



Title	セールス巡回路に関する二・三の考察（その3）
Author(s)	榊原, 勝昭
Citation	北海道大學工學部研究報告, 122, 23-28
Issue Date	1984-07-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41884
Type	departmental bulletin paper
File Information	122_23-28.pdf



セールス巡回路に関する二・三の考察 (その 3)

榊 原 勝 昭
(昭和 59 年 3 月 31 日受理)

A Method to obtain the Shortest Hamilton—Line on a Traveling Salesman problem

Katsuaki SAKAKIBARA
(Received March 31, 1984)

Abstract

A method to obtain all Hamilton—lines which are shorter than a Hamilton—line for a given example is presented in this work. In an example composed of various points, we can obtain the shortest Hamilton—line with less loss by repeatedly using this method.

1. ま え が き

任意の例題において、それに関する任意のハミルトンラインが与えられた時、それよりも短いものの有無を判定し、もし有る場合には、それを要領よく発見し得る方法を見出した。従ってこの方法の手順を繰り返せば、最短のハミルトンラインに到達出来る。ここでは、一般性を損なわない範囲で簡素化された例によってこの方法の手順を示した。この方法は、従来、最短である事の一般的証明法の唯一のものとなっていたいわゆる全数検査を含んでいない。

2. 本 文

図 1 の様な配置をした 7 個の点を例題とする。各々の点から他の 6 個の点に到る距離を短い順にならべたものが、表 1 である。この例題に関する任意のハミルトンラインを 1 つ作る。それは目見当で得ても良いし、何らかの手順に従がって得たものでも良い。ここでは次の様にして得たものを使う。この表の第 1 行目に示されている距離を、図 1 に結線する。それが、図 2 である。ここに示された辺だけでは、ハミルトンラインを作れないので、更に、表 1 の第 2 行目のものも加えて、図 3 を作り、この中に形成されているハミルトンライン (図 4) を、上に述べた任意のハミルトンラインに見立てる事にする。このサンプルの長さは $l_0=32.07$ である。

次に、7 個の頂点の間に出来る 21 個の辺を短いものから順に並べて、表 2 を作る。この 21 個の辺から、7 個の辺の選び方は ${}_{21}C_7$ 通りあるが、本例題の如何なるハミルトンラインに対応する辺の組も、ここに含まれているのは明らかである。但し、全ての組合せがハミルトンラインに対応するわけではない。

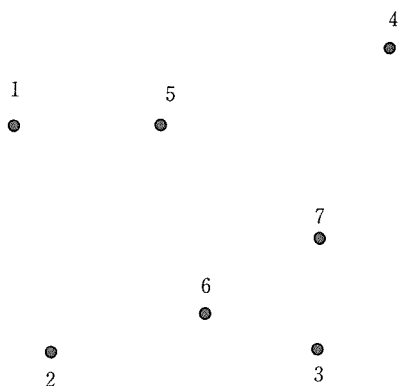


図-1

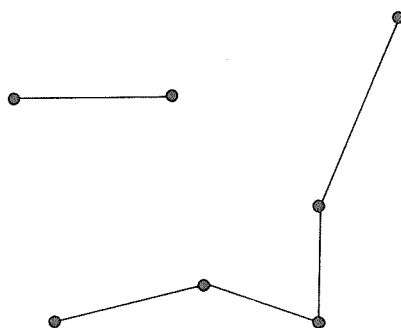


図-2

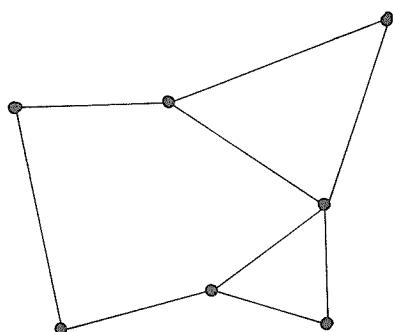


図-3

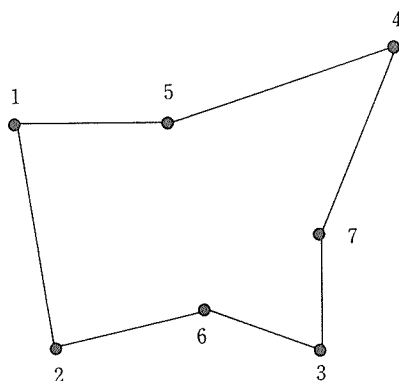


図-4

表-1 各点からの距離

1	4.00	6.08	7.07	8.54	9.22	10.21
	5	2	6	7	3	4
2	4.12	6.08	6.71	7.00	7.62	12.00
	6	1	5	3	7	4
3	3.00	3.16	7.00	7.21	8.25	9.22
	7	6	2	5	4	1
4	5.39	6.32	8.25	8.60	10.20	12.00
	7	5	3	6	1	2
5	4.00	5.00	5.10	6.32	6.71	7.21
	1	7	6	4	2	3
6	3.16	3.61	4.12	5.10	7.07	8.64
	3	7	2	5	1	4
7	3.00	3.61	5.00	5.39	7.62	8.54
	3	6	5	4	2	1

ここで、表2の最小の値(3.00, 3-7)から始まる連続6個の値(最後は5.00, 5-7)を足し算するとその値は $A_6=22.89$ となり、 $l_0-A_6=9.18$ となる。表2においてこの9.18を最初に越える値は19項めの10.0である。従って、19番目以後の項を1個以上含んでいる組合せは全て l_0 より大きくなる。即ち、 ${}_{21}C_7$ の組合せのうち、 l_0 より小さくなるものは、19番目以後の項を1つも含んでいないものに限る事が判る。更に、表2の最小のものから連続5個を足すと $A_5=17.89$ と

表-2 頂点間の距離を短い順に並べたもの

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3.00	3.16	3.61	4.00	4.12	5.00	5.10	5.39	6.08	6.32	6.71	7.00	7.07	7.21	7.62	8.25	8.54	8.60	10.0	10.2	12.0
3-7	3-6	6-7	1-5	2-6	5-7	5-6	4-7	1-2	4-5	2-5	2-3	1-6	3-5	2-7	3-4	1-7	4-6	1-3	1-4	2-4

表-3 組み合わせに関する制約条件

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3-7	3-6	6-7	1-5	2-6	5-7	5-6	4-7	1-2	4-5	2-5	2-3	1-6	3-5	2-7	3-4	1-7	4-6	1-3	1-4	2-4
2	1	2			2		1	4				6						3		
																		(3)~0		
																		(9)~1		
																		(13)~2		
																		(14)~3		
																		(16)~4		
																		(18)~5		
																		(19)~6		

なり, $l_0 - A_5 = 14.18$ となる。表2の中で連続する2項の和が最初に14.18を超えるのは、13番目と14番目の項でその値は14.21である。この事は、13番目以後の項から2項を採った組合せは全て l_0 より長くなる事を示している。即ち、 ${}_{21}C_7$ の中の組合せのうち、 l_0 より短い可能性のあるものは、13番以後の項からは1つしかえらんでいないものに限られる事になる。以下同様に A_4 , A_3 , A_2 , A_1 及び A_0 を作り、対応する制約条件を求める。それらをまとめたものが表3である。括弧内は項数であり、その後ろの数字がその範囲から選び得る最大の項数を示している。例えば、表3の一番下の(19)~6は、1番目と2番目の項から少なくとも1項を選び、従って残りの3番目以後の19項からは多くても6個の項しか選んでいない組合せの中にしか、 l_0 より小さいものが存在しない事を示している。この事情を式で示すと

$${}_{21}C_7 = {}_2C_0 \cdot {}_{19}C_7 + {}_2C_1 \cdot {}_{19}C_6 + {}_2C_2 \cdot {}_{19}C_5 \quad (1)$$

において、右辺の第1項に属する組合せは全て l_0 より大きなものばかりという事である。

更に、表3の3番目以後の19項からは多くても6項しか選んでいなくても、例えば4番目以後から6項選んでしまっているものも l_0 より大きくなってしまふ。この事情は式(1)を

$${}_{21}C_7 = {}_2C_0 \cdot {}_{19}C_7 + {}_2C_1 ({}_1C_0 \cdot {}_{18}C_6 + {}_1C_1 \cdot {}_{18}C_5) + {}_2C_2 \cdot {}_{19}C_5 \quad (2)$$

と変形すれば、右辺の括弧内の第1項に属する組合せが全て l_0 より大となる事を示している。

以下同様に、表3にまとめられた制約条件を全て加味すべく式の変形を続けると、最終的に

$$\begin{aligned} {}_{21}C_7 = & [{}_2C_0 \cdot {}_{19}C_7 + {}_2C_1 \cdot {}_1C_0 \cdot {}_{18}C_6 + {}_2C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_2C_0 \cdot {}_{16}C_5 + {}_2C_2 \cdot {}_3C_0 \cdot {}_{16}C_5 + {}_2C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot ({}_2C_1 \cdot \\ & {}_2C_0 \cdot {}_{14}C_4 + {}_2C_2 \cdot {}_3C_0 \cdot {}_{13}C_3) + {}_2C_2 \cdot ({}_3C_1 \cdot {}_2C_0 \cdot {}_{14}C_4 + {}_3C_2 \cdot {}_3C_0 \cdot {}_{13}C_3 + {}_3C_3 \cdot {}_7C_0 \cdot {}_9C_2) \\ & + {}_2C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot ({}_2C_1 \cdot ({}_2C_1 \cdot {}_1C_0 \cdot {}_{13}C_3 + {}_2C_2 \cdot {}_5C_0 \cdot {}_9C_2) + {}_2C_2 \cdot ({}_3C_1 \cdot {}_4C_0 \cdot {}_9C_2)) \\ & + {}_2C_2 \cdot ({}_3C_1 \cdot ({}_2C_1 \cdot ({}_1C_0 \cdot {}_{13}C_3) + {}_2C_2 \cdot ({}_5C_0 \cdot {}_9C_2)) + {}_3C_2 \cdot ({}_3C_1 \cdot {}_4C_0 \cdot {}_9C_2)) \\ & + {}_2C_2 \cdot ({}_3C_1 \cdot ({}_2C_1 \cdot ({}_1C_0 \cdot {}_{13}C_3) + {}_2C_2 \cdot ({}_5C_0 \cdot {}_9C_2)) + {}_3C_2 \cdot ({}_3C_1 \cdot {}_4C_0 \cdot {}_9C_2)) \end{aligned}$$

は1項だけを選び、第2欄の1項と第3欄の2項は必ず選ばれ(欄の中の項数と選ぶべき項の数＝○印の数が同数だから)、第4と第5の欄は合併しており合計3個の項から2個選ばれ、同じく6・7の同合欄の10項からは1個だけが選ばれ、第8欄からは1個も選ばれずに作られる組合せが、この行に属している。欄の番号の下数字はその欄の項数を表わし、項の番号につけられた○印は、その項がサンプルラインの要素である事を示している。

次にこの各行について、 l_0 より小さいハミルトンラインが存在する可能性の有無を調べる。

第1行と第2行の場合は、許された範囲内でどんな選び方をしても、その組合せの各要素に、サンプルの要素の大きくないものを1対1の対応をつけ得る。従って、この場合の組合せに対応する長さは全て l_0 を越えてしまう事になる。

第3行と第4行の場合には、第2欄と第3欄に固定された3個の要素が部分的な閉路を作っており、これは、この行に属する組合せで、ハミルトンラインを形成し得ない事を意味する。

第5行の組合せで最小の値のものは、○印の位置の項ばかり7個選んだものであるが、その値は $32.88 > l_0$ である。この事は、 l_0 よりも小さくなるものがない事を意味している。

第6行はちょっと複雑である。第1欄で(3-7)を採れば、第2欄で(6-7)が固定されているので、それ以上7がらみのものは選べなく従って、第4・第5の合同欄の3項のうち(5-6)しか選べない事になるが、これは第2欄と第3欄で固定された(6-7)、(2-6)の6と相まって、ハミルトンラインになる事を防いでいる。第1欄で(3-6)の方を採れば、これまた6がネックとなってハミルトンラインをなし得ない。即ち、この行にはハミルトンラインをなし得る組合せは存在しないのである。

第7と第8行についても第6行と同じ事がいえる。

第9行と第10行は、第2・第3の合同欄の3項から、(6-7)を採れば第1欄の(3-7)、(3-6)と部分閉路を作りハミルトンラインになれなく、(6-7)以外のものを採れば、サンプルの要素との1対1対応で l_0 よりも大きくなってしまふ事が判る。

第11行と第12行の場合には、第2・第3の合同欄の3項のどれを選んでも、第1と第4欄に固定された要素との関係で、ハミルトンラインをなし得ない事が判る。

第13行においては、第2・第3の合同欄の(6-7)は第1欄の項と部分閉路をなすので選べなく、(1-5)、(2-6)を採らざるを得ないが、この場合は、最小のものでも、 l_0 よりも大きくなってしまふのが見える。

第15行は第2・第3の合同欄で(6-7)を採ると第1欄の項と部分閉路を作るので、(1-5)と(2-6)を選ばなければならないが、すると第1欄の(3-6)と合わせて6が2度出てしまうので、第4・第5の合同欄では(5-6)は採る事が出来ず、(5-7)と(4-7)を採る外なくなり、すると今度は第1欄の(3-7)と合わせて7が3度出てしまう。従って、この行にもハミルトンラインに対応する組合せは存在しないのである。

第16行においても同様に、6又は7が3度出てしまいハミルトンラインを作り得ない。

第17行と第18行は第1欄と第2欄に固定された3つの項が部分閉路を作り、この行にもハミルトンラインは存在しない事が判る。

第14行だけが文句のつけ様がなく残ってしまう。ここの条件で作れる組合せの数は ${}_2C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_9C_0 = 54$ 通りであるが、ここにもハミルトンラインをなさないものが含まれている。即ち第2・第3の合同欄で(6-7)を採れば第1欄の二つの項とで部分閉路を作ってしまう、それを除けば ${}_2C_2 \cdot {}_{3-1}C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_9C_0 = 18$ 通りとなる。これの中で第4・第5の合同欄で(5-6)を採ると既に固

定された (3-6), (2-6) の項と相まってハミルトンラインを形成し得ない。すると残されたものは ${}_2C_2 \cdot {}_{3-1}C_2 \cdot {}_{3-1}C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_9C_0 = 12$ 通りとなる。この 12 通りのうち l_0 よりも小さくなるものは唯 1 通りしかなく、それは、(3-7), (3-6), (1-5), (2-6), (5-7), (1-2), (4-5) であるがこれは 5 を 3 個含んでいるのでハミルトンラインをなさない。ちなみに、サンプルはここに含まれている。

以上の事は、サンプルとして選んだハミルトンラインよりも短いものが存在しない事を示している。即ち、サンプルラインが、従来の総列举による“全数検査”とは異なる方法で、最短のハミルトンラインである事が示されたのである。

ここでは、えらんだサンプルが偶々そのまま最短のものであったが、そうでなければ、表 4 のいくつかの行が行全体として失格になる事なく残るであろう。そして、それらの行に含まれるハミルトンラインの数が手頃なものであれば、その部分を列举比較して最短のものを選べばよいし、相当に多くのものが残っているのなら、一部だけを抜き出して、その中の最小のものを新たなサンプルに見立てて、以上を示したと同じ手順を繰り返せば、何度目かには、残りの範囲が手頃な量になる。勿論、更に繰り返して、サンプル以下のものはないという所まで追いこむ事も出来る。

3. あ と が き

以上の内容から、ここに示した方法が、如何なる例題に対しても適用出来る事は明らかになっていると思うが、例題の頂点の数はいくらかでも増し得るわけで、その数がどれ位の時にどの程度の作業量の短縮につながるのか等は検討中である。如何なる例題においても、サンプルが短かければ短い程、作業量は少なくて済み、従って、最短のハミルトンラインとおぼしきものの真偽の判定には威力を発揮すると考えられる。又、セールス巡回路の問題では、稠密部分と孤立している頂点が厄介なものとしてついて廻るが、前者は、表 3 の初めの部分に集まり、後者は終りの方に集まり、従って、それらの影響は、表 4 の下部又は上部の行に集中し、ハミルトンラインになり得ないか或いは l_0 より長いとしておおいに棄てる事が出来るとは思われるが、更になにがしかの工夫がある様に思う。最後に、ハミルトンラインの最短のものがある 1 行だけにまで追いこむまで、この方法を繰り返さない場合には、可能性のない不適な部分を束にして除外しているとはいえ、“全数検査法”の変種の一つであると見なす事も出来る事も指摘しておく。

参 考 文 献

- 1) Busacker, R. G. & Saaty, T. L.: Finite Graphs and Networks. Press, 1965.
- 2) 伊理正夫: グラフ理論とその応用, 電子通信学会誌 12 月号(1971).
- 3) 反町洋一: “輸送システム”, 電子通信学会誌 4 月号 (1975).
- 4) 大附辰夫: “大規模組合せ問題におけるヒューリスティック算法” 同上