



Title	薄肉I形断面をもつ曲線格子桁の弾塑性解析に関する研究
Author(s)	渡辺, 昇; Watanabe, Noboru; 林川, 俊郎 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 126, 1-14
Issue Date	1985-05-31
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41936">https://hdl.handle.net/2115/41936</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	126_1-14.pdf



## 薄肉 I 形断面をもつ曲線格子桁の弾塑性解析に関する研究

渡辺 昇\* 林川 俊郎\* 岡田 泰三\*\*  
(昭和59年12月27日受理)

### Study on Elasto-Plastic Analysis of Curved Grillage Beams with Thin Walled I-Type Cross Section

Noboru WATANABE, Toshiro HAYASHIKAWA, and Taizou OKADA  
(Received December 27, 1984)

#### Abstract

A method of analyzing the collapse load and the plastic collapse mechanism of horizontally curved grillage girder bridges with thin walled I-type cross section based on the displacement method is presented. Four yield criteria are used in the elasto-plastic analysis to define the behavior of a thin wall steel cross section in combined bending, torsion, and warping. The proposed analysis definitely traces the location and the sequence of formation of all plastic hinges to collapse.

Furthermore, numerical examples are given to illustrate application of the analytical method developed here, and the computed results are compared with some experimental results.

#### 1. ま え が き

近年、地形および地域の自然環境との調和を配慮した道路線形設計上の観点から、曲線格子桁橋の施工例が数多く見受けられるようになってきた。しかし、鋼橋のように薄肉断面部材で構成された曲線格子桁橋は、曲げやねじり変形とともに曲げねじり変形(そり変形)の影響を同時に受けるため、その応力分布状態はきわめて複雑である。特に、薄肉 I 形断面の曲線格子桁橋の場合には、主桁と横桁の上下フランジ部に付加的な垂直応力度(そり応力度)を生じる。

薄肉断面部材の曲げねじり理論を Wagner<sup>1)</sup> が発表して以来、この分野の研究が活発に行なわれるようになり、すでに多くの研究成果が報告されている。たとえば、直線部材に関する基礎的研究は Bornscheuer<sup>2)</sup>, Vlasov<sup>3)</sup>, Heilig<sup>4)</sup> らにより、また、曲線部材については Wansleben<sup>5)</sup>, Kreisel<sup>6)</sup>, Dabrowski<sup>7)</sup>, Becker<sup>8)</sup> らによりほぼ体系づけられた。わが国においても、多数の研究者<sup>9-13)</sup> により曲線桁および曲線格子桁の実用的な計算方法が確立され、最近では薄肉断面部材の有限変位を考慮した幾何学的非線形問題が盛んに議論されている<sup>14,15)</sup>。

しかしながら、薄肉曲線格子桁橋の終局崩壊荷重および塑性崩壊機構に着目した弾塑性解析(極

\*土木工学科橋梁学講座

\*\*工学研究科修士課程土木工学専攻

限解析)に関する論文は、著者らの知る限りにおいて、あまり見受けられない。わずかに、曲げとねじりが同時に作用した場合の曲線格子桁の崩壊荷重と崩壊形式との相関性について言及した米沢・三上<sup>16)</sup>の研究と、曲線桁を多角形に折れ線近似し、直線部材の剛性マトリックスを用いた今井ら<sup>17)</sup>の研究があるだけである。

そこで、本研究の目的は著者らがすでに発表した直線格子桁の塑性ヒンジ理論による弾塑性解析法<sup>18)</sup>を拡張し、渡辺・稼農・藤井<sup>19)</sup>が誘導した薄肉曲線桁の剛性マトリックスを併用し、曲げねじりを考慮した曲線格子桁の弾塑性解析を提示することである。この解法によれば、漸増節点荷重を受ける曲線格子桁の終局崩壊荷重が自動的に算定されるだけでなく、最初の塑性ヒンジの発生から最終的な塑性崩壊機構が形成されるまでの全過程を克明に追跡することができる。さらに、ここで提案した曲線格子桁の弾塑性解析による数値計算結果の妥当性を確認するために3種類の供試体を製作し、室内模型実験結果との比較において良好な研究成果を得たのでここに報告する。

## 2. 解析理論

### 2.1 解析上の仮定

本論文では、薄肉曲線格子桁の弾塑性解析の定式化に以下のような仮定を用いる。

1)材料は完全剛塑性体<sup>20)</sup>とし、ひずみ硬化は無視する。また、部材軸方向の塑性域の拡がりは無視し、塑性ヒンジは部材要素の材端のみに発生するものとする。

2)材料の降伏せん断応力度 $\tau_0$ はVon Misesの降伏基準にしたがって、 $\tau_0 = \sigma_0 / \sqrt{3}$ とする。ただし、 $\sigma_0$ は材料の降伏垂直応力度である。

3)すべての外部荷重は節点に作用し、その強度は一定の割合で変化する(比例荷重)ものとし、変形にとまらう外部荷重および構造物の幾何学的変化は無視する。

4)完全な塑性崩壊機構が形成されるまで、部分的あるいは全体的な不安定現象(局部座屈あるいは横倒れ座屈)は生じないものとする。

5)降伏条件式には曲げモーメント、ねじりモーメント、および曲げねじりモーメントの組み合わせについて検討し、せん断力の影響は無視する。

6)最終的な塑性崩壊荷重の判定は、構造物全体の剛性マトリックスの行列の値が零に等しいか、あるいは単位漸増荷重による変形量が非常に大きい場合について行なう。

### 2.2 薄肉部材要素の剛性マトリックス

薄肉断面曲線部材要素の節点力と節点変位を関係づける剛性マトリックスの誘導方法としては、大きく分けて2通りの方法がある。つまり、薄肉曲線部材の曲率面外変形に対する4階2元連立微分方程式の一般解を用いて剛性マトリックスを誘導する方法<sup>19)</sup>と、薄肉曲線部材の任意な軸に関する変形量を3次までのベキ級数で近似し、仮想仕事の原理に基

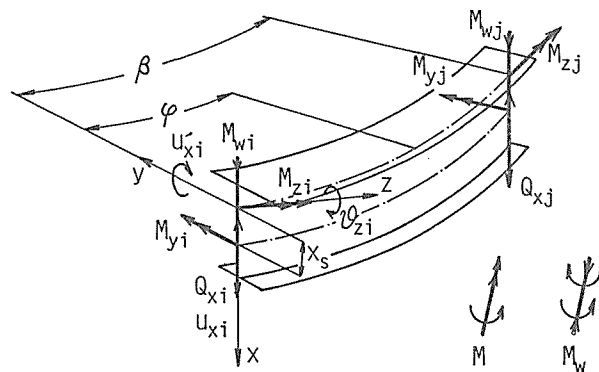


図1 薄肉断面曲線部材要素

づいて剛性マトリックスを誘導する方法<sup>21)</sup>がある。本論文では曲線格子桁の部材要素数(分割数)に関係なく正確な解を求めることができる前者の方法を採用し、その概要を以下に示す。

図1のような  $x$  軸対称断面(薄肉 I 形断面)に面外荷重が作用し、かつ曲率面内の荷重がない場合、曲率面外への変形をセン断中心軸の変形で表現した曲線桁の基礎微分方程式は次のように与えられる<sup>12,19,22)</sup>。

$$\left(EJ_y + \frac{EJ_w}{R_s^2}\right) \frac{d^4 u_x}{d\varphi^4} - GJ_t \frac{d^2 u_x}{d\varphi^2} - \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^4 R_s \vartheta_z}{d\varphi^4} + (GJ_t + EJ_y) \frac{d^2 R_s \vartheta_z}{d\varphi^2} = R_s^4 q_x - R_s^2 \frac{dm_y}{d\varphi} \quad (1 a)$$

$$- \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^4 u_x}{d\varphi^4} + (GJ_t + EJ_y) \frac{d^2 u_x}{d\varphi^2} + \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^4 R_s \vartheta_z}{d\varphi^4} - GJ_t \frac{d^2 R_s \vartheta_z}{d\varphi^2} + EJ_y R_s \vartheta_z = R_s^3 m_z \quad (1 b)$$

ここで、 $u_x$  は垂直変位、 $\vartheta_z$  はねじり角、 $EJ_y$ ,  $GJ_t$ ,  $EJ_w$  はそれぞれ桁の曲げ剛性、ねじり剛性、曲げねじり剛性、 $R_s$  は曲率半径、 $q_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  は外部荷重である。ここで取り扱う曲線格子桁の断面は2軸対称断面であるから、 $x_s = 0$ ,  $J_{xy} = 0$  の条件が成り立っている。

曲線桁の剛性マトリックスを誘導するとき、部材要素の節点間に外部荷重が作用していないものとすれば、式(1)の右辺の荷重項は消える。さらに、消去法により式(1)を整理すると次のような同次方程式が得られる。

$$\frac{d^6 \vartheta_z}{d\varphi^6} + (2 - \lambda^2) \frac{d^4 \vartheta_z}{d\varphi^4} + (1 - 2\lambda^2) \frac{d^2 \vartheta_z}{d\varphi^2} - \lambda^2 \vartheta_z = 0 \quad (2 a)$$

$$\frac{d^2 u_x}{d\varphi^2} = - \frac{R_s}{1 + \lambda^2 + \lambda^2 \gamma} \left\{ \frac{d^4 \vartheta_z}{d\varphi^4} + (1 - \lambda^2) \frac{d^2 \vartheta_z}{d\varphi^2} + (1 + \lambda^2 \gamma) \vartheta_z \right\} \quad (2 b)$$

ここで、次のような無次元パラメータを用意すると

$$\lambda^2 = \frac{GJ_t}{EJ_w} R_s^2, \quad \gamma = \frac{EJ_y}{GJ_t}, \quad \eta = \frac{2\lambda^2 \gamma}{1 + \lambda^2 + \lambda^2 \gamma}$$

式(2)の一般解は次のように求めることができる。

$$\vartheta_z = C_1 \sinh \lambda \varphi + C_2 \cosh \lambda \varphi + C_3 \cos \varphi + C_4 \varphi \cos \varphi + C_5 \sin \varphi + C_6 \varphi \sin \varphi \quad (3)$$

$$u_x = -R_s \left\{ C_1 \frac{1}{\lambda^2} \sinh \lambda \varphi + C_2 \frac{1}{\lambda^2} \cosh \lambda \varphi - C_3 \cos \varphi - C_4 (\varphi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) - C_5 \sin \varphi - C_6 (\varphi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \right\} + C_7 \varphi + C_8 \quad (4)$$

ここで、 $C_1 \sim C_8$  は積分定数である。さらに、セン断中心軸のねじり率  $\theta_w$  は

$$\theta_w = \frac{1}{R_s} \left( \frac{d\vartheta_z}{d\varphi} - \frac{1}{R_s} \frac{du_x}{d\varphi} \right) \quad (5)$$

である<sup>23)</sup>。

薄肉曲線桁のセン断中心軸上の任意の点における変形量、すなわち、垂直変位  $u_x$ 、たわみ角  $u'_x$  (ただし、 $(\prime) = d/R_s d\varphi$ )、ねじり角  $\vartheta_z$  およびねじり率  $\theta_w$  は式(3)、(4)、(5)により計算することができる。図1のような薄肉曲線桁の任意構成部材の両端  $i, j$  (それぞれ  $\varphi = 0, \varphi = \beta$  とする)における節点変位は積分定数  $C_1 \sim C_8$  で表わされる。これをマトリックス表示すると次のようになる。

$$\mathbf{U} = \mathbf{A} \mathbf{C} \quad (6)$$

ここで、

$$\mathbf{U} = \{u_{xi}, u'_{xi}, \vartheta_{zi}, \theta_{wi}, u_{xj}, u'_{xj}, \vartheta_{zj}, \theta_{wj}\}^T \quad (7)$$

$$\mathbf{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8\}^T \quad (8)$$

$\mathbf{A}$  は 8 行 8 列の係数マトリックスである。

断面力と変位との関係は、断面形状が  $x$  軸に対して対称であるとする、次のように与えられる<sup>19,22)</sup>。

$$\begin{aligned} Q_x &= -\frac{EJ_y d\kappa_y}{R_s d\varphi} - \frac{GJ_t \theta_w}{R_s} + \frac{EJ_w}{R_s^3} \frac{d^2 \theta_w}{d\varphi^2}, & M_y &= -EJ_y \kappa_y \\ M_z &= GJ_t \theta_w - \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^2 \theta_w}{d\varphi^2}, & M_w &= -\frac{EJ_w}{R_s} \frac{d\theta_w}{d\varphi} \end{aligned} \quad (9 a-d)$$

ここで、

$$\kappa_y = \frac{1}{R_s^2} \left( \frac{d^2 u_x}{d\varphi^2} + R_s \theta_z \right) \quad (10)$$

したがって、式 (3), (4), (5), (10) を式 (9) に代入し薄肉曲線部材要素の両端  $i, j$  における節点力を積分定数を用いて表現すると次のようなマトリックス関係式が得られる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}\mathbf{C} \quad (11)$$

ここで、

$$\mathbf{F} = \{Q_{xi}, M_{yi}, M_{zi}, M_{wi}, Q_{xj}, M_{yj}, M_{zj}, M_{wj}\}^T \quad (12)$$

式 (11) の  $\mathbf{B}$  は 8 行 8 列の係数マトリックスである。ゆえに、式 (6), (11) より積分定数ベクトル  $\mathbf{C}$  を消去すると

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U} \quad (13)$$

である。ここで、 $\mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$  とおくと、最終的な剛性方程式が

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (14)$$

となる。この正方マトリックス  $\mathbf{K}$  が求める薄肉曲線部材要素の剛性マトリックスである。ここで、節点力ベクトル  $\mathbf{F}$  と節点変位ベクトル  $\mathbf{U}$  の符号は微分方程式のもの異なるため注意を要する。また、薄肉曲線部材要素内でたとえ断面が一定であるとしても、この剛性マトリックス  $\mathbf{K}$  を陽な形で求めることは非常に困難である。しかし、電子計算機が高精度でかつ高速化した現在では、この数値計算はほとんど問題にならない。

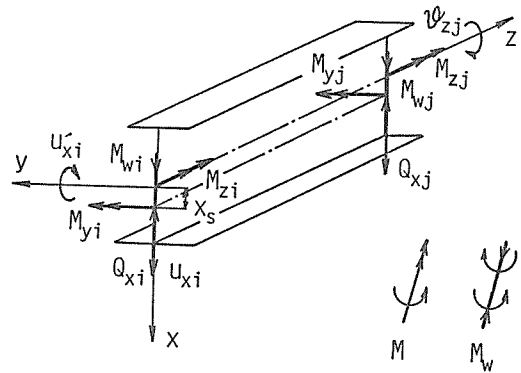


図 2 薄肉断面直線部材要素

次に、薄肉曲線格子桁の弾塑性解析をするためには、図 2 のような横桁に対応する薄肉直線部材要素の剛性マトリックスが必要となる。その剛性マトリックスの誘導は前述の曲線部材要素の場合と全く同様の方法で行なうことができる。結果の詳細は文献 19) と 24) を参照されたい。

### 2.3 降伏条件式

構造物の弾塑性解析では、使用する降伏条件式によって塑性崩壊機構(塑性ヒンジの発生順序)や弾性限界の荷重(第 1 塑性ヒンジの発生時における荷重)および終局的な崩壊荷重にかなりの差を生じることは十分考えられる。本論文で取り扱うような薄肉断面部材が曲げ、ねじり、およ

び曲げねじり変形を同時に受けた場合の降伏条件式は一般的に次のように定義することができる。

$$f(m, t, w) = 0 \quad (15)$$

ここで、

$$m = \frac{M_y}{M_{yp}}, \quad t = \frac{T_s}{T_{sp}}, \quad w = \frac{M_w}{M_{wp}} \quad (16)$$

添字  $p$  は全断面塑性状態における断面力の値を意味している。また、 $T_s$  は St. Venant の純ねじりモーメントである。

全ねじりモーメント  $M_z$  は式(9c)からわかるように、St. Venant の純ねじりモーメント  $T_s$  と曲げねじりによる 2 次ねじりモーメント  $T_w$  との和である。ゆえに、薄肉断面部材には  $T_s$  と  $T_w$  によりそれぞれせん断応力度  $\tau_s$  と  $\tau_w$  が生ずる。しかし、 $\tau_w$  のせん断応力度はせん断力  $Q_x$  によるせん断応力度  $\tau_Q$  と同様にして、全断面塑性状態においては  $\tau_w$  の影響は非常に小さいものと考えられる。したがって、降伏条件式には St. Venant の純ねじりモーメント  $T_s$  のみを考慮すればよいことになる。

しかしながら、式(15)で表わされる降伏条件式を任意の断面形状について理論的に研究した論文はほとんどないのが現状である。そこで、本研究では以下に示す 4 つの降伏条件式について検討する。

$$\text{Mode 1: } m^2 + t^2 = 1 \quad (17a)$$

$$\text{Mode 2: } \begin{cases} m_b^2 + |w| = 1 & (\text{曲げモーメントが支配的な場合}) \\ m_w^2 + |w| = 1 & (\text{曲げねじりモーメントが支配的な場合}) \end{cases} \quad (17b)$$

$$\text{Mode 3: } m^2 + t^2 + |w| = 1 \quad (17c)$$

$$\text{Mode 4: } m^2 + t^2 + w^2 = 1 \quad (17d)$$

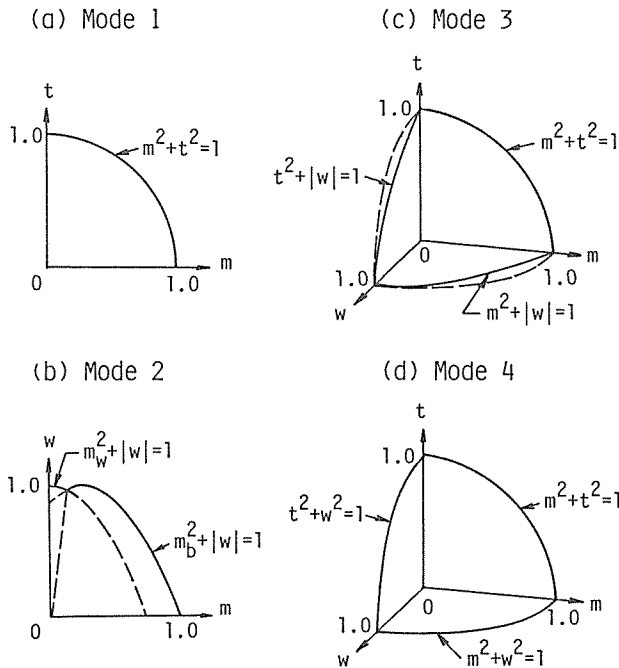


図 3 降伏条件式の相関図

ここで、 $m_b = (|M_y| - M_{yp2}) / M_{yp1}$ 、 $m_w = |M_y| / M_{yp1}$ 、 $M_{yp1}$  は薄肉 I 形断面の上下フランジ部の全塑性曲げモーメント、 $M_{yp2}$  はウェブ部の全塑性曲げモーメントである。ゆえに、 $M_{yp} = M_{yp1} + M_{yp2}$  が成り立っている。

式(17 a)は断面形状に関係なく、曲げとねじりを同時に受けた場合の降伏相関曲線の下界値を与えることから、曲線桁の弾塑性解析には数多く用いられている<sup>16,25,26)</sup>。式(17 b)は薄肉 I 形断面における垂直応力度、すなわち、曲げ応力度  $\sigma_y$  とそり応力度  $\sigma_w$  とが複合した場合について、Kollbrunner ら<sup>27)</sup> が提案した降伏条件式の一つである。式(17 c)と式(17 d)の降伏条件式はせん断ひずみエネルギー説の合成応力度の考え方に従い、著者らが提案する近似式である。これら4つの降伏条件式の相関関係は図3に示されている。

次に、式(17)の降伏条件式を使用した場合の本解析法における荷重倍数  $s$  の求め方について述べる。いま、ある荷重強度状態  $\mathbf{P}_1$  と  $\mathbf{P}_2$  ( $\mathbf{P}_2 > \mathbf{P}_1$ ) に対する  $m, t, w$  をそれぞれ  $m_1, t_1, w_1$  および  $m_2, t_2, w_2$  とし、荷重増分  $d\mathbf{P} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$  に対するそれらの増分を  $dm = m_2 - m_1$ 、 $dt = t_2 - t_1$ 、 $dw = w_2 - w_1$  とすれば、線形近似により、 $d\mathbf{P}$  に対する荷重倍数  $s$  とこれらの諸量との間には

$$m_2 = m_1 + s dm, \quad t_2 = t_1 + s dt, \quad w_2 = w_1 + s dw$$

の関係が成立し、これらを式(17)に代入すれば、常に  $s$  に関する2次方程式が

$$As^2 + Bs + C = 0$$

得られる。したがって、荷重倍数  $s$  は次式のように求められる。

$$s = (\sqrt{B^2 - 4AC} - B) / 2A \quad (18)$$

ただし、 $A, B, C$  は定数である。

曲線格子桁の各部材端ごとに、式(18)の荷重倍数  $s$  を計算し最小値を求めると、その最小値を有する部材端が次の新しい塑性ヒンジを発生する節点となり、新たな荷重強度は

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1 + s d\mathbf{P} \quad (19)$$

として決定される。以上の計算手順を塑性崩壊機構が形成されるまで、あるいは非常に大きな垂直変位が生じるまで繰り返し計算し、最終的な崩壊荷重  $\mathbf{P}$  を求める。

## 2. 4 部材端の境界条件による剛性マトリックスの修正

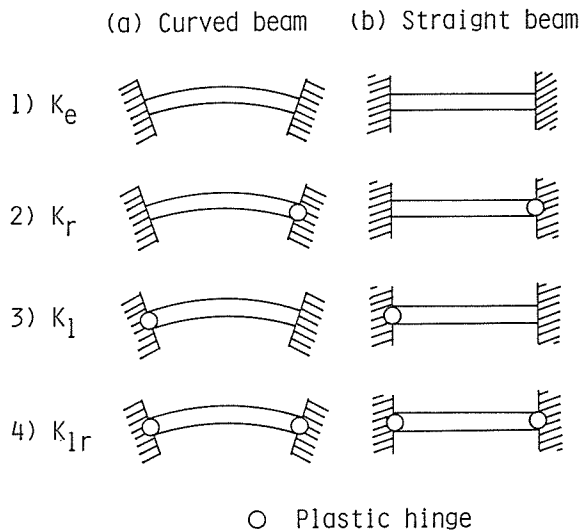


図4 基本的な部材要素と塑性ヒンジの位置

式(14)は薄肉曲線部材が両端で他の部材と剛結されている場合に対する基本式であるが、部材端の境界条件が異なると、つまり、塑性ヒンジが部材端に発生すると当然式(14)の剛性マトリックスは修正されなければならない。たとえば、式(17d)の降伏条件式を用いて、部材両端の境界条件を示した図4の中で、(a)の3)のように左端( $i$ 端)に塑性ヒンジが発生し、右端( $j$ 端)がまだ剛結されている状態の薄肉曲線部材について考えてみよう。この場合、塑性ヒンジを有する部材  $i$  端では曲げ、ねじり、および曲げねじり変形に対して自由に変形し得る状態となり、以後の外部荷重の増加に対して、塑性ヒンジ部は曲げモーメント  $M_{yi}$ 、ねじりモーメント  $M_{zi}$ 、および曲げねじモーメント  $M_{wi}$  に抵抗できなくなる。つまり、

$$M_{yi}=0, \quad M_{zi}=0, \quad M_{wi}=0$$

となり、 $i$  端に塑性ヒンジをもつ節点力ベクトル  $\mathbf{F}$  は次のように表現できる。

$$\mathbf{F} = \{Q_{xi}, 0, 0, 0, Q_{xj}, M_{yj}, M_{zj}, M_{wj}\}^T \quad (20)$$

次に、式(14)の剛性マトリックス  $\mathbf{K}$  を分割マトリックス表示すると

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_\alpha \\ \mathbf{F}_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_\alpha \\ \mathbf{U}_\beta \end{Bmatrix} \quad (21)$$

ここで、

$$\mathbf{F}_\alpha = \{Q_{xi}, Q_{xj}, M_{yj}, M_{zj}, M_{wj}\}^T, \quad \mathbf{F}_\beta = \{0, 0, 0\}^T$$

$$\mathbf{U}_\alpha = \{u_{xi}, u_{xj}, U'_{xj}, \vartheta_{zj}, \theta_{wj}\}^T, \quad \mathbf{U}_\beta = \{u'_{xi}, \vartheta_{zi}, \theta_{wi}\}^T$$

である。 $\mathbf{F}_\beta = \mathbf{0}$  であるから、式(21)の行列式を変形すると次式を得る。

$$\mathbf{F}_\alpha = (\mathbf{K}_{\alpha\alpha} - \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{K}_{\beta\beta}^{-1}\mathbf{K}_{\beta\alpha})\mathbf{U}_\alpha = \mathbf{K}_i\mathbf{U}_\alpha \quad (22)$$

この  $\mathbf{K}_i$  は  $5 \times 5$  の正方対称マトリックスであり、左端に塑性ヒンジを有する薄肉曲線部材の修正された剛性マトリックスである。さらに、右端あるいは両端に塑性ヒンジをもつ場合の剛性マトリックスも同様の手順で修正することが可能である。また、横桁に塑性ヒンジが発生した場合についても前述の方法で修正ができる。ただし、式(14)および式(22)における剛性マトリックスは局所座標系表示のものであるから、曲線格子桁の弾塑性解析には全体座標系表示の剛性マトリックスに座標変換する必要がある<sup>28)</sup>。

### 3. 室内模型実験

ここで、述べた薄肉曲線格子桁の弾塑性解析の妥当性を確認するために、図5に示すような3本主桁3本横桁で構成された室内模型実験用曲線格子桁を3種類製作し、鉛直たわみおよび垂直応力度を測定した。供試体に用いた材料はH形鋼の最小断面(呼称寸法： $H \times B = 100 \times 50$ )で、材質はJIS G 3101 (SS 41)である。主桁と横桁とのセリ中心軸を一致させるために、また、主桁の下フランジ部に生じ易い横振れ現象<sup>23)</sup>を防ぐために、供試体の主桁と横桁は同一形状寸法のH形鋼を用いた。供試体製作後、曲げ加工および溶接による残留応力(変形)を除去するために、約  $620^\circ\text{C}$

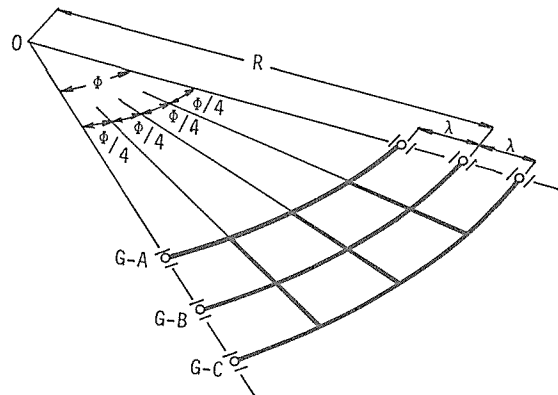


図5 室内模型実験用曲線格子桁の骨組形状

表1 曲線格子桁の形状寸法

Geometry of specimen	Type A	Type B	Type C
Radius of curvature :R	3.3m	10.0m	18.5m
Spacing of main girders: $\lambda$	0.3m	0.3m	0.3m
Central angle : $\phi$	40.0°	13.0°	7.0°

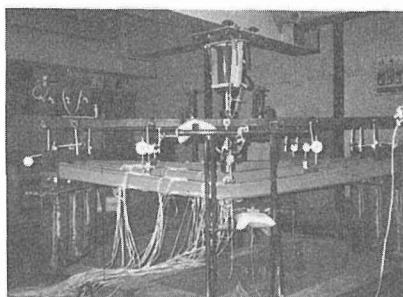


写真1 室内模型実験の全景

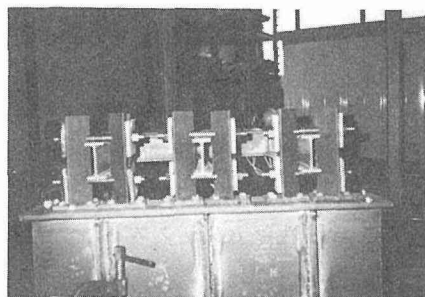


写真2 供試体の支承部

で4~6時間程炉中で熱処理した。供試体の加熱および炉冷には2日間の工程を要した。また、供試体と同時に焼鈍した同一材料および塑性崩壊後供試体から切り取った試験片を、わが国のJIS規格<sup>29)</sup>に従って引張強度試験を行なった。なお、製作した3種類の曲線格子桁の形状寸法は表1のとおりである。

写真1は室内模型実験の全景である。荷重載荷は手動の油圧ジャッキにより行ない、力計によって荷重値を測定する方法を採用した。漸増する荷重に対して、油圧ジャッキおよび力計が常に鉛直方向を保ち、かつ、水平方向への移動を防ぐために、力計下部と供試体の間には特殊な球座を考案し挿入した。実験用曲線格子桁の支持条件(境界条件)は曲げに対して単純支持、ねじりに対して固定支持、曲げねじりに対して自由とした。写真2は、その支承部の支持状態を示している。

具体的な測定結果は次の数値計算結果と比較して記述する。

#### 4. 数値計算結果

ここでは、前述の3種類の供試体について数値計算し、降伏条件式の相異および室内模型実験結果との比較を行なう。曲線格子桁の弾塑性解析に必要な各部材の断面諸元は表2に示してある。

図6は最小曲率半径を有する曲線格子桁(Type A)に集中荷重 $P$ が中桁(主桁B)中央点に作

表2 曲線格子桁の断面諸元

Input data	Curved main girder	Transverse beam
Bending stiffness : $EJ_y$	$3.7536 \times 10^1 \text{ tm}^2$	$3.7536 \times 10^1 \text{ tm}^2$
Torsional stiffness : $GJ_t$	$1.1756 \times 10^{-1} \text{ tm}^2$	$1.1756 \times 10^{-1} \text{ tm}^2$
Warping stiffness : $EJ_w$	$6.3856 \times 10^{-3} \text{ tm}^4$	$6.3856 \times 10^{-3} \text{ tm}^4$
Fully plastic bending moment : $M_{yp}$	$1.5969 \times 10^0 \text{ tm}$	$1.5969 \times 10^0 \text{ tm}$
Fully plastic torsional moment : $T_{sp}$	$7.3448 \times 10^{-2} \text{ tm}$	$7.3448 \times 10^{-2} \text{ tm}$
Fully plastic warping moment : $M_{wp}$	$1.4796 \times 10^{-2} \text{ tm}^2$	$1.4796 \times 10^{-2} \text{ tm}^2$

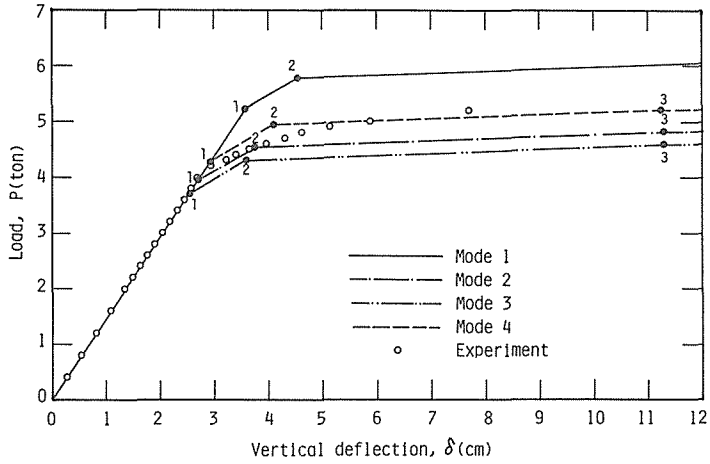


図 6  $P-\delta$  曲線 (Type A の場合)

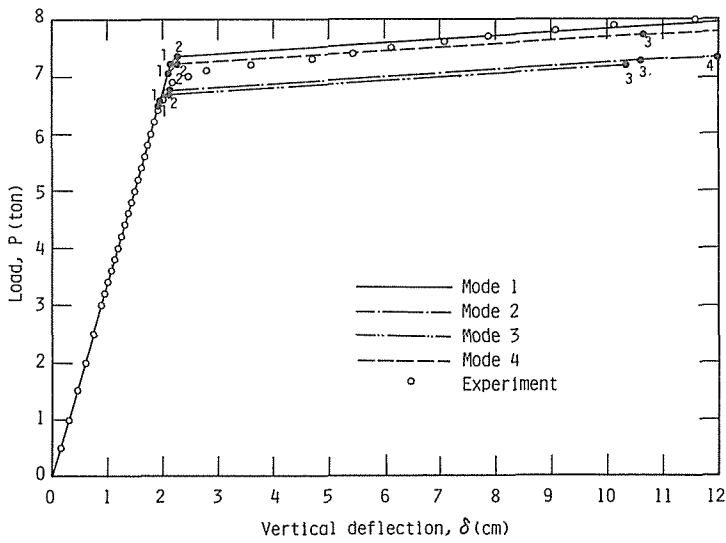


図 7  $P-\delta$  曲線 (Type B の場合)

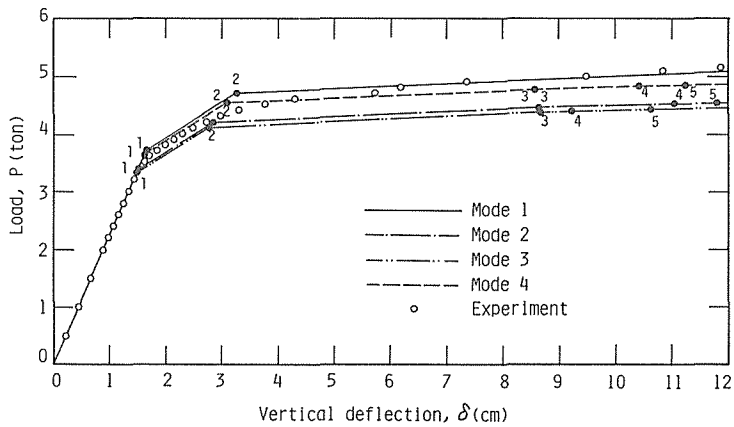


図 8  $P-\delta$  曲線 (Type C の場合)

用した場合の外桁(主桁 C) 中央点における鉛直たわみ  $\delta$  と荷重  $P$  との関係を示したものである。図中の●印の算用数字は塑性ヒンジの発生順序を表わし、○印は室内模型実験による  $P-\delta$  の測定結果である。図 7 は Type B の曲線格子桁の中桁中央点に集中荷重  $P$  が作用したとき、最大鉛直たわみを生じる外桁中央点に着目した  $P-\delta$  曲線である。さらに、図 8 は最も曲率半径の大きい曲線格子桁 (Type C) の内桁中央点に集中荷重  $P$  が作用した場合の載荷点における鉛直たわみ  $\delta$  との関係を示したものである。

図 9, 10, 11 はそれぞれ Type A, B, C の曲線格子桁の塑性崩壊機構と各降伏条件式の相関曲線および相関曲面における塑性ヒンジの発達 (成長) 状況を示している。

Mode 1 の降伏条件式により解析した崩壊荷重は他の 3 種類の降伏条件式による解析結果と比較して一般的に大きい値を示している。この理由は、曲線格子桁の主桁および横桁に大きな曲げねじりモーメントが生じているにもかかわらず、降伏条件式にはこの影響を無視しているためであ

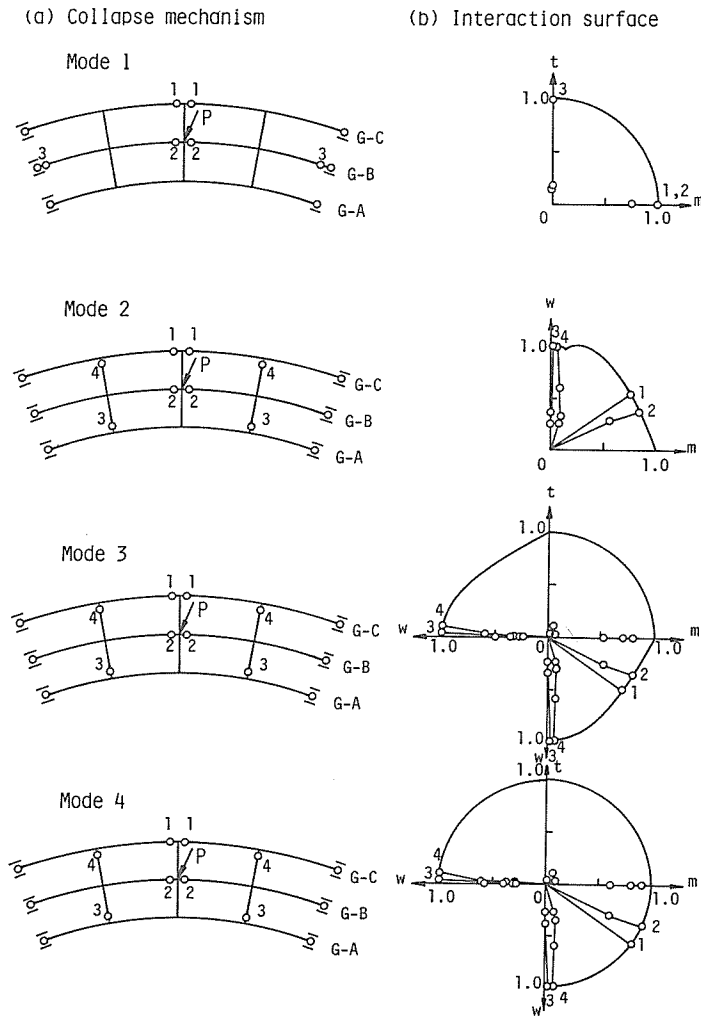


図 9 塑性崩壊機構と塑性相関曲面における塑性ヒンジの発達過程 (Type A の場合)

る。したがって、塑性ヒンジの発生順序（塑性崩壊機構）も他の結果と異なった性状を示す。図 9, 11 より、Mode 1 の降伏条件式による塑性ヒンジ 1, 2 は曲げモーメント  $M_y$  のみで、塑性ヒンジ 3 は St. Venant の純ねじりモーメント  $T_s$  のみで部材端が全断面塑性状態に達していることがわかる。

Mode 3 の降伏条件式により求められた崩壊荷重は最も低い値となっており、Mode 2 の降伏条件式による  $P-\delta$  曲線と非常によく似た数値計算結果を得ている。これは、曲げモーメント  $M_y$  による垂直応力度  $\sigma_y$  および曲げねじりモーメント  $M_w$  による垂直応力度  $\sigma_w$  にくらべて St. Venant の純ねじりモーメント  $T_s$  によるせん断応力度  $\tau_s$  が非常に小さいためであると考えられる。したがって、式 (17c) において  $t \approx 0$  とすれば、Mode 2 と Mode 3 の降伏条件式の類似性が確かめられる。

Mode 4 の降伏条件式による  $P-\delta$  曲線は前述の場合と比較すると中間的な位置を占めており、

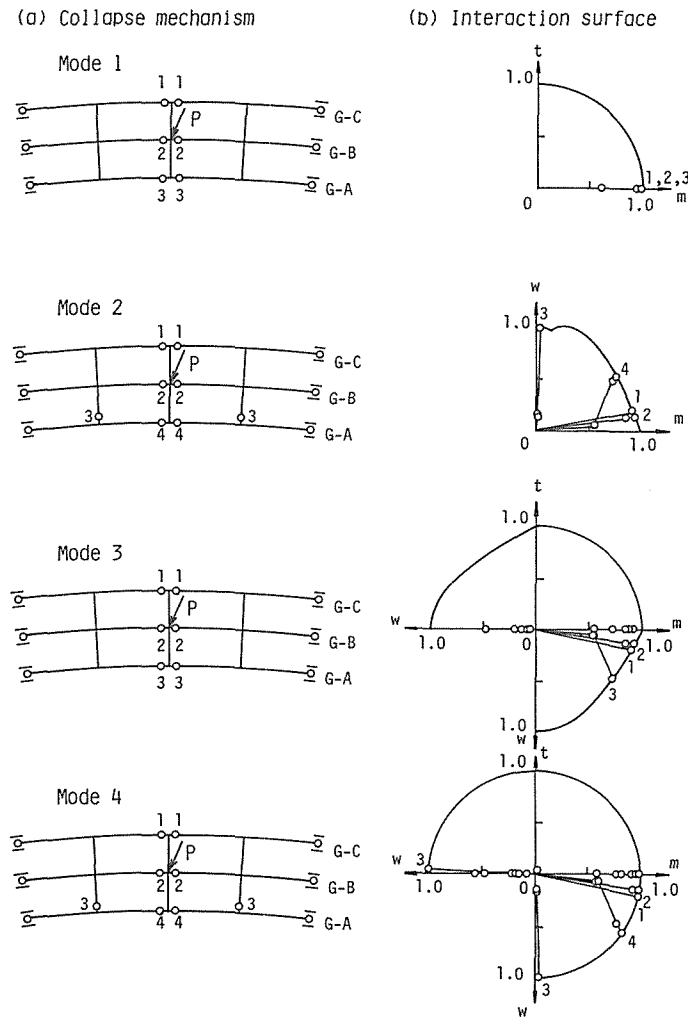


図 10 塑性崩壊機構と塑性相関曲面における塑性ヒンジの発生過程 (Type B の場合)

室内模型実験による測定結果ともよく一致している。Mode 3 よりも Mode 4 による降伏条件式の解が大きな崩壊荷重を与えるのは、図 3 の相関曲面の差に起因する。すなわち、曲線格子桁を構成する部材の弾性範囲を意味する相関曲面内部の空間的領域が Mode 3 よりも Mode 4 の方が大きいためである。

曲げねじりの影響を含んだ降伏条件式 Mode 2, 3, 4 による塑性崩壊機構について言及するならば、図 9 において、主桁に生じる塑性ヒンジ 1, 2 は曲げモーメント  $M_y$  と曲げねじりモーメント  $M_w$  が連成した状態で塑性化し、横桁に発生する塑性ヒンジ 3, 4 はほとんど曲げねじりモーメント  $M_w$  のみで塑性化している。同じ荷重載荷状態で、曲率半径のやや大きい Type B の場合 (図 10) についてみると、横桁の塑性ヒンジ 3 はほぼ曲げねじりモーメント  $M_w$  のみで、主桁に生じる塑性ヒンジ 1, 2, 4 は曲げモーメント  $M_y$  と曲げねじりモーメント  $M_w$  が連成しているけれども、曲げモーメント  $M_y$  がやや支配的な状態で塑性化している。曲線格子桁の内桁中央点に荷重載荷した場

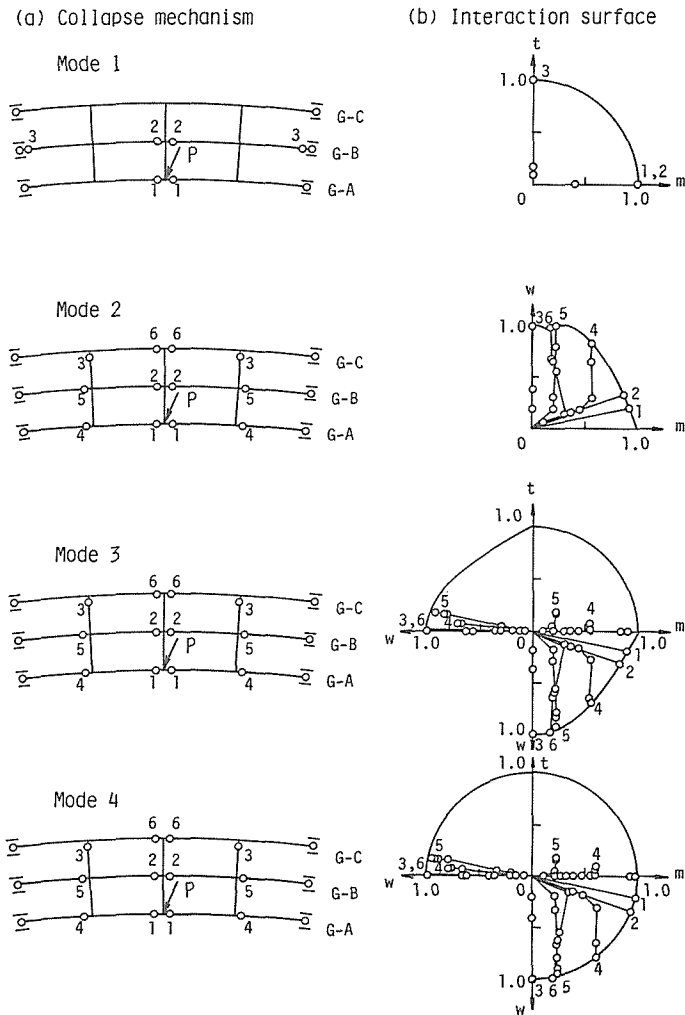


図 11 塑性崩壊機構と塑性相関曲面における塑性ヒンジの発達過程 (Type C の場合)

合(Type C, 図 11 参照)についてみると, 横桁に発生する塑性ヒンジ 3 を除いて, 他の塑性ヒンジは曲げモーメント  $M_y$  と曲げねじりモーメント  $M_w$  が複雑に連成していることがわかる。しかし, 曲線格子桁の弾塑性解析において, St. Venant の純ねじりモーメント  $T_s$  (せん断応力度  $\tau_s$ ) の影響はいずれの場合においても小さいということは非常に興味深い結果である。

## 5. あとがき

本研究は, 薄肉 I 形断面の曲げねじりを考慮した曲線格子桁の弾塑性解析を, 線形な変位法の剛性マトリックスを用い, 曲げ, ねじり, および曲げねじりモーメントを組み合わせた降伏条件式を導入して定式化を行なった。本解析法は, 機構法のような塑性崩壊形式を仮定する必要がなく, 曲線格子桁の崩壊荷重および塑性崩壊機構を電子計算機により自動的にかつ克明に追跡することができ, 非常に有効な解析手法であると思われる。また, ここで提案した式(17d)の球状降伏条件式は簡明であり, その数値計算結果は比較的实验結果ともよく一致したので, 今後の薄肉曲線格子桁橋の耐荷力の研究に役立つであろう。

しかしながら, ここで得られた数値計算および実験結果はごく限られた供試体について検討したものであり, 解析方法にもいくつかの仮定および近似式が含まれている。今後の研究課題として, 局部座屈, 全体座屈, 幾何学的非線形性, ひずみ硬化, 残留応力, 初期変形, 塑性域の拡がり, 部材の材料学的非線形性等の影響を考慮する必要がある。また, 実用的でかつ薄肉部材の断面形状を考慮した降伏条件式の理論的な誘導も望まれるところである。

最後に, 本研究は第一著者ならびに故稼農知徳教授(秋田大学)の一連の研究成果が基本となっており, 特に第二著者は生前あたたかい御指導と激励を賜った稼農知徳教授に深甚なる感謝の意を表するとともに, 故人の御冥福を祈る次第である。また, 本研究に関して多くの助言を賜った秋田大学薄木征三助教授に謝意を表します。さらに, 室内模型実験に多大な御協力をいただいた及川昭夫技官を始め, 研究室の大学院生ならびに 4 年生諸氏に感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) Wagner, H.: Luftfahrt-Forschung, Band 11 (1939), S. 179
- 2) Bornscheuer, E. W.: Stahlbau, Band 21 (1952), Heft 1, S. 1 und Heft 3, S. 52
- 3) Vlasov, V. Z.: 薄肉弾性ばりの理論 (奥村敏恵外共訳), 1967, 技報堂
- 4) Heilig, R.: Stahlbau, Band 30 (1961), Heft 4, S. 97 und Heft 11, S. 333
- 5) Wansleben, F.: Stahlbau, Band 21 (1952), Heft 4, S. 53
- 6) Kreisel, M.: Stahlbau, Band 31 (1962), Heft 12, S. 364
- 7) Dabrowski, R.: Stahlbau, Band 33 (1964), Heft 12, S. 364 und Band 34 (1965), Heft 5, S. 135
- 8) Becker, G.: Stahlbau, Band 34 (1965), Heft 11, S. 334
- 9) 小西一郎, 小松定夫: 土木学会論文集, 87 (1962), p. 35
- 10) 倉西 茂: 土木学会論文集, 108 (1964), p. 7
- 11) 島田静雄: 東京大学橋梁研究室報告, 95 (1961)
- 12) 深沢泰晴: 土木学会論文集, 110 (1964), p. 30
- 13) 稼農知徳: 土木学会論文報告集, 189 (1971), p. 1
- 14) 薄木征三, 稼農知徳, 渡辺 昇: 土木学会論文報告集, 290 (1979), p. 1
- 15) 渡辺 昇, 稼農知徳, 薄木征三: 土木学会論文報告集, 317 (1982), p. 31
- 16) 米沢 博, 三上市蔵: 土木学会論文集, 132 (1966), p. 18

- 17) 今井富士夫, 太田俊昭, 森 望: 土木学会第 39 回年次学術講演会概要集, 1984, I-66
- 18) Hayashikawa, T. et al.: J. of Civil Engrg. Design, Vol. 2 (1980), No. 4, p. 379
- 19) 渡辺 昇, 稼農知徳, 藤井裕司: 土木学会論文報告集, **218** (1973), p. 1
- 20) 田中 尚: 構造物の極限解析, 1966, 彰国社
- 21) 薄木征三, 稼農知徳: 土木学会論文報告集, **235** (1975), p. 29
- 22) 渡辺 昇, 稼農知徳, 藤井裕司: 北海道大学工学部研究報告, **68** (1973), p. 55
- 23) 稼農知徳: 北海道大学工学部研究報告, **57** (1970), p. 17
- 24) 鷹羽信勝, 成岡昌夫: 土木学会論文報告集, **178** (1970), p. 1
- 25) Yoo, C. H. and Heins, C. P.: Proc. of ASCE, Vol. 98 (1972), No. ST4, p. 899
- 26) Badawy, H. E. I. and Jordaan, I. J.: Proc. of ASCE, Vol. 103 (1976), No. ST7, p. 1429
- 27) Kollbrunner, C. F. and Hajdin, N.: Dünnwandige Stäbe, 1975, Springer-Verlag
- 28) 渡辺 昇, 稼農知徳, 藤井裕司: 北海道大学工学部研究報告, **66** (1973), p. 1
- 29) 日本材料試験協会編: 材料試験便覧, 1957, p. 90