HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	急加熱・急冷される炭素鋼の熱弾塑性応力解析
Author(s)	菅原, 幸夫; Sugawara, Yukio; 石川, 博将 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 121, 1-8
Issue Date	1984-05-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41876
Type	departmental bulletin paper
File Information	121_1-8.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第121号（昭和59年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University. No.121 (1984)

急加熱・急冷される炭素鋼の熱弾塑性応力解析

菅原幸夫　石川博將　秦　謹一*

（昭和58年12月27日受理）

Thermoelastoplastic Stress Analysis of a Steel Bar During Rapid Heating and Rapid Cooling

YUKIO SUGAWARA, HIROMASA ISHIKAWA, and KIN-ICHI HATA

(Received December 27, 1983)

Abstract

The thermoelastoplastic stress analysis of a carbon steel bar, which is heated rapidly, and starts to be cooled rapidly before the steady state of the temperature distribution is reached, is carried out. The A_1 and A_3 transformations on heating and the martensite, bainite, and pearlite transformations on cooling are considered using a continuous cooling transformation diagram.
It is assumed that only the part which is heated over the A_3 transformation temperature on heating can transform into martensite when the cooling rate is sufficiontly large. The numerical calculations are carried out for two typical cases when the heating time is longer or shorter.

The plastic strain in the structure of martensite is larger than that in the other structures. When the heating time is longer, there are structures of martensite, pearlite, and bainite in the quenched steel bar. On the other hand when the heating time is shorter pearlite and martensite are caused, and the surface of the bar has the large amount of tensile stress.

1. 緒　　言

鋼の熱処理に関して，主に焼入れ，焼もどし過程を対象とし応力解析が行われている[1]。著者らは既に[2]，鋼がその表面で加熱され温度分布が定常状態となった後に，急冷あるいは徐冷される際の応力について報告し，焼入れと焼なましを想定した解析を行った。一方例えば表面焼入れのように，鋼を短時間で急加熱・急冷するような熱処理法もあり，この方法は工業上有効なため多用されている。著者らはこの点に着目し，鋼がその表面で急速に加熱され温度分布が定常状態に達する以前に急冷される際の熱弾塑性応力解析を行う。ここで無限に長い炭素鋼（0.45%C 程度）の丸棒が，その表面で無限大の加熱速度にて加熱（以下ステップ状加熱と称す）された後，無限大の冷却速度にて冷却（同ステップ状冷却）されるとする。冷却時に現われる種々の相変態は丸棒内部の温度と冷却時間に依存するとし，CCT 線図を用いてマルテンサイト，パーライト，および中間相（ベーナイト）の生ずる相変態を決定する。ただし相変態に関する取扱いを簡単化する

機械工学第2学科　塑性加工学講座
*現在，北海道工業大学

ために，加熱により A_3変態温度以上に達した部分のみのマルテンサイト変態を考慮する。従って冷却開始後の丸棒内部での温度上昇により A_3変態温度以上になる部分はもはやマルテンサイト変態しないものとする。加熱，冷却中にあらわれる相変態は，既報(2)同様，相変態による比体積の変化を，みかけ上の線膨張係数の変化による体積変化に置き換えて考慮している。他の材料物性値は，加熱，冷却時において，温度と組織に依存し変化するものとしている。解析には，Mendelson の逐次近似法(2,3)（the method of successive eastic solutions）を用いている。

2．解　　　析

2.1 温 度 分 析

初期温度０度で，半径ａなる無限に長い丸棒が，その表面でステップ状に T_0度に加熱され，時間 $t=t_0$経過した後，表面がステップ状に冷却されるとする。丸棒内における熱の発生，吸収，および熱衝撃は考えない。熱伝導率 λ が温度に依存する時の非定常熱流に対し，次の熱伝導方程式が成立する(4)。

$$\mathrm{div}(\lambda \mathrm{grad}\ T)=\gamma C\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

ここでＴは温度，γ は比重，Ｃは比熱であり，これらの温度依存性を考慮し，次元のある定数（添字$_0$）と無次元の温度依存型変数（添字*）の積で表わし(5)次式のように記述する。

$$\lambda=\lambda_0\lambda^*(\bar{\theta}),\quad \gamma=\gamma_0\ \gamma^*(\bar{\theta}),\quad C=C_0\,C^*(\bar{\theta}) \tag{2}$$

ただし $\bar{\theta}=T/T_0$である。ここで温度依存型変数 $\lambda^*(\bar{\theta})$につき，

$$\lambda^*(\bar{\theta})=1+\lambda_1\bar{\theta}+\lambda_2\bar{\theta}^2 \tag{3}$$

とする。半径 rおよび時間ｔに関し次式のように無次元化表示す。

$$\rho=\frac{r}{a},\quad s=\frac{a^{+*}\lambda_0}{a^2\gamma_0 C_0}\cdot t \tag{4}$$

式(4)と，変換温度 ψ についての次式

$$\psi=\int_0^{\bar{\theta}}\lambda^*(\beta)d\beta \tag{5}$$

を用いて式(1)を変形し，軸対称二次元問題の場合として次式を得る(6)。

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=\frac{\partial\psi}{\partial s} \tag{6}$$

ただし，式(4), (6)で熱拡散率 $a^+=a_0^+a^{+*}$の無次元項 $a^{+*}=\lambda^*/(\lambda^*c^*)$=一定としている(7)。ステップ状加熱の際は，式(6)に関し，以下の初期および境界の条件が成立する。

初期条件：$\psi(\rho,0)=0$,

$$\text{境界条件：}\psi(1,s)\equiv\psi_0=\int_0^1\lambda^*(\beta)d\beta \tag{7}$$

式(7)を満足する式(6)の解として次式を得る(4)。

$$\psi=\psi_0\left\{1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}e^{-\alpha_n^2 s}\ \frac{J_0(\alpha_n\rho)}{J_1(\alpha_n)}\right\} \tag{8}$$

ここで J_0，J_1はそれぞれ０次，１次の第１種ベッセル関数であり，α_n (n=１，２，３，……）は J_0（α_n）＝０の正根である。次に加熱開始後，時間 $t=t_0$，つまり無次元時間 $s=s_0$（以後 s_0を加熱時間と称す）経過した時にステップ状冷却を開始する際は，式(6)に関し次の初期および境界

の条件が成立する。

$$\text{初期条件：}\ \psi(\rho,\ 0)=\psi_0\left\{1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\mathrm{e}^{-\alpha_n^2 s_0}\frac{J_0(\alpha_n\rho)}{J_1(\alpha_n)}\right\} \tag{9}$$
$$\text{境界条件：}\ \psi(1,\ s)=0$$

ただし式(9)における s は，ステップ状冷却開始後の時間である。式(9)を満たす式(6)の解として次式を得る[6]。

$$\psi=2\psi_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\mathrm{e}^{-\alpha_n^2 s_0}\frac{J_0(\alpha_n\rho)}{J_1(\alpha_n)}-2\psi_0\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_n^2 s}\frac{J_0(\alpha_n\rho)}{[J_1(\alpha_n)]^2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\mathrm{e}^{-\alpha_n^2 s_0}\times J_1(\alpha_n)\right\} \tag{10}$$

故に，加熱の際の温度分布は式(3)，(5)，(8)を用いて解き $\bar{\theta}$ を得る。同様にして式(3)，(5)，(10)より冷却時の温度分布が算定される。

2.2　応力およびひずみ

初期応力のない，半径 a なる無限に長い丸棒が，初期温度を 0 度とし，加熱あるいは冷却される時の応力，ひずみの算定式[6,8]を以下に示す。例えば半径方向ひずみは，弾性ひずみ ε_r^e，塑性ひずみ ε_r^p，および等方膨張 $\delta_{ij}\int_0^T \alpha dT$（ただし δ_{ij} はクロネッカのデルタ）をそれぞれ加えあわせたものとし，次式により示される。

$$\varepsilon_r=\varepsilon_r^e+\varepsilon_r^p+\delta_{ij}\int_0^T \alpha dT \tag{11}$$

本報告においては，熱伝導率，比熱，比重の他に，線膨張係数 α，縦弾性係数 E，および降伏応力 σ_Y も温度依存性を考慮し，式(2)と同様に

$$\alpha=\alpha_0\alpha^*(\bar{\theta}),\quad E=E_0E^*(\bar{\theta}),\quad \sigma_Y=\sigma_{Y0}\sigma^*(\bar{\theta}) \tag{12}$$

と表示する。$\alpha^*(\bar{\theta})$ については後述するとし，

$$E^*(\bar{\theta})=1+E_1\bar{\theta}^2,\quad \sigma_Y^*(\bar{\theta})=1+\sigma_{Y1}\bar{\theta}+\sigma_{Y2}\bar{\theta}^2+\sigma_{Y3}\bar{\theta}^3, \tag{13}$$

とする。また応力，ひずみは無次元数を用いて表わし，例えば半径方向の無次元応力 σ_r^*，全ひずみ ε_r^* などは次式のように表示する。

$$\sigma_r^*=\frac{1-\nu}{E_0\alpha_0T_0}\sigma_r,\quad \varepsilon_r^*=\frac{1-\nu}{\alpha_0T_0}\varepsilon_r,\ \text{など} \tag{14}$$

ここで ν はポアソン比である。式(11)，(12)などを用い，応力成分は，例えば半径方向成分について，

$$\sigma_r^*=-\frac{1-\nu}{1-2\nu}E^*\int_0^{\bar{\theta}}\alpha^*d\bar{\theta}+\frac{E^*}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{(1-\nu)\varepsilon_r^*+\nu(\varepsilon_\theta^*+\varepsilon_z^*)\right\}-\frac{E^*}{1+\nu}\varepsilon_r^{p*} \tag{15}$$

である。式(15)などをつり合いの式に代入し，適合条件を用いると，各ひずみ成分につき次式を得る。

$$E^*\varepsilon_\theta^*=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\int_0^\rho\varepsilon_\theta^*\frac{\partial E^*}{\partial\rho}d\rho+\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho\rho^2\varepsilon_\theta^*\frac{\partial E^*}{\partial\rho}d\rho+(1+\nu)\frac{1}{\rho^2}\times\int_0^\rho\left(\int_0^{\bar{\theta}}\alpha^*d\bar{\theta}\right)\rho d\rho+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\int_0^\rho\frac{E^*}{\rho}(\varepsilon_r^{p*}-\varepsilon_\theta^{p*})d\rho+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\frac{1}{\rho^2}\times\int_0^\rho\rho E^*(\varepsilon_r^{p*}+\varepsilon_\theta^{p*})d\rho-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho\rho E^*\varepsilon_z^*d\rho+B_0+\frac{B_1}{\rho^2},$$

$$E^*\varepsilon_r^*=\frac{1-2\nu}{1-\nu}\int_0^\rho \varepsilon_\theta^*\frac{\partial E^*}{\partial\rho}d\rho-E^*\varepsilon_\theta^*+(1+\nu)E^*\int_0^{\bar\theta}\alpha^*d\bar\theta+\frac{1-2\nu}{1-\nu}E^*\varepsilon_r^{p*}$$

$$+\frac{1-2\nu}{1-\nu}\int_0^\rho\frac{E^*}{\rho}(\varepsilon_r^{p*}-\varepsilon_\theta^{p*})d\rho-\frac{\nu}{1-\nu}E^*\varepsilon_Z^*+2B_0,$$

$$\varepsilon_Z^*=\frac{1}{\int_0^1 E^*\rho d\rho}\left[(1-\nu)\int_0^1 E^*\left(\int_0^{\bar\theta}\alpha^*d\bar\theta\right)\rho d\rho-\int_0^1\rho E^*(\varepsilon_r^{p*}+\varepsilon_\theta^{p*})\right]. \quad (16)$$

ただし

$$B_0=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left\{2(1-\nu)\int_0^1 E^*\left(\int_0^{\bar\theta}\alpha^*d\bar\theta\right)\rho d\rho+\int_0^1\rho E^*(\varepsilon_r^{p*}+\varepsilon_\theta^{p*})d\rho\right.$$

$$\left.-\int_0^1\varepsilon_\theta^*\frac{\partial E^*}{\partial\rho}d\rho+\int_0^1\rho^2\varepsilon_\theta^*\frac{\partial E^*}{\partial\rho}d\rho-\int_0^1\frac{E^*}{\rho}(\varepsilon_r^{p*}-\varepsilon_\theta^{p*})d\rho\right\},\quad B_1=0 \quad (17)$$

である。式(16)等における塑性ひずみに，von Mises の降伏条件と，Prandtl－Reussの応力－ひずみ増分の関係を用い[8]，微小な負荷変動に伴い生ずる微小な塑性ひずみ増分を加えあわせたものを全塑性ひずみとして算定する。

材料の応力－ひずみ関係は，次式に示す Ramberg－Osgood 則[8,9]により表わす。

$$\varepsilon_t=\frac{\sigma_t}{E}\left\{1+\frac{3}{7}\left(\frac{\sigma_t}{\sigma_Y}\right)^{m-1}\right\} \quad (18)$$

ここで ε_t，σ_tはそれぞれ単軸のひずみ，応力であり，m は加工硬化指数である。

3. 数値計算および結果

3.1 数値計算

数値計算に用いる材料物性値は以下の通り[10]である。

$$\alpha_0=1.4\times10^{-5}\ {}^0K^{-1},\ \lambda_0=51.9\ W/(mK),\ E_0=210.9\,GPa,\ \sigma_{Y0}=294.3\ MPa \quad (19)$$

$$\lambda_1=-6.177\times10^{-2}\mu,\quad \lambda_2=1.847\times10^{-3}\mu^2,\quad E_1=-1.73\times10^{-3}\mu^2 \quad (20)$$

ただし μ は熱負荷の程度を表わす定数であり，$\mu=E_0\alpha_0T_0/(1-\nu)\sigma_{y0}$である。またポアソン比 $\nu=0,4$[7]とし，A_1変態温度 T_{A1}，A_3変態温度 T_{A3}，マルテンサイト変態開始温度T_{MS}，マルテンサイト変態終了温度 T_{Mf}はそれぞれ次のよう[11,12]である。

$$T_{A1}=727^\circ C,\quad T_{A3}=793^\circ C,\quad T_{MS}=391^\circ C,\quad T_{Mf}=326^\circ C \quad (21)$$

次に，線膨張係数 $\alpha^*(\bar\theta)$，加工硬化指数m，降伏応力 $\sigma_Y^*(\bar\theta)$は加熱，冷却の場合について，それぞれ温度および組織に対応するとし，表1に示す。ここで $\alpha^*(\bar\theta)$は各変態温度区間で一定[2,8]とする。

また式(18)に示すmは，本報告においては，温度および組織に依存するとし，$m=m(\bar\theta)$として表示する。

加熱される丸棒表面の温度を $T_0=1000$℃とする。CCT 線図[12]を用いる際には時間 t と温度 T の関係を使用するため，$a^+=9\times10^{-6}\,m^2/sec$[13]，a＝15mmとしている。加熱時間$s_0$は，短時間の加熱として $s_0=0.076$，比較的長い加熱として $s_0=0.365$を選び，両者についてそれぞれ数値計算を行っている。

表 1　材 料 物 性 値

	Structure Temperature	$\alpha(\bar{\theta})$	$m(\bar{\theta})$	$\sigma_y(\bar{\theta})=1+\sigma_{y1}\bar{\theta}+\sigma_{y2}\bar{\theta}^2+\sigma_{y3}\bar{\theta}^3$		
				σ_{y1}	σ_{y2}	σ_{y3}
heat	$0 \leqq \bar{\theta} < \bar{\theta}_{A1}$	1	5	1	$-9.525\times10^{-2}\mu$	$2.478\times10^{-3}\mu^2$
	$\bar{\theta}_{A1} \leqq \bar{\theta} < \bar{\theta}_{A3}$	-3.08	6 ~ 7			
	$\bar{\theta}_{A3} \leqq \bar{\theta} \leqq 1$	1.5	8			
cool	austenite $\bar{\theta}_{Ms} \leqq \bar{\theta} \leqq 1$	1.5	8	0.683	$-4.427\times10^{-2}\mu$	$-5.343\times10^{-3}\mu^2$
	martensite $\bar{\theta}_{Mf} \leqq \theta < \bar{\theta}_{Ms}$	-8.30	1 ~ 8	6.730	$-0.9652\times\mu$	0
	$0 \leqq \bar{\theta} < \bar{\theta}_{Mf}$	0.929	1	1.165	$3.619\times10^{-2}\mu$	0
	ferrite+pearlite+austenite $\bar{\theta}_{A1} \leqq \bar{\theta} < \bar{\theta}_{A3}$	-3.08	6 ~ 7	1	$-9.525\times10^{-2}\mu$	$2.478\times10^{-3}\mu^2$
	$0 \leqq \bar{\theta} < \bar{\theta}_{A1}$	1	5			

$\bar{\theta}_{A1}=T_{A1}/T_0$　$\bar{\theta}_{A3}=T_{A3}/T_0$

$\bar{\theta}_{Ms}=T_{Ms}/T_0$　$\bar{\theta}_{Mf}=T_{Mf}/T_0$

3.2　結　　果

図1に，冷却時における丸棒内の温度分布を示す。実線は $s_0=0.076$ の時の結果であり，一点鎖線は $s_0=0.365$ の時の結果である。二点鎖線は A_3 変態温度を示す。図中の数字 s は冷却開始後の時間であり，s=0 は加熱終了時をも意味する。$s_0 \fallingdotseq 0.076$ の時に，およそ $\rho>0.9$ の範囲が A_3 変態

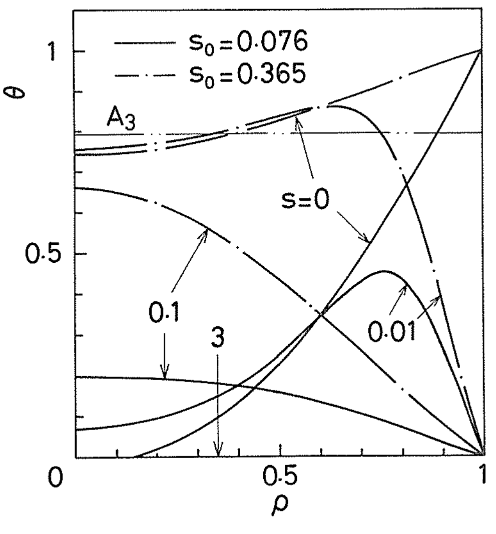

図 1　冷却時の温度分布

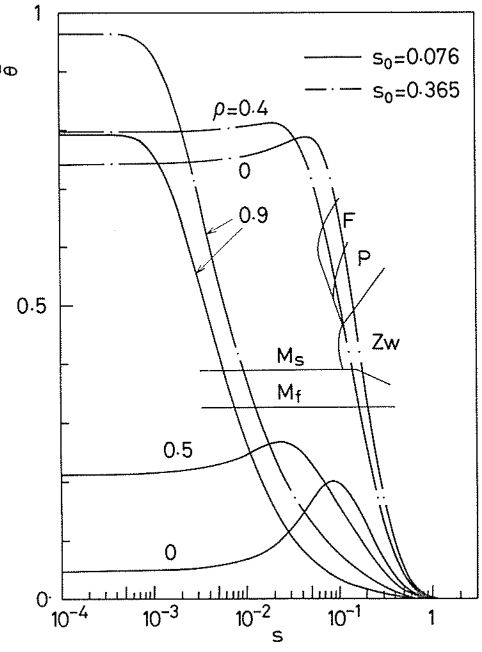

図 2　ＣＣＴ線図および冷却速度

温度以上となり，急冷されることによりマルテンサイト変態する。同様の理由により $s_0=0.365$ の時にはおよそ $\rho>0.4$ の部分がマルテンサイト変態する。いずれの s_0 の時も，$s=3$ の時には $\bar{\theta}=0$ となる。

図2に，CCT線図[12]を細線により示し，丸棒内の各半径位置 ρ について，冷却開始後の時間 s と温度 $\bar{\theta}$ の関係を示す。実線は $s_0=0.076$ の時の結果であり，一点鎖線は $s_0=0.356$ の時の結果である。図中のCCT線図において，領域Fはフェライトを示し，領域Pはパーライト，領域 Z_W は中間相（ベーナイト）を示す。また M_S および M_f と付した線はそれぞれマルテンサイト変態の開始および終了の温度を表わす。$s_0=0.076$ の時には，加熱により A_3 変態温度以上に達した $\rho\geqq0.9$ の部分はマルテンサイトとなる。$s_0=0.365$ の時には，A_3 変態温度以上に加熱される $\rho=0.4$ の部分は冷却速度が遅いためマルテンサイト変態せず，ベーナイトとなる。いずれの s_0 の時も $\rho=0$ の部分は A_3 変態温度以上に加熱されず，パーライトのままである。図3に，数値計算により推定される冷却後の組織を，丸棒断面図にて示す。上側の断面図は $s_0=0.365$ の時に生ずる組織を示し，下側は $s_0=0.076$ とした時の組織である。$s_0=0.365$ の時にはおよそ $\rho>0.5$ の部分がマルテンサイトとなり，$0.4\leqq\rho\leqq0.5$ の部分はベーナイト，$\rho<0.4$ の部分はパーライトとなる。加熱時間が比較的長いため，A_3 変態温度以上に達する部分は広いが，中心に近い部分は冷却速度が小さくなるためマルテンサイト変態をせず，ベーナイトを生ずる。$s_0=0.076$ の時には，およそ $\rho\geqq0.9$ の部分がマルテンサイトとなり，$\rho<0.9$ の部分はパーライトである。加熱時間が短かいため，A_3 変態温度以上に加熱される部分は狭く，十分な冷却速度が得られてマルテンサイト変態し，ベーナイトは生じない。

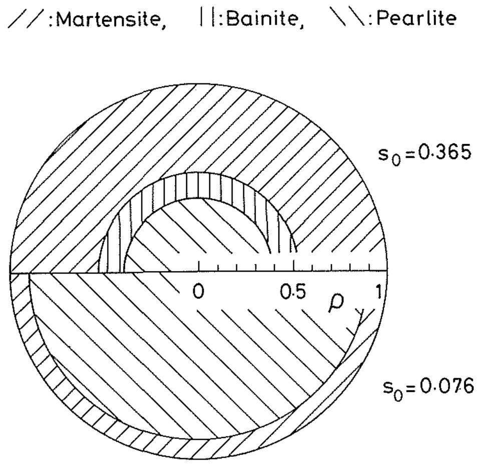

図3　冷却後の組織

図4に，冷却後の塑性ひずみ分布を示す。$s_0=0.076$ の時の結果を実線により示し，一点鎖線により $s_0=0.365$ の時の結果を示す。丸棒表面（$\rho=1$）における ε_r^{p*}，ε_θ^{p*}，ε_z^{p*} は，$s_0=0.076$ の時にはそれぞれ0.557，−0.195，−0.362であり，$s_0=0.365$ の時にはそれぞれ−0.477，0.241，0.236である。いずれの s_0 の時も，ごく表面を除きマルテンサイト部分の塑性ひずみは，ε_r^{p*} は圧縮，ε_θ^{p*}，ε_z^{p*} は引張りである。$s_0=0.076$ の時に表面近傍ではパーライト部より大きな値の ε_θ^{p*}，ε_z^{p*} である。$s_0=0.365$ の時も同様であり，マルテンサイト部分の塑性ひずみは，他の組織における塑性ひずみ ε_θ^{p*}，ε_z^{p*} より大きい。図5に，冷却後の応力分布を示す。実線は $s_0=0.076$ の時の

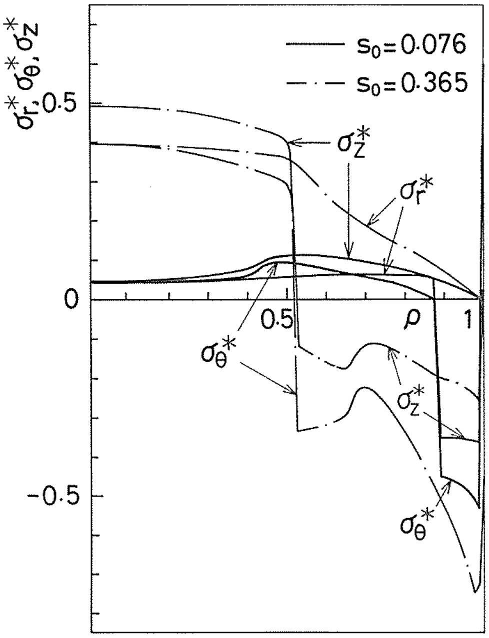

図4　冷却後の塑性ひずみ

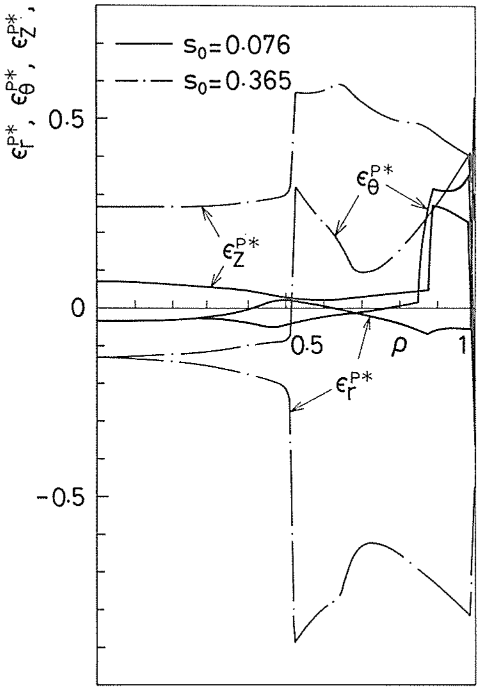

図5　冷却後の応力

結果を示し，一点鎖線は s_0＝0.365の時の結果を示す。丸棒表面において，s_0＝0.076の時には σ_θ^*＝0.395，σ_z^*＝0.598であり，s_0＝0.365の時には σ_θ^*＝－0.452，σ_z^*＝0.023である。s_0＝0.076の時に，マルテンサイト組織とパーライト組織の境界付近に著しい応力差が生ずる。σ_θ^*，σ_z^*は，表面においては引張りの値であるが，表面近傍は圧縮の値である。s_0＝0.365の時には，マルテンサイトとベーナイトとの間に大きな応力差を生ずる。表面においては，σ_θ^*は圧縮応力，σ_z^*は小さな値の引張り応力である。s_0＝0.076と同様に，σ_θ^*，σ_z^*は表面近傍において圧縮の応力値である。

4．結　　　言

表面が短時間に急加熱・急冷される炭素鋼丸棒の熱弾塑性応力解析を行い，以下の結論を得た。ここで丸棒の表面は，無限大の加熱速度にて加熱された後，温度分布が定常状態に達する以前に，無限大の冷却速度にて冷却されるとしている。加熱時間が比較的短い場合と長い場合について数値計算を行い，生ずる残留応力，組織について検討を行った。なお，簡単化のため，加熱過程において A_3変態温度以上に達する部分が，十分な冷却速度にて冷却されるとマルテンサイト変態するとし，冷却開始後に遅れて A_3変態温度以上に達する部分のマルテンサイト変態の考慮はしない。

(1)　加熱時間が短い時は，A_3変態温度以上に加熱された部分はマルテンサイトとなる。加熱時間が長い時は，A_3変態温度以上に加熱された部分のうち，冷却速度の速い部分はマルテンサイトとなり，遅い部分は中間相（ベーナイト）となる。

(2)　加熱時間の長・短にかかわらず，冷却後に，丸棒表面近傍における円周および軸方向応力は圧縮の値となる。ただし短時間の加熱の場合は，表面が大きな値の引張り応力状態となる。従っ

て焼割れ発生の可能性があるが，表面近傍が圧縮の応力値のため，内部にまで割れが進行しないと予想される。

(3) マルテンサイトを生じた部分は，他の部分に比較し大きな塑性変形を生ずる。

参考文献

(1) 井上達雄，原口賢一，木村茂人，材料，25（昭51），273，p521～526.
(2) 菅原幸夫，石川博将，秦　謹一，日本機械学会論文集，48（昭57），433A，p1209～1216.
(3) Mendelson, A.; Plasticity, Theory and Application (1968), p164, Macmillan.
(4) Carslaw, H.S., and Jaeger, J.C.; Conduction of Heat in Solids. 2nd ed. (1959), Clarendon Press.
(5) 石川博将，日本機械学会論文集，43（昭52），375. p4019～4028.
(6) 石川博将，秦　謹一，日本機械学会論文集，45（昭54），392，p371～378.
(7) Nowinski, J., Trans. ASME. SER. E. 29(1962).2. p399～407.
(8) 菅原幸夫，石川博将，秦　謹一，工学部研究報告，117号，（昭59），p31～40.
(9) Ramberg, W.and Osgood, W.R., NACA TN902(1943).
(10) 利岡靖雄，鉄と鋼，第62年（1976），13，p1756～1766.
(11) Barrett, C.S., and Massalski, T.B.,; Structure of Metals, 3rd ed.(1966). MacGraw-Hill.
(12) 金属データブック，日本金属学会編（1974），丸善.
(13) Odqvist, F.K.G.,; Mathematical theory of Creep and Creep Rupture, 2nd ed(1974). Clarendon Press.