北海道大学工学部研究報告
第123号（昭和59年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University. No. 123(1984)

ISMにおける一般化完全推論行列の理論

加 瀬 誠 志* 大 内 東**
栗 原 正 仁** 加 地 郁 夫**

（昭和59年6月30日受理）

Implication structures for generalized Implication matrix in ISM

Satoshi KASE, Azuma OHUCHI, Masahito KURIHARA and Ikuo KAJI

(Received June 30, 1984)

Abstract

In this paper, the theory of generalized complete implication matrix is described which expresses the implication structures of interpretive structural modeling (ISM). Explicit expression of the complete implication matrix is obtained by analyzing the implication relations. A simple three-step algorithm is proposed for generating the complete implication matrix by using this result. The theory makes it possible to do transitive embedding process of ISM flexibly. The`results obtained in this paper includes a Warfield' interconnection theory as a special case.

1. まえがき

現代のシステム工学が対象とするものは大規模，複雑，多目的かつあいまいなシステムへと広がっている。これらのシステムの構造を解析し，十分に把握するにはもはや計算機の膨大な処理能力の援助を抜きにしては考えられないであろう。計算機援用のもとでのシステム解析の一手法に構造モデリング法があり，これの代表的なものとして，J. N. Warfield氏が中心となって開発したISM (Interpretive Structural Modeling)法がある。

Warfied氏は文献(2)において，このISM法における推移的結合（Transitive coupling）を実現する手段として完全推論行列Ψを導入している。推移的結合とは，二つのサブシステムを推移的二値行列AとBで表わし，結合したシステムをMで表わすと，可到達行列

$$M=\begin{bmatrix} A & X \\ Y & B \end{bmatrix} \tag{1}$$

を求める問題となる。ここで，AとBは既知の可到達行列であり，XとYは未知の行列である。XとYの間には推論関係があり，この関係にもとづいてXとYに値1と0を埋めていく。この推論関係を完全に表わしているのが完全推論行列である。

本論文ではMの構造を(1)式のようにブロック化されているものに限定せずに，一般的なM(未知要素を任意の位置に含むもの，ただしMは反射的)に対して，一般化推論行列Ψおよび一般化

＊情報工学専攻 （協力講座）系統工学講座
＊＊電気工学科 系統工学講座

完全推論行列 Ψ^*（本論文では以後単に推論行列，完全推論行列と呼ぶ）を定義し，Ψ^*の性質を明確にすることによって，ISM における推論構造を理論的に解析し，さらに Ψ^*生成のアルゴリズムを示す。すなわち

(1) Ψ^*の行列成分を M から計算する式を得ている。

(2) Ψ^*を求めるアルゴリズムを提案している。

(3) Ψ^*を詳細に解析している。

(4) 推移的結合は本理論の特別な場合であり，完全に包含することを示している。

などである。

2. 完全推論行列の一般化理論

2．1 諸記号および諸定義

〔諸記号〕 本論文で使用する記号を以下に示す。代数は特に断わらない限りブール代数に従う。

$N=\{1,\ 2,\cdot\cdot\cdot,\ n\}$：システム要素に対応する添字の集合。

$J=N\times N$：すべての要素二項対 (i, j) の集合。

$\hat{R}$：システム要素間の二項関係を表わすテートメント(Contextual relation)。$\hat{R}$ は推移的であるとする。

R, $\bar{R}$, $\tilde{R}$：いずれも N 以上の二項関係で，

${}_i\hat{R}_j$ が成り立つとき ${}_iR_j$

${}_i\hat{R}_j$ が成り立たないとき ${}_i\bar{R}_j$

${}_i\hat{R}_j$ が成り立つか否か現段階で不明のとき ${}_i\tilde{R}_j$ と記す。

M：N を添字集合とする正方行列で，その (i, j) 要素は次式で考えられる。

$$M_{ij}=\begin{cases}1, & {}_iR_j\\ 0, & {}_i\bar{R}_j\\ x_{ij}, & {}_i\tilde{R}_j\end{cases} \tag{2}$$

ただし，X_{ij}は未知数（ブール変数）である。

${}_c(M)_i$：M の i 列成分。

${}_r(M)_j$：M の j 行成分。

以下では便宜上，$\hat{R}$ は推移的であるほか反射的であるとする。すなわち，すべての $i\in N$に対して，${}_i\hat{R}_i$が成り立つ。すなわち，$M_{ii}=1$ である。

〔定義１〕 垂直添字集合 V と水平添字集合 H を持つ反射的二直行列 Ψ が推論行列であるとは

$\Psi_{ij}(V,\ H)=1 \Longrightarrow V_i\rightarrow H_j$

$\Psi_{ij}(V,\ H)=0 \Longrightarrow V_i\nrightarrow H_j$

であることを言う。

〔定義２〕 (2)式の M に対して

(1) M が無矛盾であるとは

$$M_{ij}=0,\ M_{ik}=M_{kj}=1$$

を満たす i, j, $k\in N$ が存在しないことを言う。

(2) M が極大であるとは，任意の未知数 x_{ij}の添字の組(i, j)に対して以下がいずれも成り立つ

ことを言う。

$M_{kj}=0$，$M_{ki}=1$ なる $k\in N$ が存在しない。

$M_{ik}=0$，$M_{jk}=1$ なる $k\in N$ が存在しない。

$M_{ik}=M_{kj}=1$ なる $k\in N$ が存在しない。

(3) M が可到達行列であるとは

$$M+I=M \quad (反射性) \tag{3}$$

$$M^2=M \quad (推移性) \tag{4}$$

が成り立つことを言う。M が可到達行列ならば，M^T も可到達行列である。

2.2　完全推論行列の一般化

完全推論行列はすでに述べたように，推移的結合における推論関係を表わすものであるが，M を一般化することによって，推移的具象化における推論関係を表わすことができる。このとき M の性質としての無矛盾性，極大性が満たされ，かつ M は可到達行列となっていればよい。以下ではこれを満足する完全推論行列を生成するための定理について述べる。

〔定理1〕　M から生成される推論行列は以下のとおりである。

$$M(r(M)i,\ r(M)i) \tag{5}$$

$$M_{ji}I(r(M)i,\ r(M)j) \tag{6}$$

$$M(c(\overline{M})i,\ c(\overline{M})i) \tag{7}$$

$$M_{ji}I(c(\overline{M})i,\ c(\overline{M})j) \tag{8}$$

$$\overline{M}^T(r(M)i,\ c(\overline{M})i) \tag{9}$$

$$\overline{M}_{ij}I(r(M)i,\ c(\overline{M})j) \tag{10}$$

（証明）　付録の証明1を参照。

定理1より M に対する推論行列 Ψ の (i, j) ブロック要素を求めることができる。以下にそれを示す。

1)　M の1－1推論行列　　i 行から j 行への推論行列を考える。いま $M_{ip}\to M_{jq}$ であるとすると，(5)式，(6)式よりそれぞれ

$\delta(i,j)M_{pq}=1$，$\delta(p,q)M_{ji}=1$

である。これらのいずれかが成立すればよいから，

$\delta(i,j)M_{pq}+\delta(p,q)M_{ji}=1$

が成立していればよい。この式において

$i=j$ の場合　$\delta(i,j)M_{pq}+\delta(p,q)M_{ji}=M_{pq}$

$i\neq j$ の場合　$\delta(i,j)M_{pq}+\delta(p,q)M_{ji}=\delta(p,q)M_{ji}$

であるから

$$\Psi^{ij}_{MM}=\delta(i,j)M+\bar{\delta}(i,j)M_{ji}I \tag{11}$$

である。

2)　M の0－0推論行列　　i 列から j 列への推論行列を考える。いま $\bar{M}_{pi}\to\bar{M}_{qj}$ であるとすると，(7)式，(8)式よりそれぞれ

$\delta(i,j)M_{pq}=1$，$\delta(p,q)M_{ji}=1$

である。これは1)の場合と同じである。よって

$$\Psi^{ij}_{\overline{M}\overline{M}}=\Psi^{ij}_{MM} \tag{12}$$

である。

3)　Mの1－0推論行列　　i行からj列への推論行列を考える。いま$M_{ip} \to M_{qj}$であるとすると，(9)式，(10)式よりそれぞれ

$$\delta(i,j)\overline{M}^{T}{}_{pq}=1,\ \delta(p,q)\overline{M}_{ij}=1$$

である。これらのいずれかが成立すればよいから，

$$\delta(i,j)\overline{M}^{T}{}_{pq}+\delta(p,q)\overline{M}_{ij}=1$$

が成立していればよい。この式において，

i＝jの場合　$\delta(i,j)\overline{M}^{T}{}_{pq}+\delta(p,q)\overline{M}_{ij}=\overline{M}^{T}{}_{pq}$

i≠jの場合　$\delta(i,j)\overline{M}^{T}{}_{pq}+\delta(p,q)\overline{M}_{ij}=\delta(p,q)\overline{M}_{ij}$

であるから，

$$\Psi_{M\overline{M}}^{ij}=\delta(i,j)\overline{M}^{T}+\bar{\delta}(i,j)\overline{M}_{ij}I \tag{13}$$

である。

定理1からMの0－1推論行列は存在しない。ゆえにΨは以下のように書ける。

$$\Psi=\begin{bmatrix}\Psi_{\overline{M}\overline{M}} & \phi \\ \Psi_{M\overline{M}} & \Psi_{MM}\end{bmatrix} \tag{14}$$

ここで$\Psi_{\overline{M}\overline{M}}$はMの0－0推論行列であり，(c($\overline{M}$)，c($\overline{M}$))で添字付けられる。$\Psi_{MM}$はMの1－1推論行列であり，(r (M)，r (M)) で添字付けられる。$\Psi_{M\overline{M}}$はMの1－0推論行列であり，(r (M)，c ($\overline{M}$)) で添字付けられる。

ここでΨは推移性を有するから，完全推論行列Ψ^*はΨの推移的閉包をとればよい。次にこのΨからΨ^*を求める定理を示す。

〔補助定理〕　無矛盾，極大な可到達行列Mにおいて以下が成り立つ。

$$\overline{M}^{T}=\overline{M}^{T}M \tag{15}$$

$$\overline{M}^{T}=M\overline{M}^{T} \tag{16}$$

（証明）　付録の証明2を参照。

〔定理2〕　Ψが(14)式で与えられるとき，$\Psi^*=\Psi^2$であり，以下のように書ける。

$$\Psi^*=\begin{bmatrix}\Psi^*{}_{\overline{M}\overline{M}} & \phi \\ \Psi^*{}_{M\overline{M}} & \Psi^*{}_{MM}\end{bmatrix} \tag{17}$$

ただし，

$$\Psi^*{}_{\overline{M}\overline{M}}^{ij}=M_{ji}M \tag{18}$$

$$\Psi^*{}_{M\overline{M}}^{ij}=M_{ji}\overline{M}^{T}+\overline{M}_{ij}M \tag{19}$$

$$\Psi^*{}_{MM}^{ij}=\Psi^*{}_{\overline{M}\overline{M}}^{ij}=M_{ji}M \tag{20}$$

（証明）　詳細な証明は付録の証明3を参照。証明の概略は以下のとおりである。

Ψの推移的閉包は$\Psi^{k-1}\neq\Psi^{k}=\Psi^{k+1}$となるkまでΨをべき乗すれば得られるので，$\Psi\neq\Psi^2=\Psi^3$を示せばよい。(14)式のΨは下三角ブロック行列であるので，Ψ^2，Ψ^3はそれぞれ以下のように書ける。

$$\Psi^2=\begin{bmatrix}\Psi^2{}_{\overline{M}\overline{M}} & \phi \\ \Phi^2 & \Psi^2{}_{MM}\end{bmatrix},\quad \Psi^3=\begin{bmatrix}\Psi^3{}_{\overline{M}\overline{M}} & \phi \\ \Phi^3 & \Psi^3{}_{MM}\end{bmatrix}$$

ここで，$\Phi^2=\Psi_{M\overline{M}}\Psi_{\overline{M}\overline{M}}+\Psi_{MM}\Psi_{M\overline{M}}$，$\Phi^3=\Phi^2\Psi_{\overline{M}\overline{M}}+\Psi^2{}_{MM}\Psi_{M\overline{M}}$である。

あとは補助定理と(11)～(13)式を用いてΨ^2とΨ^3の第(i, j)ブロックを実際に計算すれば以下の式を得る。

$$\Psi^*{}_{\overline{M}\overline{M}}^{ij}=\Psi^*{}_{MM}^{ij}=\delta(i,j)M+\bar{\delta}(i,j)M_{ji}M$$

$$\Psi^*{}_{M\overline{M}}^{ij}=\delta(i,j)\overline{M}^{T}+\bar{\delta}(i,j)(M_{ji}\overline{M}^{T}+\overline{M}_{ij}M)$$

ここで，Mの反射性より$M_{ii}=1$，$\overline{M}_{ii}=0$に注意すると(18)～(20)式を得る。

（証明終）

定理2におけるΨ^*が従来の完全推論行列の一般化であることは，この定理の導出過程より明らかである。

2．3　完全推論行列を求めるアルゴリズム（三ステップ・アルゴリズム）

定理2の結果を用いると，推移的閉包をとらなくともΨ^*を求めることができる。このアルゴリズムを以下に示す。

〔完全推論行列を求めるアルゴリズム〕

〈ステップ1〉　行列N_1，N_2，N_3を以下のように置く。

$N_1=N_2=M^T$，$N_3=\overline{M}$

〈ステップ2〉　イ）N_1に対して以下の置換を行ない，Ψ^*_{MM}と$\Psi^*_{\overline{M}\overline{M}}$を求める。

(a)　N_1のすべての1をMで置換する。

(b)　N_1のすべてのxをxMで置換する。

(c)　N_1のすべての0をϕで置換する。

ロ）N_2とN_3に対して以下の置換と加算（ブール和）を行ない，$\Psi^*_{M\overline{M}}$を求める。

(d)　N_2のすべての1を$\overline{M}^T$で置換する。

(e)　N_2のすべてのxを$x\overline{M}^T$で置換する。

(f)　N_3のすべての1をMで置換する。

(g)　N_3のすべてのxをxMで置換する。

(h)　N_2とN_3のすべての0をϕで置換する。

(i)　N_2+N_3を実行する。

〈ステップ3〉　Ψ^*_{MM}，$\Psi^*_{\overline{M}\overline{M}}$，$\Psi^*_{M\overline{M}}$から$\Psi^*$を求める。

$$\Psi^*=\begin{bmatrix}\Psi^*_{\overline{M}\overline{M}} & \phi \\ \Psi^*_{M\overline{M}} & \Psi^*_{MM}\end{bmatrix}$$

と置く。

ステップ2のイ）の結果が(18)式を，ロ）の結果が(19)式を満たすことは明らかである。

3．　完全推論行列の構造

完全推論行列の構造を各ブロックごとに詳細に検討する。

1)　$\Psi^*_{\overline{M}\overline{M}}$内における推論構造は(18)式より，c($\overline{M}$)jの第i要素$\overline{M}_{ij}$とのc($\overline{M}$)qの第p要素$\overline{M}_{pq}$の間には，$M_{qj}M_{ip}=1$のとき$\overline{M}_{ij}\rightarrow\overline{M}_{pq}$なる関係がある。これを表1にまとめる。この結果を詳細に述べると以下のとおりである。

a）q=jの場合

イ）$M_{ip}=1$　ならば，ただちに$\overline{M}_{ij}\rightarrow\overline{M}_{pj}$と推論できる。

ロ）$M_{ip}=X_{ip}$　ならば，M_{ip}に値1が与えられたときに$\overline{M}_{ij}\rightarrow\overline{M}_{pj}$と推論できる。

いずれの場合もM_{ip}に値1が与えられたときに$\overline{M}_{ij}\rightarrow\overline{M}_{pj}$と推論できる。これは（付3）式に対応する。

b）$q\neq j$の場合

イ）i=p　ならば，M_{qj}に値1が与えられたときに$\overline{M}_{ij}\rightarrow\overline{M}_{iq}$と推論できる。これは（付5）式に対応する。

表 1　$M_{qi}M_{ip}$ の値

M_{ip} ＼ M_{qj}		$q=j$	$q\neq j$	
		1	1	x_{qj}
$i=p$	1	1	1	x_{qj}
$i\neq p$	1	1	1	x_{qj}
	x_{ip}	x_{ip}	x_{ip}	$x_{ip}\,x_{qj}$

表 2　$M_{pi}\,M_{jq}$ の値

M_{jq} ＼ M_{pi}		$p=i$	$p\neq i$	
		1	1	x_{pi}
$j=q$	1	1	1	x_{pi}
$j\neq q$	1	1	1	x_{pi}
	x_{jq}	x_{jq}	x_{jq}	$x_{jq}\,x_{pi}$

表 3　$M_{qi}\,\overline{M}^{T}{}_{ip}$ の値

$\overline{M}^{T}{}_{jp}$ ＼ M_{qi}	$q=i$	$q\neq i$	
	1	1	x_{qi}
1	1	1	x_{qi}
$\bar{x}^{T}{}_{jp}$	$\bar{x}^{T}{}_{jp}$	$\bar{x}^{T}{}_{jp}$	$\bar{x}^{T}{}_{jp}\,x_{qi}$

表 4　$\overline{M}_{iq}\,M_{jp}$ の値

$\overline{M}_{iq}$ ＼ M_{jp}	$j=p$	$j\neq p$	
	1	1	x_{jp}
1	1	1	x_{jp}
$\bar{x}_{iq}$	$\bar{x}_{iq}$	$\bar{x}_{iq}$	$\bar{x}_{iq}\,x_{jp}$

ロ）$i\neq p$ ならば，M_{qj} と M_{ip} に値 1 が与えられたときに $\overline{M}_{ij}\rightarrow\overline{M}_{pq}$ と推論できる。

2)　$\Psi^{*}{}_{MM}$ 内における推論構造は(20)式より，r (M) i の第 j 要素 M_{ij} と r (M) p の第 q 要素 M_{pq} の間には，$M_{pi}M_{jq}=1$ のとき $M_{ij}\rightarrow M_{pq}$ なる関係がある。これを表 2 にまとめる。この結果を詳細に述べると以下のとおりである。

a) $p=i$ の場合

イ）$M_{jq}=1$　ならば，ただちに $M_{ij}\rightarrow M_{iq}$ と推論できる。

ロ）$M_{jq}=X_{jq}$　ならば M_{jq} に値 1 が与えられたときに $M_{ij}\rightarrow M_{iq}$ と推論できる。

いずれの場合も M_{jq} に値 1 が与えられたときに $M_{ij}\rightarrow M_{iq}$ と推論できる。これは (付 4) 式に対応する。

b) $p\neq i$ の場合

イ）$j=q$　ならば，M_{pi} に値 1 が与えられたときに $M_{ij}\rightarrow M_{pj}$ と推論できる。これは（付 2 ）式に対応する。

ロ）$j\neq q$　ならば，M_{pi} と M_{jq} に値 1 が与えられたときに $M_{ij}\rightarrow M_{pq}$ と推論できる。

3)　$\Psi^{*}{}_{M\overline{M}}$ 内における推論構造は(19)式より，r (M) i の第 j 要素 M_{ij} と c ($\overline{M}$) q の第 p 要素 $\overline{M}_{pq}$ の間には，$M_{qi}\overline{M}^{T}{}_{jp}+\overline{M}_{iq}M_{jp}=1$ のとき $M_{ij}\rightarrow\overline{M}_{pq}$ なる関係がある。これを，$M_{qi}\overline{M}^{T}{}_{jp}=1$ または $\overline{M}_{iq}M_{jp}=1$ となる場合ごとにそれぞれ表 3，表 4 にまとめる。この結果を詳細に述べると以下のとおりである。

a) $q=i$ の場合

イ）$\overline{M}^{T}{}_{jp}=1$　ならば，ただちに $M_{ij}\rightarrow\overline{M}_{pi}$ と推論できる。

ロ）$\overline{M}^{T}{}_{jp}=\bar{x}^{T}{}_{jp}$　ならば $\overline{M}^{T}{}_{jp}$ に値 1 が与えられたときに $M_{ij}\rightarrow\overline{M}_{pi}$ と推論できる。

いずれの場合も $\overline{M}_{jp}$ に値 1 が与えられたときに $M_{ij}\rightarrow\overline{M}_{pi}$ と推論できる。これは (付 7) 式に対応する。

b) $q\neq i$ の場合

イ）$\overline{M}^{T}{}_{jp}=1$　ならば，M_{qi} に値 1 が与えられたときに $M_{ij}\rightarrow\overline{M}_{pq}$ と推論できる。

ロ）$\overline{M}^{T}{}_{jp}=\bar{x}^{T}{}_{jp}$　ならば，M_{qi} と $\overline{M}^{T}{}_{jp}$ に値 1 が与えられたときに $M_{ij}\rightarrow\overline{M}_{pq}$ と推論できる。

c) $j=p$の場合

イ) $\overline{M}_{iq}=1$　ならば，ただちに$M_{ij}\to\overline{M}_{jq}$と推論できる。

ロ) $\overline{M}_{ij}=\bar{x}_{iq}$　ならば，$\overline{M}_{iq}$に値1が与えられたときに$M_{ij}\to\overline{M}_{jq}$と援論できる。

いずれの場合も$\overline{M}_{iq}$に値1が与えられたときに$M_{ij}\to\overline{M}_{jq}$と推論できる。これは(付6)式に対応する。

d) $j\neq p$の場合

イ) $\overline{M}_{iq}=1$　ならば，M_{jp}に値1が与えられたときに$M_{ij}\to\overline{M}_{pq}$と推論できる。

ロ) $\overline{M}_{iq}=\bar{x}_{iq}$　ならば，M_{jp}と$\overline{M}_{iq}$に値1が与えられたときに$M_{ij}\to\overline{M}_{pq}$と推論できる。

ここで，$\Psi^*_{\overline{M}\overline{M}}$および$\Psi_{MM}$内で$i=p$または$j=q$の場合，$\Psi^*_{M\overline{M}}$内で$i=q$または$j=p$の場合は(4)式から直接得られるものである。これを基本推論と呼ぶ。基本推論以外のものは(4)式からは直接得られず，完全推論行列の生成にともなって得られるものである。上記推論全てを完全推論と呼ぶ。明らかに，基本推論は完全推論の特別な場合である。

4. 例　　　題

文献(2)の例題を提案したアルゴリズムで解く。

Mが次のように与えられているとする。

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & 1 & 0 & 0 \\ y_3 & y_4 & 1 & 1 & 1 \\ y_5 & y_6 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで，文献(2)の添字と一到させるため

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \\ y_5 & y_6 \end{bmatrix}$$

とする。このMに提案した三ステップ・アルゴリズムを適用する。

〔ステップ1〕

$$N_1=N_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 1 & y_4 & y_5 & y_6 \\ x_1 & x_2 & 1 & 1 & 1 \\ x_3 & x_4 & 0 & 1 & 1 \\ x_5 & x_6 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad N_3=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \\ 0 & 0 & \bar{x}_4 & \bar{x}_5 & \bar{x}_6 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & 0 & 1 & 1 \\ \bar{y}_3 & \bar{y}_4 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{y}_5 & \bar{y}_6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

〔ステップ2〕

イ)

$$\Psi^*_{\overline{M}\overline{M}}=\Psi^*_{MM}=\begin{bmatrix} M & M & y_1M & y_2M & y_3M \\ \phi & M & y_4M & y_5M & y_6M \\ x_1M & x_2M & M & M & M \\ x_3M & x_4M & \phi & M & M \\ x_5M & x_6M & \phi & M & M \end{bmatrix}$$

ロ)

$$
\Psi^*_{M\bar{M}}=\begin{bmatrix}
\bar{M}^T & \bar{M}^T+M & y_1\bar{M}^T+\bar{x}_1M & y_2\bar{M}^T+\bar{x}_2M & y_3\bar{M}^T+\bar{x}_3M \\
\phi & \bar{M}^T & y_4\bar{M}^T+\bar{x}_4M & y_5\bar{M}^T+\bar{x}_5M & y_6\bar{M}^T+\bar{x}_6M \\
x_1\bar{M}^T+\bar{y}_1M & x_2\bar{M}^T+\bar{y}_2M & \bar{M}^T & \bar{M}^T+M & \bar{M}^T+M \\
x_3\bar{M}^T+\bar{y}_3M & x_4\bar{M}^T+\bar{y}_4M & \phi & \bar{M}^T & \bar{M}^T \\
x_5\bar{M}^T+\bar{y}_5M & x_6\bar{M}^T+\bar{y}_6M & \phi & \bar{M}^T & \bar{M}^T
\end{bmatrix}
$$

〔ステップ3〕　省略

ここで，文献(2)では添字を c ($\bar{X}$)，r (Y) としているから，Ψ^*をこの添字で圧縮すると，

$$
\Psi^*_{\bar{M}\bar{M}}(c(\bar{X}),\ c(\bar{X}))=\Psi^*_{MM}(r(Y),\ r(Y))=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
\Psi^*_{M\bar{M}}(r(Y),\ c(\bar{X}))=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

となる。この結果は文献(2)と一致している。

5. む　す　び

完全推論行列の一般化について考察し，以下の結果を得た。

(1)　未知要素を対角以外の任意の位置に含む M に対して完全推論行列を理論的に定義した。

(2)　完全推論行列を求める三ステップ・アルゴリズムを構成した。

(3)　完全推論行列の推論構造を詳細に示し，従来の推移的結合および推論行列を包含することを示した。

本理論を用いることによって，推移的具象化をさらに柔軟にすることが可能となった。その反面，本理論による完全推論行列は多くの記憶領域を必要とする。

今後の課題としては，完全推論行列の縮小を行ない，少ない記憶領域で推論構造を表わす手法の開発がある。

文　　献

1)　J. N. Warfield: Societal Systems planning, Policy and Complexity, (1976) wiley.

2)　"Implication Structures for System Interconnection Matrices", IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., SMC-6, 18 (1976).

3)　Structuring Complex Systems, Battelle Monograph No. 4, Battelle Memorial Institute, Columbus, OH (1974).

4)　栗原・大内・加地：「ISM における推移的具象化の一般化」，電学論 C，104，1 (昭59-1)

5)　大内・栗原・加地：「ISM の推移的結合における完全推論行列の考察」』電学論 C 104，5 (昭59-5)

付　　録

補助定理と定理の証明

1．〔定理1〕の証明　(3), (4)式を再掲する。

$$M+I=M \tag{3}$$

$$M^2=M \tag{4}$$

M が可到達行列であるならば(3), (4)式が成立している。

(4)式を要素で表わすと

$$\sum_k M_{ik}M_{kj}=M_{ij} \qquad (\text{付}1)$$

となる。この式から導かれる推論関係は以下のとおりである。ここで→は〝ならば〞を意味する。

1）$M_{ik}=1$ の場合

$$M_{kj}=1 \;\rightarrow\; M_{ij}=1 \qquad (\text{付}2)$$

$$M_{ij}=0 \;\rightarrow\; M_{kj}=0 \qquad (\text{付}3)$$

2）$M_{ik}=0$ の場合

$M_{ip}M_{pj}=1$ となる p が1つでも存在すれば $M_{ij}=1$ となるから，推論関係はない。

3）$M_{kj}=1$ の場合

$$M_{ik}=1 \;\rightarrow\; M_{ij}=1 \qquad (\text{付}4)$$

$$M_{ij}=0 \;\rightarrow\; M_{ik}=0 \qquad (\text{付}5)$$

4）$M_{kj}=0$ の場合

$M_{ip}M_{pj}=1$ となる p が1つでも存在すれば $M_{ij}=1$ となるから，推論関係はない。

5）$M_{ij}=1$ の場合

$M_{ik}M_{kj}=1$ となる k が1つでも存在すれば $M_{ij}=1$ となるから，推論関係はない。

6）$M_{ij}=0$ の場合

$$M_{ik}=1 \;\rightarrow\; M_{kj}=0 \qquad (\text{付}6)$$

$$M_{kj}=1 \;\rightarrow\; M_{ik}=0 \qquad (\text{付}7)$$

（付2）式～（付7）式の推論関係は無矛盾性，極大性を満たしており，この他に推論関係はない。（付2）式～（付7）式より以下の推論行列を得る。

（付4）式より　$M(r(M)i,\ r(M)i)$　（付8）

（付2）式より　$M_{ik}I(r(M)k,\ r(M)i)$　（付9）

（付3）式より　$M(c(\overline{M})j,\ c(\overline{M})j)$　（付10）

（付5）式より　$M_{kj}I(c(\overline{M})j,\ c(\overline{M})k)$　（付11）

（付7）式より　$\overline{M}^T(r(M)k,\ c(\overline{M})k)$　（付12）

（付6）式より　$\overline{M}_{ij}I(r(M)i,\ c(\overline{M})j)$　（付13）

（付8）式～（付13）式の添字を入れ換えて整理すると(5)式～(10)式を得る。

（証明終）

2．〔補助定理〕の証明　(15)式，(16)式を再掲する。

$$\overline{M}^T=\overline{M}^TM \tag{15}$$

$$\overline{M}^T=M\overline{M}^T \tag{16}$$

1）(15)式において，右辺の ij 要素は

$$\begin{aligned}(\overline{M}^TM)_{ij}&=\sum_k \overline{M}^T{}_{ik}M_{kj}\\&=\overline{M}^T{}_{ij}M_{jj}+\sum_{k\neq j}\overline{M}^T{}_{ik}M_{kj}\\&=\overline{M}^T{}_{ij}+\sum_{k\neq j}\overline{M}^T{}_{ik}M_{kj}\qquad(\because M_{jj}=1)\\&\geqq \overline{M}^T{}_{ij}\end{aligned}$$

よって，$\overline{M}^TM\geqq\overline{M}^T$ である。

2）(15)式において，右辺の ij 要素は

$$(\overline{M}^TM)_{ij}=\sum \overline{M}^T{}_{ik}M_{kj}$$

イ）$\overline{M}^T=1$ の場合

$$\sum_k \overline{M}^T{}_{ik}M_{kj}\leqq 1=\overline{M}^T{}_{ij}$$

ロ）$\overline{M}^T{}_{ij}\neq 1$ の場合

$^{\exists}k$; $\overline{M}^T{}_{ik}M_{kj}=1$ と仮定すると，推移性より $\overline{M}^T{}_{ij}=1$ となり上記前提条件と矛盾するのでこの仮定はあやまりである。よって，この仮定の否定をとると

$^{\forall}k$; $\overline{M}^T{}_{ik}=0$　or　$M_{kj}=0$

である。よって，$\sum_k \overline{M}^T{}_{ik}M_{kj}=0\leqq\overline{M}^T{}_{ij}$ である。

イ），ロ）より$\overline{M}^T \geqq \overline{M}^T M$である。よって1），2）より$\overline{M}^T = \overline{M}^T M$である。

同様にして，$\overline{M}^T = M\overline{M}^T$である。（証明終）

3．〔定理2〕の証明　(14), (11), (12), (13)式を再掲する。

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{\overline{M}\overline{M}} & \phi \\ \Psi_{M\overline{M}} & \Psi_{MM} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\Psi^{ij}_{\overline{M}\overline{M}} = \delta(i,j)M + \bar{\delta}(i,j)M_{ji}I \quad (11)$$

$$\Psi^{ij}_{MM} = \Psi^{ij}_{\overline{M}\overline{M}} \quad (12)$$

$$\Psi^{ij}_{M\overline{M}} = \delta(i,j)\overline{M}^T + \bar{\delta}(i,j)\overline{M}_{ij}I \quad (13)$$

(14)式より

$$\Psi^2 = \begin{pmatrix} \Psi^2{}_{\overline{M}\overline{M}} & \phi \\ \Phi^2 & \Psi^2{}_{MM} \end{pmatrix}, \quad \Psi^3 = \begin{pmatrix} \Psi^3{}_{\overline{M}\overline{M}} & \phi \\ \Phi^3 & \Psi^3{}_{MM} \end{pmatrix}$$

ここで，$\Phi^2 = \Psi_{M\overline{M}}\Psi_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi_{MM}\Psi_{M\overline{M}}$，$\Phi^3 = \Phi^2\Psi_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi^2{}_{MM}\Psi_{M\overline{M}}$ である。

1）Ψ^2の第(i, j)ブロック要素を計算する。

a）$\Psi^2{}^{ij}_{\overline{M}\overline{M}} = \sum_k \Psi^{ik}_{\overline{M}\overline{M}}\Psi^{kj}_{\overline{M}\overline{M}}$

イ）i＝j の場合

$$\begin{aligned}
\Psi^2{}^{ij}_{\overline{M}\overline{M}} &= \Psi^{ii}_{\overline{M}\overline{M}}\Psi^{ii}_{\overline{M}\overline{M}} + \sum_{k\neq i}\Psi^{ik}_{\overline{M}\overline{M}}\Psi^{ki}_{\overline{M}\overline{M}} \\
&= MM + \sum_{k\neq i} M_{ki}I\,M_{ik}I \\
&= M + \sum_{k\neq i} M_{ki}M_{ik}I \\
&= M \qquad (\because \sum_k M_{ki}M_{ik}I \leqq I \leqq M + I = M)
\end{aligned}$$

ロ）i ≠ j の場合

$$\begin{aligned}
\Psi^2{}^{ij}_{\overline{M}\overline{M}} &= \Psi^{ii}_{\overline{M}\overline{M}}\Psi^{ij}_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi^{ij}_{\overline{M}\overline{M}}\Psi^{jj}_{\overline{M}\overline{M}} + \sum_{k\neq i,j}\Psi^{ik}_{\overline{M}\overline{M}}\Psi^{kj}_{\overline{M}\overline{M}} \\
&= MM_{ji}I + M_{ji}IM + \sum_{k\neq i,j} M_{ki}I\,M_{jk}I \\
&= M_{ji}M + \sum_{k\neq i,j} M_{ki}M_{jk}I \\
&= M_{ji}M \qquad (\because \sum_{k\neq i,j} M_{ki}M_{jk}I \leqq I \leqq M + I = M)
\end{aligned}$$

イ），ロ）より

$$\begin{aligned}
\Psi^2{}^{ij}_{\overline{M}\overline{M}} &= \delta(i,j)M + \bar{\delta}(i,j)M_{ji}M \\
&= M_{ji}M \qquad (\because M_{ii} = 1)
\end{aligned}$$

ここで(12)式と上記結果より

$$\Psi^2{}^{ij}_{MM} = \Psi^2{}^{ij}_{\overline{M}\overline{M}} = M_{ji}M \quad (付14)$$

b）$\Phi^{2ij} = \sum_k (\Psi^{ik}_{M\overline{M}}\Psi^{kj}_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi^{ik}_{MM}\Psi^{kj}_{M\overline{M}})$

イ）i＝j の場合

$$\begin{aligned}
\Phi^{2ij} &= \Psi^{ii}_{M\overline{M}}\Psi^{ii}_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi^{ii}_{MM}\Psi^{ii}_{M\overline{M}} + \sum_{k\neq i}(\Psi^{ik}_{M\overline{M}}\Psi^{ki}_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi^{ik}_{MM}\Psi^{ki}_{M\overline{M}}) \\
&= \overline{M}^T M + M\overline{M}^T + \sum_{k\neq i}(\overline{M}_{ik}I\,M_{ik}I + M_{ki}I\,\overline{M}_{ki}I) \\
&= \overline{M}^T + \sum_{k\neq i}(\overline{M}_{ik}M_{ik}I + M_{ki}\overline{M}_{ki}I) \\
&= \overline{M}^T \qquad (\because \sum_{k\neq i}(\overline{M}_{ik}M_{ik}I + M_{ki}\overline{M}_{ki}I) = 0)
\end{aligned}$$

ロ）i ≠ j の場合

$$\begin{aligned}
\Phi^{2ij} &= \Psi^{ii}_{M\overline{M}}\Psi^{ij}_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi^{ii}_{MM}\Psi^{ij}_{M\overline{M}} + \Psi^{ij}_{M\overline{M}}\Psi^{jj}_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi^{ij}_{MM}\Psi^{jj}_{M\overline{M}} + \sum_{k\neq i,j}(\Psi^{ik}_{M\overline{M}}\Psi^{kj}_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi^{ik}_{MM}\Psi^{kj}_{M\overline{M}}) \\
&= \overline{M}^T M_{ji}I + M\overline{M}_{ij}I + \overline{M}_{ij}IM + M_{ji}I\overline{M}^T + \sum_{k\neq i,j}(\overline{M}_{ik}I\,M_{jk}I + M_{ki}I\,\overline{M}_{kj}I) \\
&= M_{ji}\overline{M}^T + \overline{M}_{ij}M + \sum_{k\neq i,j}(\overline{M}_{ik}M_{jk}I + M_{ki}\overline{M}_{kj}I) \\
&= M_{ji}\overline{M}^T + \overline{M}_{ij}M \qquad (\because \overline{M}_{ik}M_{jk} = 1 \rightarrow \overline{M}_{ij} = 1,\ M_{ki}\overline{M}_{kj} = 1 \rightarrow \overline{M}_{ij} = 1
\end{aligned}$$

よって，$\sum_{k\neq i,j}(\overline{M}_{ik}M_{jk}I + M_{ki}\overline{M}_{kj}I) \leqq \overline{M}_{ij}I \leqq \overline{M}_{ij}M$)

イ），ロ）より

$$\begin{aligned}
\Phi^{2ij} &= \delta(i,j)\overline{M}^T + \bar{\delta}(i,j)(M_{ji}\overline{M}^T + \overline{M}_{ij}M) \\
&= M_{ji}\overline{M}^T + \overline{M}_{ij}M \qquad (\because M_{ii} = 1) \quad (付15)
\end{aligned}$$

2）Ψ^3の第(i, j)ブロック要素を計算する。

a）$\Psi^3{}^{ij}_{\overline{M}\overline{M}} = \sum_k \Psi^2{}^{ik}_{\overline{M}\overline{M}}\Psi^{kj}_{\overline{M}\overline{M}}$

イ）i＝j の場合

$$\begin{aligned}
\Psi^3{}^{ij}_{\overline{M}\overline{M}} &= \Psi^2{}^{ii}_{\overline{M}\overline{M}}\Psi^{ii}_{\overline{M}\overline{M}} + \sum_{k\neq i}\Psi^2{}^{ik}_{\overline{M}\overline{M}}\Psi^{kj}_{\overline{M}\overline{M}} \\
&= M_{ii}MM + \sum_{k\neq i} M_{ki}MM_{ik}I \\
&= M + \sum_{k\neq i} M_{ki}M_{ik}M \\
&= M \qquad (\because \sum_{k\neq i} M_{ki}M_{ik}M \leqq M)
\end{aligned}$$

ロ） i ≠ j の場合

$$\begin{aligned}
\Psi^{3\,ij}_{\overline{M}\overline{M}} &= \Psi^{2\,ii}_{\overline{M}\overline{M}}\Psi^{ij}_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi^{2\,ij}_{\overline{M}\overline{M}}\Psi^{jj}_{\overline{M}\overline{M}} + \sum_{k\neq i,j}\Psi^{ik}_{\overline{M}\overline{M}}\Psi^{kj}_{\overline{M}\overline{M}}\\
&= M_{ii}MM_{ji}I + M_{ji}MM + \sum_{k\neq i,j}M_{ki}MM_{jk}I\\
&= M_{ji}M + \sum_{k\neq i,j}M_{ki}M_{jk}M\\
&= M_{ji}M \qquad \left(\because \sum_{k\neq i,j}M_{ki}M_{jk}M \leqq M_{ji}M\right)
\end{aligned}$$

イ），ロ）より

$$\begin{aligned}
\Psi^{3\,ij}_{\overline{M}\overline{M}} &= \delta(i,j)M + \bar{\delta}(i,j)M_{ji}M\\
&= M_{ji}M \qquad (\because M_{ii}=1)
\end{aligned}$$

同様にして，$\Psi^{3\,ij}_{MM} = M_{ji}M$ であるから

$$\Psi^{3\,ij}_{MM} = \Psi^{3\,ij}_{\overline{M}\overline{M}} = M_{ji}M \tag{付16}$$

b) $\Phi^{3ij} = \sum_{k}(\Phi^{2ik}\Psi^{kj}_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi^{2\,ik}_{MM}\Psi^{kj}_{M\overline{M}})$

イ） i = j の場合

$$\begin{aligned}
\Phi^{3ij} &= \Phi^{2ii}\Psi^{ii}_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi^{2\,ii}_{MM}\Psi^{ii}_{M\overline{M}} + \sum_{k\neq i}(\Phi^{2ik}\Psi^{ki}_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi^{2\,ik}_{MM}\Psi^{ki}_{M\overline{M}})\\
&= \overline{M}^{T}M + M_{ii}M\overline{M}^{T} + \sum_{k\neq i}((M_{ki}\overline{M}^{T} + \overline{M}_{ik}M)M_{ik}I + M_{ki}M\overline{M}_{ki}I)\\
&= \overline{M}^{T}M + M\overline{M}^{T} + \sum_{k\neq i}(M_{ki}M_{ik}\overline{M}^{T} + \overline{M}_{ik}M_{ik}M + M_{ki}\overline{M}_{ki}M)\\
&= \overline{M}^{T} \qquad (\because 補助定理と，\overline{M}_{ik}M_{ik}=0,\ M_{ki}\overline{M}_{ki}=0 より\\
&\qquad\qquad \sum_{k\neq i}(M_{ki}M_{ik}\overline{M}^{T} + \overline{M}_{ik}M_{ik}M + M_{ki}\overline{M}_{ki}M) \leqq \overline{M}^{T})
\end{aligned}$$

ロ） i ≠ j の場合

$$\begin{aligned}
\Phi^{3ij} &= \Phi^{2ii}\Psi^{ij}_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi^{2\,ii}_{MM}\Psi^{ij}_{M\overline{M}} + \Phi^{2ij}\Psi^{jj}_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi^{2\,ij}_{MM}\Psi^{jj}_{M\overline{M}} + \sum_{k\neq i,j}(\Phi^{2ik}\Psi^{kj}_{\overline{M}\overline{M}} + \Psi^{ik}_{MM}\Psi^{kj}_{M\overline{M}})\\
&= \overline{M}^{T}M_{ji}I + M_{ii}M\overline{M}_{ij}I + (M_{ji}\overline{M}^{T} + \overline{M}_{ij}M)M + M_{ji}M\overline{M}^{T}\\
&\qquad + \sum_{k\neq i,j}((M_{ki}\overline{M}^{T} + \overline{M}_{ik}M)M_{jk}I + M_{ki}M\overline{M}_{kj}I)\\
&= M_{ji}\overline{M}^{T} + \overline{M}_{ij}M + M_{ji}\overline{M}^{T}M + \overline{M}_{ij}M + M_{ji}M\overline{M}^{T}\\
&\qquad + \sum_{k\neq i,j}(M_{ki}M_{jk}\overline{M}^{T} + \overline{M}_{ik}M_{jk}M + M_{ki}\overline{M}_{kj}M)\\
&= M_{ji}\overline{M}^{T} + \overline{M}_{ij}M \qquad (\because M_{ki}M_{jk}=1 \rightarrow M_{ji}=1,\ \overline{M}_{ik}M_{jk}=1 \rightarrow \overline{M}_{ij}=1,\\
&\qquad\qquad M_{ki}\overline{M}_{kj}=1 \rightarrow \overline{M}_{ij}=1，これより，\\
&\qquad\qquad \sum_{k\neq i,j}(M_{ki}M_{jk}\overline{M}^{T} + \overline{M}_{ik}M_{jk}M + M_{ki}\overline{M}_{kj}M) \leqq M_{ji}\overline{M}^{T} + \overline{M}_{ij}M)
\end{aligned}$$

イ），ロ）より

$$\begin{aligned}
\Phi^{3ij} &= \delta(i,j)\overline{M}^{T} + \bar{\delta}(i,j)(M_{ji}\overline{M}^{T} + \overline{M}_{ij}M)\\
&= M_{ji}\overline{M}^{T} + \overline{M}_{ij}M \qquad (\because M_{ii}=1)
\end{aligned} \tag{付17}$$

以上より，（付14）式と（付16）式，（付15）式と（付17）式を比較すれば定理の結果を得る。

（証明終）