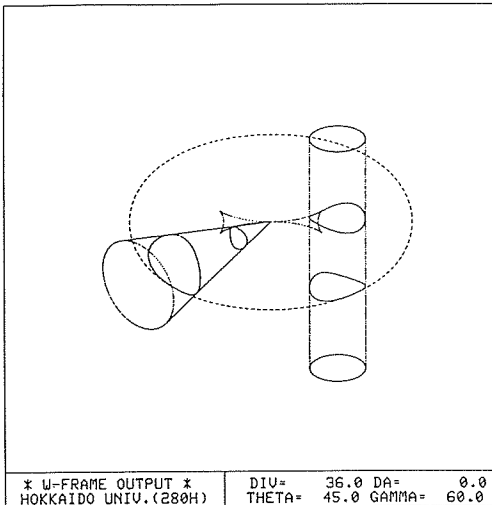


図6 トーラスと線織面との相貫曲線 (1)

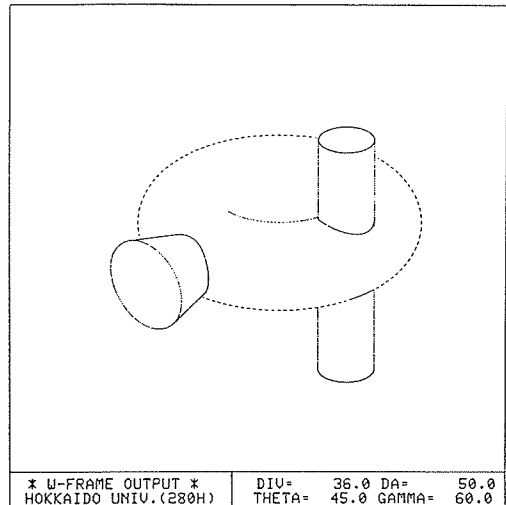


図7 トーラスと線織面との相貫曲線 (2)

ただし,  $d_x = x - p_x, d_y = y - p_y, d_z = z - p_z$

式(16)の  $x, y, z$  に(3)式の  $\mathbf{P} = (x, y, z)$  を代入すれば, パラメータ  $k$  についての4次方程式が得られる。すなわち,

$$k^4 + C_1 k^3 + C_2 k^2 + C_3 k + C_4 = 0 \quad (17)$$

ここで,

$$C_1 = 2b_1$$

$$C_2 = b_1^2 + 2b_2 - 2(R^2 + r^2) + 4R^2 b_3^2$$

$$C_3 = 2b_1 b_2 - 2b_1(R^2 + r^2) + 8R^2 b_3 b_4$$

$$C_4 = b_2^2 - 2(R^2 + r^2)b_2 + 4R^2 b_4^2 + (R^2 - r^2)^2$$

$$b_1 = 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{Q}_0 - \mathbf{P}_0)$$

$$b_2 = |\mathbf{Q}_0 - \mathbf{P}_0|^2$$

$$b_3 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}$$

$$b_4 = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{Q}_0 - \mathbf{P}_0)$$

式(17)を公式を使って解き, 得られた  $k$  を式(15)に代入すれば, 求める相貫点  $\mathbf{P} = (x, y, z)$  が得られる。

## 5. トーラスと線織面との相貫曲線

トーラスと直線との相貫点を得られたから, 直線から作られる曲面, すなわち, 線織面とトーラスとの相貫曲線は, 各母線の始点  $\mathbf{Q}_0$  と方向余弦  $\mathbf{a}$  をパラメータ表現できれば求まることになる。簡単な場合として, 円柱と円錐の  $\mathbf{Q}_0, \mathbf{a}$  を次式に示す (図4, 5参照)。

$$\text{円柱: } \mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0 + r(\mathbf{u} \cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta) \quad (18)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{w} \quad (19)$$

$$\text{円錐: } \mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0 \quad (20)$$

$$\mathbf{a} = \tan \alpha (\mathbf{u} \cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta) + \mathbf{w} \quad (21)$$

パラメータは, ともに  $\theta$  である。出力結果を図6, 7に示す。

## 6. トーラスと球との相貫曲線

トーラスと球を次のように表す。すなわち,

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_{01} + (R_1 + r_1 \cos \phi_1)(\mathbf{u} \cos \theta_1 + \mathbf{v} \sin \theta_1) + \mathbf{w} r_1 \sin \phi_1 \quad (22)$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_{02} + r_2 \mathbf{k} \cos \theta_2 + r_2 \sin \theta_2 (\mathbf{i} \cos \phi_2 + \mathbf{j} \sin \phi_2) \quad (23)$$

式(22)と(23)式とを連立させて, パラメータ  $\phi_2, \theta_2$  を消去すると次式が得られる。

$$A \sin(\theta_1 + \alpha) = B(\phi_1) \quad (24)$$

ただし,

$$A = \sqrt{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{u})^2 + (\mathbf{s} \cdot \mathbf{v})^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}} \right)$$

$$B = \frac{r_2^2 - f^2 - |\mathbf{g}|^2}{2f}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{P}_{01} - \mathbf{P}_{02}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{w} r_1 \sin \phi_1 + \mathbf{s}$$

$$f = R_1 + r_1 \cos \phi_1$$

1)  $A \neq 0$  の場合

式(24)より,  $\theta_1$  は  $\phi_1$  の関数として求まる。すなわち,  $|B/A| \leq 1$  の範囲で,

$$\theta_1 = \sin^{-1} \left( \frac{B}{A} \right) - \alpha \quad (25)$$

式(25)を式(22)に代入すれば,  $\mathbf{P}_1$  は  $\phi_1$  のみ関数となり, これが求める交線の式となる。

またこの場合  $|B/A| \leq 1$  となる  $\phi_1$  の区間(交線存在区間)を求めることができる。すなわち,

(i)  $B_2/A_2 > 1$ , または,  $B_3/A_3 < -1$ , または,  $B_2/A_2 > B_3/A_3$  のとき  
交線なし

(ii)  $B_2/A_2 \leq -1$  かつ  $B_3/A_3 \geq 1$  のとき  
 $0 \leq \phi_1 \leq 2\pi$  (全区間)

(iii)  $B_2/A_2 \leq -1$  かつ  $-1 \leq B_3/A_3 < 1$  のとき  
 $\pi - \sin^{-1}(B_3/A_3) - \alpha_3 \leq \phi_1 \leq 2\pi + \sin^{-1}(B_3/A_3) - \alpha_3$

(iv)  $B_3/A_3 \geq 1$  かつ  $B_2/A_2 > -1$  のとき  
 $\sin^{-1}(B_2/A_2) - \alpha_2 \leq \phi_1 \leq \pi - \sin^{-1}(B_2/A_2) - \alpha_2$

(v)  $B_2/A_2 > -1$  かつ  $B_3/A_3 < 1$  のとき  
 $\sin^{-1}(B_2/A_2) - \alpha_2 \leq \phi_1 \leq \pi - \sin^{-1}(B_2/A_2) - \alpha_2$   
かつ,  $\pi - \sin^{-1}(B_3/A_3) - \alpha_3 \leq \phi_1 \leq 2\pi + \sin^{-1}(B_3/A_3) - \alpha_3$

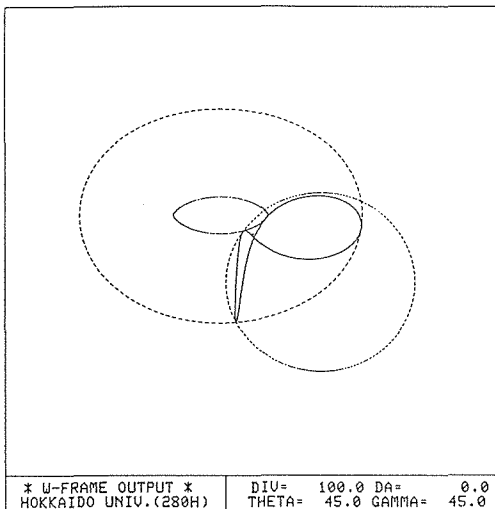


図8 トーラスと球との相貫曲線 (1)

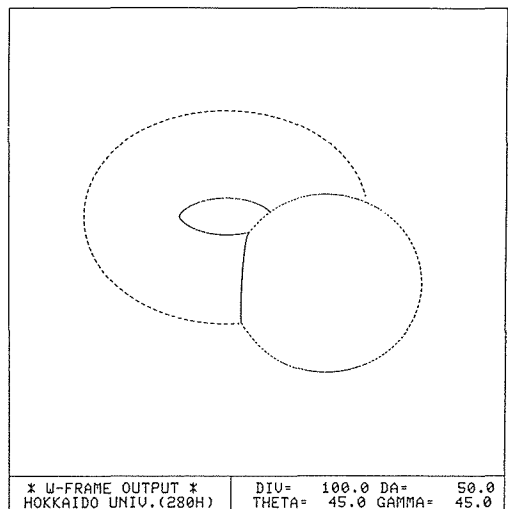


図9 トーラスと球との相貫曲線 (2)

ここで,

$$\begin{aligned} A_2 &= 2r_1\sqrt{(A+R_1)^2+(\mathbf{w}\cdot\mathbf{s})^2} \\ \alpha_2 &= \tan^{-1}\left(\frac{A+R_1}{\mathbf{w}\cdot\mathbf{s}}\right) \\ B_2 &= r_2^2-(R_1^2+r_1^2+|\mathbf{s}|^2+2AR_1) \\ A_3 &= 2r_1\sqrt{(R_1-A)^2+(\mathbf{w}\cdot\mathbf{s})^2} \\ \alpha_3 &= \tan^{-1}\left(\frac{R_1-A}{\mathbf{w}\cdot\mathbf{s}}\right) \\ B_3 &= r_2^2-(R_1^2+r_1^2+|\mathbf{s}|^2-2AR_1) \end{aligned}$$

2)  $A=0$  の場合

この場合は,  $\theta_1$  が  $\phi_1$  の関数としては求まらないが,  $B=0$  という条件より  $\phi_1 = \text{const.}$  の形で求まる。すなわち,

$$(i) \quad |B_1/A_1| \leq 1 \text{ のとき, } 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi \text{ の区間で,} \\ \phi_1 = \sin^{-1}(B_1/A_1) - \alpha_1 \quad (26)$$

$$(ii) \quad |B_1/A_1| > 1 \text{ のとき,} \\ \text{交線なし}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= 2r_1\sqrt{R_1^2+(\mathbf{w}\cdot\mathbf{s})^2} \\ \alpha_1 &= \tan^{-1}(R_1/\mathbf{w}\cdot\mathbf{s}) \\ B_1 &= r_2^2-(R_1^2+r_1^2+|\mathbf{s}|^2) \end{aligned}$$

式(26)を式(22)に代入すれば  $\mathbf{P}_1$  は  $\theta_1$  のみの関数となり, これが相貫線の式となる。出力結果を図8, 9に示す。

## 7. トーラスとトーラスとの相貫曲線

二つのトーラスが次のように与えられたとする。

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + (R_1 + r_1 \cos \phi_1) (\mathbf{u}_1 \cos \theta_1 + \mathbf{v}_1 \sin \theta_1) + \mathbf{w}_1 r_1 \sin \phi_1 \quad (27)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + (R_2 + r_2 \cos \phi_2) (\mathbf{u}_2 \cos \theta_2 + \mathbf{v}_2 \sin \theta_2) + \mathbf{w}_2 r_2 \sin \phi_2 \quad (28)$$

まず初めに, マトリクス  $E$  を次のように作る。

$$E = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

このマトリクスを使って式(27), (28)の各ベクトルを回転変換すると, 次式を得る。

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}_0' + (R_1 + r_1 \cos \phi_1) (\mathbf{u} \cos \theta_1 + \mathbf{v} \sin \theta_1) + \mathbf{w} r_1 \sin \phi_1 \quad (30)$$

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}_0' + (R_2 + r_2 \cos \phi_2) (\mathbf{i} \cos \theta_2 + \mathbf{j} \sin \theta_2) + \mathbf{k} r_2 \sin \phi_2 \quad (31)$$

ここで,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は  $x, y, z$  軸方向の単位ベクトル,  $\mathbf{P}_0' = E \mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{Q}_0' = E \mathbf{Q}_0$ ,  $\mathbf{u} = E \mathbf{u}_1$ ,

$\mathbf{v} = E \mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{w} = E \mathbf{w}_1$  である。(18), (19) 式を連立させてパラメータ  $\phi_2, \theta_2$  を消去すると次式が得られる。

$$A_1 \cos^2 \theta_1 + A_2 \sin^2 \theta + A_3 \cos \theta_1 \sin \theta_1 + A_4 \cos \theta_1 + A_5 \sin \theta_1 + A_6 = 0 \quad (32)$$

ここで,

$$A_1 = 4f^2 [(\mathbf{s} \cdot \mathbf{u})^2 + R_2^2 u_z^2]$$

$$A_2 = 4f^2 [(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v})^2 + R_2^2 v_z^2]$$

$$A_3 = 8f^2 [(\mathbf{s} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) + R_2^2 u_z v_z]$$

$$A_4 = 4f [h(\mathbf{s} \cdot \mathbf{u}) + 2R_2^2 g_z u_z]$$

$$A_5 = 4f [h(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) + 2R_2^2 g_z v_z]$$

$$A_6 = h^2 + 4R_2^2 (g_z^2 - r_2^2)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{P}'_0 - \mathbf{Q}'_0$$

$$\mathbf{f} = R_1 + r_1 \cos \phi_1$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{w} r_1 \sin \phi_1 + \mathbf{s}$$

$$\mathbf{h} = 2r_1(\mathbf{w} \cdot \mathbf{s} \sin \phi_1 + R_1 \cos \phi_1) + R_1^2 + r_1^2 - R_2^2 - r_2^2 + |\mathbf{s}|^2$$

のように,  $A_i (i=1, 2, \dots, 6)$  は  $\phi_1$  の関数である。さらに,  $\cos \theta_1 = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1}$  の関係を式(32)に代入すれば次式のような  $\sin \theta_1$  に関する4次方程式が得られる。

$$B_0 \sin^4 \theta_1 + B_1 \sin^3 \theta_1 + B_2 \sin^2 \theta_1 + B_3 \sin \theta_1 + B_4 = 0 \quad (33)$$

ただし,

$$B_0 = (A_2 - A_1)^2 + A_3^2$$

$$B_1 = 2 \{ (A_2 - A_1) A_5 + A_3 A_4 \}$$

$$B_2 = A_5^2 + 2 (A_2 - A_1) (A_1 + A_6) - A_3^2 + A_4^2$$

$$B_3 = 2 \{ A_5 (A_1 + A_6) - A_3 A_4 \}$$

$$B_4 = (A_1 + A_6)^2 - A_4^2$$

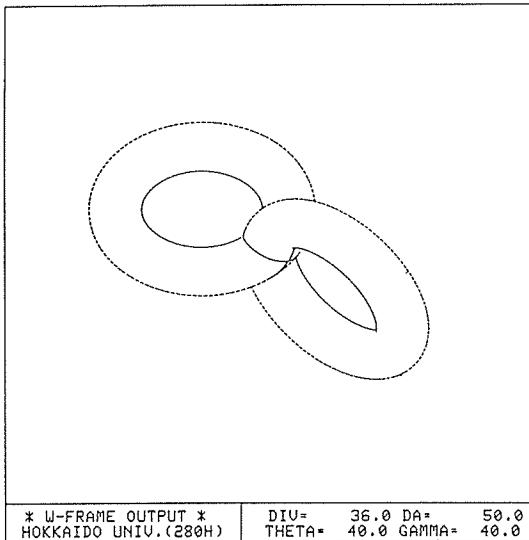


図10 トーラスとトーラスとの相貫曲線 (1)

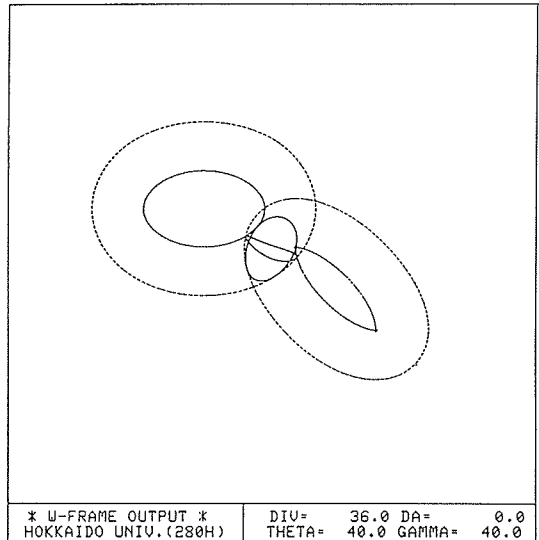


図11 トーラスとトーラスとの相貫曲線 (2)

従って、式(3)を公式を使って解けば、 $\theta_1$ が $\phi_1$ の関数として求まるので、それを式(7)に代入すれば相貫曲線が求まる。ただし、 $u_z = v_z = \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} = 0$  場合、すなわち、二つのトーラスの軸 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ が一致している場合は、 $\theta_1$ を $\phi_1$ の関数として求めることができず、 $\phi_1 = \text{const.}$ の形で求まる。すなわち、

(i)  $|R_3| \leq 1$  のとき

$$\phi_1 = \beta \pm \gamma \tag{34}$$

(ii)  $|R_3| > 1$  のとき  
交線なし

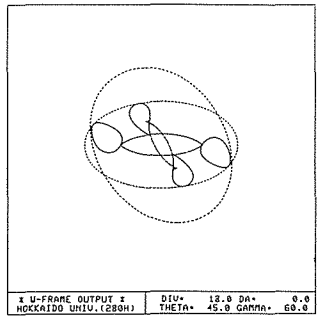
```

=====INTERSECT LINE DATA =====
MAXXI= 4
MAXNI= 20
      XI      YI      ZI      F1      F2
-4.490 -12.200  0.0      0.00391  -0.03125
-4.574 -11.975  1.026  0.00391  -0.04297
-4.770 -11.335  1.928  0.00391  -0.05469
-4.951 -10.380  2.598  0.00391  0.01172
-4.992 -9.261  2.954  0.0      0.0
-4.822 -8.161  2.954  0.0      -0.01953
-4.440 -7.248  2.598  -0.00391  -0.01953
-3.924 -6.627  1.928  -0.01172  -0.02344
-3.450 -6.298  1.026  -0.00781  -0.00781
-3.250 -6.200  0.000  -0.00781  -0.00781
-3.650 -6.298 -1.026  -0.00781  -0.00391
-3.924 -6.627 -1.928  -0.00781  -0.03444
-4.440 -7.248 -2.598  -0.00391  -0.01953
-4.822 -8.161 -2.954  -0.00781  -0.02344
-4.992 -9.261 -2.954  0.0      -0.03125
-4.951 -10.380 -2.598  0.0      -0.06250
-4.770 -11.335 -1.928  0.0      -0.05469
-4.574 -11.975 -1.026  0.0      -0.04297
-4.490 -12.200 -0.000  0.00391  -0.03125
-4.574 -11.975  1.026  0.00391  -0.05078

MAXXI= 20
      XI      YI      ZI      F1      F2
4.490 -12.200  0.0      0.00391  -0.07813
4.574 -11.975  1.026  0.0      -0.09375
4.770 -11.335  1.928  0.00391  -0.10156
4.951 -10.380  2.598  0.00391  -0.02734
4.992 -9.261  2.954  0.0      -0.03516
4.822 -8.161  2.954  0.00391  -0.05359
4.440 -7.248  2.598  0.00391  -0.04688
3.924 -6.627  1.928  -0.01172  -0.04297
3.450 -6.298  1.026  -0.00781  -0.02734
3.250 -6.200  0.000  -0.00391  -0.01953
3.650 -6.298 -1.026  -0.00781  -0.02344
3.924 -6.627 -1.928  -0.00781  -0.04297
4.440 -7.248 -2.598  -0.00391  -0.04688
4.822 -8.161 -2.954  -0.00781  -0.05469
4.992 -9.261 -2.954  0.0      -0.07031
4.951 -10.380 -2.598  0.00391  -0.10156
4.770 -11.335 -1.928  0.0      -0.09786
4.574 -11.975 -1.026  0.0      -0.08203
4.490 -12.200 -0.000  0.00391  -0.07813
4.574 -11.975  1.026  0.00391  -0.09375

MAXXI= 20
      XI      YI      ZI      F1      F2
-4.490  12.200  0.0      0.00391  -0.06250

```



F(0,13.1,0) = -320.0  
F(0,13.0,0) = 0.0

表1 トーラスとトーラスとの相貫曲線のペナルティ値

```

=====INTERSECT LINE DATA =====
MAXXI= 2
MAXNI= 20
      XI      YI      ZI      F1      F2
3.000  10.000 -4.981  0.0      -0.00781
2.819  11.026 -4.806  0.00002  0.08594
2.298  11.928 -4.515  0.00002  -0.02344
1.500  12.598 -4.217  0.00002  -0.03516
0.521  12.954 -4.026  0.00002  0.03516
-0.521  12.954 -4.026  0.00002  0.03516
-1.500  12.598 -4.217  0.00002  -0.03516
-2.298  11.928 -4.515  0.00002  0.03125
-2.819  11.026 -4.806  0.00002  0.08594
-3.000  10.000 -4.981  0.0      0.04297
-2.819  8.974 -4.965  0.00002  0.07813
-2.298  8.072 -4.735  0.00002  0.06250
-1.500  7.402 -4.360  0.00002  0.04688
-0.521  7.046 -4.048  0.0      0.00781
0.521  7.046 -4.048  0.0      0.00391
1.500  7.402 -4.360  0.00002  0.03906
2.298  8.072 -4.734  0.00002  0.09766
2.819  8.974 -4.965  0.00002  0.07813
3.000  10.000 -4.981  0.0      -0.00391
2.819  11.026 -4.806  0.00002  0.02734

MAXXI= 20
      XI      YI      ZI      F1      F2
3.000  10.000  4.981  0.0      -0.00781
2.819  11.026  4.806  0.00002  0.08594
2.298  11.928  4.515  0.00002  -0.02344
1.500  12.598  4.217  0.00002  -0.03516
0.521  12.954  4.026  0.00002  0.03516
-0.521  12.954  4.026  0.00002  0.03516
-1.500  12.598  4.217  0.00002  -0.03516
-2.298  11.928  4.515  0.00002  0.03125
-2.819  11.026  4.806  0.00002  0.08594
-3.000  10.000  4.981  0.0      0.04297
-2.819  8.974  4.965  0.00002  0.07813
-2.298  8.072  4.735  0.00002  0.06250
-1.500  7.402  4.360  0.00002  0.04688
-0.521  7.046  4.048  0.0      0.00781
0.521  7.046  4.048  0.0      0.00391
1.500  7.402  4.360  0.00002  0.03906
2.298  8.072  4.734  0.00002  0.09766
2.819  8.974  4.965  0.00002  0.07813
3.000  10.000  4.981  0.0      -0.00391
2.819  11.026  4.806  0.00002  0.02734

THETA=GAMMA EX=45.60
7

```

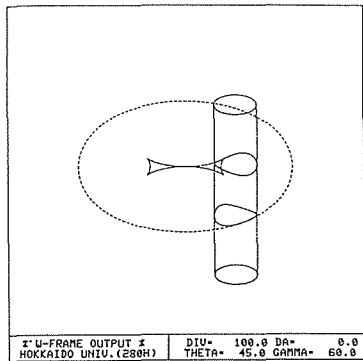


表2 トーラスと円柱との相貫曲線のペナルティ値

ただし,

$$R_3 = \frac{r_1^2 + (R_1 - R_2)^2 - r_2^2}{2r_1 |R_1 - R_2|}$$

$$r = \cos^{-1} R_3$$

$$\beta = \begin{cases} \cos^{-1} \left( \frac{R_2 - R_1}{\sqrt{|s|^2 + (R_2 - R_1)^2}} \right) & \text{for } s \cdot w \leq 0 \\ 2\pi - \cos^{-1} \left( \frac{R_2 - R_1}{\sqrt{|s|^2 + (R_2 - R_1)^2}} \right) & \text{for } s \cdot w > 0 \end{cases}$$

出力結果を図10, 11に示す。

## 8. 数 値 的 評 価

交線上の各点は二つの形状の表面上の点であるから、その形状の直交座標表現の式に交点の座標を代入すれば、その値はゼロとなるはずである。直交座標表現の式をペナルティ関数<sup>3)</sup>、その値をペナルティ値と呼ぶことにする。ここでは、以上で求めた式によって得られた交線上の各点のペナルティ値を計算することによって、それらの交線式の正当性を評価する。表1においてXI, YI, ZIは交線上の各点のx, y, z座標を、F1, F2はその点におけるトーラス1, 2に対するペナルティ値を表す。トーラスのペナルティ値は、例えば、点(0, 13.0, 0)は表面上の点だからゼロ。0.1だけずれた点(0, 13.1, 0)では、-320.0というように非常に大きな値となるので、F1, F2の値は十分小さく、ゼロとみなすことができる。表2は、トーラスと円柱の場合について同様の結果を取ったもので、F1は円柱に対するペナルティ値、F2はトーラスに対するペナルティ値である。ともに十分小さな値となっていることがわかる。

## 9. 結 言

- 曲面をパラメータ表現することにより、トーラスとトーラス、トーラスと線織面は4次方程式、トーラスと球は逆三角関数の形で相貫曲線を求める式が得られた。
- 得られた式を使って、WIRE FRAME 図形を出力し、さらに交線上の各点におけるペナルティ値を計算することによって、視覚的、数値的に交線式の正当性を評価した。

## 参 考 文 献

- 1) Weiss, Ruth A., "BE VISION, A Package of IBM 7090 Fortran Program to Draw Orthographic Views of Plane and Quadric Surfaces" J. ACM, Vol 13, No. 2, Apr. 19pp., 66 194-204.
- 2) Joshua Levin, "A Parametric Algorithm for Drawing Pictures of Solid Objects Composed of Quadric Surfaces" Com. ACM, Vol 19, No. 10, Oct. 1976.
- 3) M. Furukawa, Y. Kakazu, H. Kubo and N. Okino, Studies on the Boundary Evaluators on Object Modeling, Bull. of the JSPE, Vol. 13, No. 2, 1979.