北海道大学工学部研究報告
第126号（昭和60年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 126 (1985)

セールス巡回路に関する二・三の考察（その4）

榊　原　勝　昭
（昭和59年12月27日受理）

Methods to obtain the Shortest Hamilton-Line of the Traveling Salesman Problem

Katsuaki SAKAKIBARA
(Received December 27, 1984)

Abstract

All Hamilton-lines of the traveling salesman have its own combination of edges. We found, for the combinations of edges having the total length of the edges smaller than the length of a Hamilton-line sampled, a method to arrange these combinations from that with the shortest total length of the edges to that with the larger total length of the edges. We also found a method to obtain the Hamilton-line with a minimum length from the above arranged combinations by searching from that with the shortest total length to that with the larger total length, if the combination is a Hamilton-line.

The shortest Hamilton-line was also found by a geometrical method, which is considered as applicable to many cases.

1. まえがき

我々の生活は現在，世界的に単一な商品市場と密接に関連づけられております。これは，それぞれの適所での集中的な大量生産と，それらの輸送手段の高速化・大型化によると同時に又，国内・地域内での往来の頻度と肌理細かさを支えている軽便化とによるものでしょう。こうした仕組と文明諸国のすう勢たる大量消費型の生活ぶりは，地球全域に恒って厖大な物流を生じさせています。この事は，生産・消費の過程のみならず，輸送過程においても又，資源の損耗・有害物質の拡散には容易ならぬものがあろうと推測させます。

この輸送の過程は，その手段の運用・使用次第で無駄の少ないものに改善される余地を持っておりますが，セールス巡回路の問題は，一定の条件の下でのこの使用法の理想解を得る方法を見い出そうとするものです。そしてその解は，物流のみならずエネルギー等の配送法・情報伝達網等全てのネットワークに関する問題に関連して来ます。

そして，このセールス巡回路の特質は，なによりも次の点にあると思います。

即ち，この問題がもし，簡単な幾何学的手法で解けたなら，空地を横切って近道をつける子供

（電子工学科　電波応用学講座）

達ですら自ずと用いているピタゴラスの定理の様に，万人が日常的に自ら使用し得るものとなるであろうという点です。

先の報告[1]で，適当な一つの巡回路を基準にして，それより短い組合せの存在する範囲を求め，そこでの全数検査によって最短の巡回路を得る方法を示しましたが，今回はそれをグラフ理論的に改良した方法を示します。更に，例題によっては，最短の巡回路に行きつく可能性が極めて高い幾何学的方法も示します。

2. 本　　　文

ここに示めす方法は，次の様な考えを基本にしている。

n 個の点に関する巡回路の総数は $A(n)=(n-1)!/2$ であり，この各々は，n 個の点の間にひける $a(n)=n(n-1)/2$ 個の辺から，n 個の辺を選ぶ組合せのいずれかに対応する。この組合せの数は $B(n)={}_aC_n$ であり，n が大きい場合には，

$$B(n)={}_aC_n \fallingdotseq \frac{e}{\sqrt{2}\pi n}\cdot\frac{n+1}{n-3}\cdot\left(\frac{e}{2}(n-3)\right)^n \qquad 但し，a=\frac{n(n--1)}{2} \tag{1}$$

$$A(n)=\frac{1}{2}\cdot(n-1)! \fallingdotseq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-(n-1)}\cdot(n-1)^{n-\frac{1}{2}} \tag{2}$$

$$\frac{B}{A} \fallingdotseq \frac{1}{\pi e^2}\cdot\left(\frac{e^2}{2}\right)^n \qquad 但し，A(n)はStirlingの公式 \tag{3}$$

となり，A≪Bである*。即ち，B 通りの組合せの中に，巡回路に対応するものは，パラパラと散在しているに過ぎない。しかし，この組合せの全てを，各々に所属している辺の長さの和が最小となるものから順に並べ，その列の最初から辿って行けば，最初に行き合った巡回路に対応する組合せが，求める最短の巡回路である事は確実である。B/A は，求める最短の巡回路に到達するまでに，通過するであろう組合せの数に対する一つの目安である。これを A 自体と較べて見ると

$$\frac{A}{B/A} \fallingdotseq 50\left(\frac{n-1}{10}\right)^{n-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

となって，11≦n で全数検査の方が圧倒的に大きくなって行く。(表 1，図 1 参照)

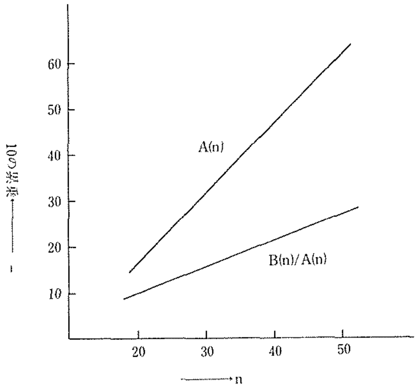
そこで，検査対象をB/Aで済ます工夫を探そうというのが，発想上の基本で，前回の報告でその工夫の一つを示した。

それは，目測で得た一つの巡回路を基準にとり，それよりも明らかに大きくなる組合せ部分を先ず除外してしまい，残りの部分について，多少のオーバーラップ的入れ違いを含みつつも，概ね大きさ（小ささ）の順に並べ，小さい方から巡回路との対応の有無を調べて行き，最短とおぼ

表 1

	n＝20	n＝30	n＝40	n＝50
A(n)	6.08×10^{16}	4.42×10^{30}	1.02×10^{46}	3.04×10^{62}
B(n)	5.62×10^{27}	1.97×10^{46}	2.17×10^{67}	3.08×10^{89}
B／A	9.68×10^{9}	4.46×10^{15}	2.12×10^{21}	1.10×10^{27}

* B(n) 自体の近似式としては鈴木道雄教授による $B(n)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left(\frac{n-1}{2}\right)^n\left(\frac{n-1}{n-3}\right)^{\frac{n(n-3)}{2}}\quad\left(\frac{n-1}{n(n-3)}\right)^{\frac{1}{2}}$ の方が良いが必要な傾向は，より簡略な（1）式からも知る事が出来る。



n＝9の時　近似値　5514
　　　　　真　値　4669

図1

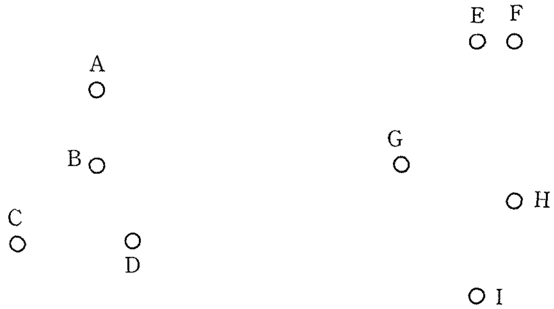


図2　例　題

表2　辺の長さ

A	●B■ 2.0	D 4.1	C 4.5	G 8.2	E 10.1	F 11.1	H 11.4	I 11.7
B	A 2.0	●D 2.2	C 2.8	G■ 8.0	E 10.5	I 10.6	H 11.0	F 11.7
C	●B■ 2.8	D 3.0	A 4.5	G 10.2	I 12.1	I 13.0	E 13.1	F 14.8
D	B■ 2.2	C 3.0	A 4.1	●G 7.3	I 9.1	H 10.0	E 10.4	F 11.3
E	F 1.5	●G■ 3.8	H 4.3	I 6.6	A 10.1	D 10.4	B 10.5	C 13.1
F	●E■ 1.0	H 4.2	G 4.4	I 6.7	A 11.1	D 11.3	B 11.9	C 14.8
G	H 3.2	E 3.8	I 4.0	F 4.4	D■ 7.3	●B 8.0	A 8.2	C 10.2
H	I 2.6	●G■ 3.2	F 4.2	E 4.3	D 10.0	B 11.0	A 11.4	C 13.0
I	●H■ 2.6	G 4.0	E 6.6	F 6.7	D 9.1	B 10.6	A 11.7	C 12.1

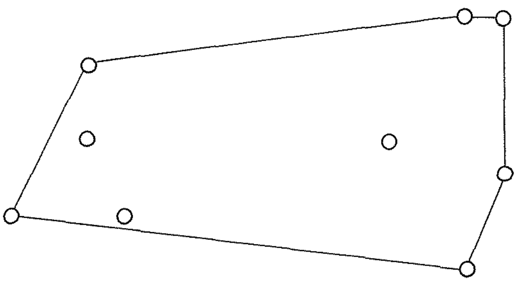


図3　凸　包

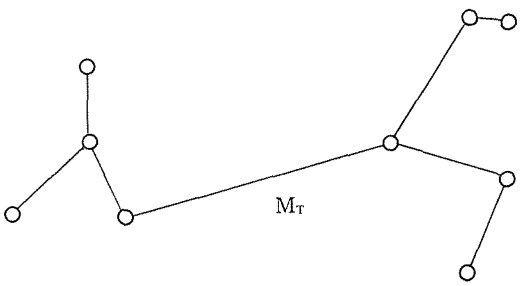


図4　全長最小の木

表 3

番　号	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭
長　さ	1.0	2.0	2.2	2.6	2.8	3.0	3.2	3.8	4.0	4.1	4.2	4.4	4.5	7.3
辺	$\overline{EF}$	$\overline{AB}$	$\overline{BD}$	$\overline{HI}$	$\overline{BC}$	$\overline{CD}$	$\overline{GH}$	$\overline{EG}$	$\overline{GI}$	$\overline{AD}$	$\overline{FH}$	$\overline{FG}$	$\overline{AC}$	$\overline{DG}$
番　号	⑮	⑯	⑰	⑱	⑲	⑳	㉑	㉒	㉓	㉔	㉕	㉖	㉗	
長　さ	8.0	8.2	9.1	10.0	10.1	10.2	10.4	10.5	10.6	11.0	11.3	11.9	12.1	
辺	$\overline{BG}$	$\overline{AG}$	$\overline{DI}$	$\overline{DH}$	$\overline{AE}$	$\overline{CG}$	$\overline{DE}$	$\overline{BE}$	$\overline{BI}$	$\overline{BH}$	$\overline{DF}$	$\overline{BF}$	$\overline{CF}$	

しき巡回路と最初に行き合った。そして，先の〝多少の入れ違い〟による誤謬の有無を，残りの部分の部分的全数検査によって検証し，最初に行き合った巡回路が最短のものであった事を知るという方法であった。

今回示すのは，この方法を改良したものである。その改良は，二・三の幾何学的な特徴を加味する事によって，組合せの列を作る際に除外し得る部分を拡大し且つ，巡回路に対応する最初の組合せに到るまでの検査範囲を狭めると共に，いくつかの手順の簡素化によるものである。

以下，図 2 に示した例題によってこの方法を述べる。頂点の間の距離（辺の長さ）を表 2 に掲示した。辺の長さが互に異なる例題を選んである。表 2 には，辺の両端点双方から見た同じ長さを書き入れてある。

図 2 の頂点に関する凸包を描き（図 3)，対角線を見いだす。対角線を含む巡回路は，決して最短とはなり得ないので，最短の巡回路を求める過程から，対角線そのものを除外してさしつかえない。従って，検査対象となる組み合せの範囲は，先ず，どの対角線も含んでいない組合せだけで良い事になる。対角線を除いた残りの辺を，小さい順に並べて表 3 を作る。

全長最小の木（図 4）と任意の巡回路（図 7 参照）の間には次の様な関係がある。

全長最小の木の描き方[2]は知られており，頂点だけのグラフに最小の辺から順次長くなる辺を書き入れて行くが，その際，既存の辺との間に閉路をなす辺は書き加えずに飛び越して次に進み，全ての頂点が連結になった時点で出来上っているグラフが，全長最小の木である。

任意の巡回路の長さを L，全長最小の木の長さを T_0 とすれば，常に，$T_0 < L$ が成立つ事も知られている。如何なる巡回路（2 次連結）も，一辺を除去する（図 7 参照）と木（1 次連結）になってしまうからである。これらの事から以下の事がいえる。

ここで，長さ L の巡回路の中の最大の辺（図 7 参照）を M_L とすれば

$$T_0 \leqq L - M_L \qquad 即ち \qquad T_0 + M_L \leqq L$$

が成立つ。次に，T_0 の中の最大の辺を M_T（図 4 参照）とし，これを除外して木を二分する。すると頂点の方も又二つのブロックに分かれる（図 5 参照）。任意に与えられた例題の頂点を二つのブロックに分けて眺めた場合，如何なる巡回路もブロックの間に架る辺を少なくとも二つ持っていなければならない。従って長さ L の巡回路にもその様な辺が二つ含まれているはずである。その様な辺を含んだ上で

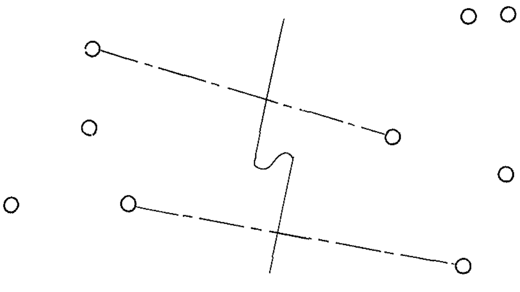


図 5　二つのブロックと架辺の例

M_Lは最大なのであり，一方，M_Tは二つのブロックを繋ぎ得る辺の最小の辺（頂点を任意の二つのブロックに分けた時，両者を繋ぐ最小の辺は，それ以前に結ばれた辺との間に閉路を作る事が出来ないので，全長最小の木に必ず選ばれている）であるので，

$$M_T < M_L$$

が成立つ。等号が附かないのは，全ての在り得る辺の長さが異なるとしているからである。即ち，M_Lは少なくとも，注目している二つのブロックを繋いでいる長い方の辺であるから。従って

$$T_0 + M_T < T_0 + M_L \leqq L \qquad (5)$$

が成立する。Lは任意の巡回路であるから，最短の巡回路でも良く，次の事が成立つ。即ち[5]，「最短の巡回路は，全長最小の木にその中の最大の辺を加えたものより更に長い」事になる。

二つのブロックを繋ぐ辺は表３の中で見つける事が出来る。その様な辺の中の最小のものと，その次に小さい辺（表３のD-GとB-G）をマークすれば，如何なる巡回路に対応する組合せも，表３のマークされた辺よりも右側（マークされた辺は含まれる）から，それぞれ一辺ずつを選んでいる事になる。但し，一方のブロックが唯一つの頂点を含んでいる場合（図６参照）に限り，マークされるべき二つの辺に同一の頂点が関与する事が許容されるだけであり（巡回路形成にとっての必要性から），従って本例題の場合は，この条件に合うマークされるべき辺は，D-GとB-Gの組みからB-GとD-Iの組に変更されなければならない。

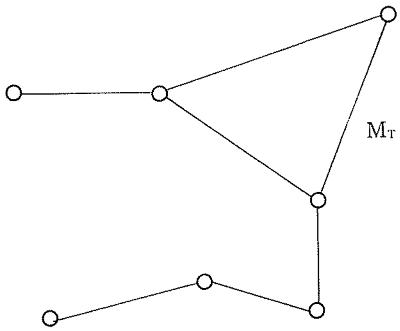


図６

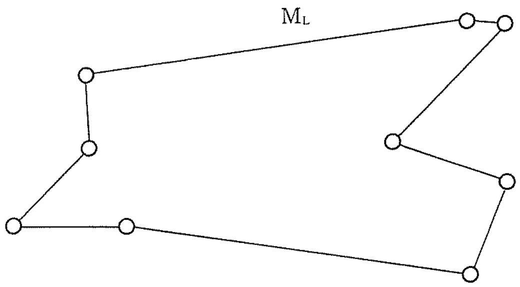


図７　巡回路のサンプル

以上の準備をしておいて，次に，目測で選んだ巡回路（図７）を基準にしての"組合せの列"の作り方を以下に述べる。

先ず，後の作業量は基準となる巡回路の長短に左右されるので，出来る限り短いものを選んで置く方がよい。ここに基準として選んだ巡回路の長さは，$38.1 = L_1$である。先にマークした２辺の長さの合計は17.1である。如何なる巡回路もその和が17.1以上になる２辺を含んでいるのだから，残りの$9-2=7$個の辺の長さの和が$38.1-17.1=21.0$を越えるものは，L_1よりも大きくなってしまう。表３において，連続する７辺の和が最初に21.0を越えるのは③～⑨の７辺（21.6）である。これは，表３の③以後から７辺（マークした２辺は別にして）全てを採る組合せは，L_1より大きな巡回路にしか対応しない事を意味する。従って，７辺のうちの少なくとも１辺は，①～②の中から採っている組合せでなければ，L_1より小さくなり得ない事を意味している。

１辺を選ばなければならない①～②の中で，最小の$\overline{EF}$（長さ1.0）を採ったとする。すると今度は残る６辺が$21.0-1.0=20.0$を越えてはならない事になり，そこで，連続する６辺が最初に20.0を越える所を表３で探し，⑤～⑩（長さ20.9）を得る。これは６辺が共に⑤以後にある組合

せ(に属する辺の長さの合計)は，L_1 を越えてしまう事を意味している。この事は又同時に，6 辺残っている 6 辺の中の少なくとも 1 辺は④以前になければならない事をも意味している。この④以前になければならない 1 辺が，採り得る範囲②～④（同じ辺を二度選ぶと巡回路にならないので①を抜かす）の最小の辺②（$\overline{AB}=2.0$）を採ったとする。すると残る 5 辺が（38.1－17.1－1.0－2.0)＝18.0 以下である事が必要となり，この事から今度は，5 辺が共に⑥以後にあるものが L_1 より大きな組合せである事が判る。以下同様な手順によって，L_1 より大きくなる条件，L_1 より小さくなるための制約を，基準にとった巡回路と例題の特徴（表 3 ）の関係から取り出す。

次に，この条件によって不適なものを除き，制約によって L_1 より小さい組合せの存在する範囲を知り，表 4 を得る。この表の 1 欄から 7 欄までの欄の境界は，上で得た制約を書き入れたに過ぎない。それ以後は一括して 8 欄とした。この 8 欄からは，先に述べた二つのブロックを繋ぐ 2 辺が選ばれる。

表 4 の一番下の行には，1 欄から 7 欄までの各欄に 1 個ずつ○印を入れてある。8 欄には○印を二つ入れてある。これによって，この行には，7 欄までの各欄からは 1 辺を選び，8 欄からは 2 辺を選ぶ組合せの全てを所属させる事とした。更に又，この行のどこかの欄の○印をそれより後の欄に移してから，その○印の数に合わせて各欄から辺を選んだ組合せは，L_1 を越えてしまう事になる。逆に言えば，L_1 を越えない組合せは，この行の○印の数に従がって各欄から辺を選び出したものか，或は，この行に記入されている○印をそれより前の欄に移した後に，それらに従って各欄から辺を選び出したものの中にしかない事になる。

表 4 の一番上の行は，○印を可能な限り，小さな辺の方に寄せ集めたもので，巡回路になる可能性が未だ残っている組合せの最小のものは，この行の中にある。

中間の行は，一番上の行の○印を，系統だてて少しずつ後の欄に移動させ，一番下の行と一致した時点で止る事によって得たものである。

或る行に属する全ての組合せの長さが，それより下の行の組合せの長さよりも小さいとは限らない。しかし概ね，上に属する組合せの方が，下のそれよりも小さいという大まかな秩序が出る。そこで，この行の列を前に述べた組合せを小さいものから並べた〝組合せの列〟として先ず用いてみようと言うのである。

表 4 の一番上の行から順に下に各行に属する組合せの全てを一つずつ巡回路と対応するかどうか検査するのである。その際，以下のいくつかの事を用いると作業は大いに緩和される。

イ） 表 4 の各行の右端に数字が入れてあるが，これは各行に属する組合せの中で，その長さが最小になるものの長さである。これは各行の○印の真直ぐ上の辺の長さを加える事によって得られる。例えば 8 行目については，①②③⑤⑥⑧⑨の 7 個の辺の和である。

これらの数字の中には 21.0($=38.1-17.1=L-\overline{BG}-\overline{DI}$）を越えているものがあるが，この事は，この行には L_1 より小さい組合せが無い事を意味しているので，行全体を無視出来る。もともと表 4 は L_1 より長いものを省いて作ったはずなのに，との疑問は可能な限り小さい辺をとったとしても尚かつ L_1 を越えてしまう場合を想定して，〝省き得るものの条件〟を算出した事を思い出せば解消される。

ロ） 又，$T_0+M_T \leqq L$ において，T_0 の中に既に M_T が含まれているわけで，巡回路は同一の辺を二度使う事はないので，本例題における $M_T(=\overline{DG})$ は，$\overline{DG}$ の次に小さい架辺（前述の二つのブロックを繋ぐ辺）$\overline{BG}$ に置き換える事が出来る。この時 $T_0+\overline{BG}=32.9$ となり，これより小さい組合せしかとれない行も又，無視してさしつかえない。巡回路と対応する組合せはないから。

表4

欄	1		2		3	4		5				6	7		
辺の番号	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	
長　さ	1.0	2.0	2.2	2.6	2.8	3.0	3.2	3.8	4.0	4.1	4.2	4.4	4.5	7.3	
行　辺	$\overline{EF}$	$\overline{AB}$	$\overline{BD}$	$\overline{HI}$	$\overline{BC}$	$\overline{CD}$	$\overline{GH}$	$\overline{EG}$	$\overline{GI}$	$\overline{AD}$	$\overline{FH}$	$\overline{FG}$	$\overline{AC}$	$\overline{DG}$	
1	○	○	○	○	○	○	○								16.7
2	○	○	○	○	○	○		○							17.3
3	○	○	○	○		○	○	○							17.7
4	○	○	○		○	○	○	○							17.9
5	○		○	○	○	○	○	○							18.5
6	○	○	○	○	○			○	○						18.3
7	○	○	○	○		○		○	○						18.5
8	○	○	○		○	○		○	○						18.7
9	○	○	○			○	○	○	○						19.1
10	○	○			○	○	○	○	○						19.8
11	○		○		○	○	○	○	○						19.9
12	○	○	○	○				○	○	○					19.6
13	○	○	○		○			○	○	○					19.8
14	○		○	○	○			○	○	○					20.4
15	○		○		○	○		○	○	○					20.8
16	○	○	○	○	○							○			17.9
17	○	○	○	○	○			○				○			18.7
18	○	○	○	○		○		○				○			18.9
19	○	○	○		○	○		○				○			19.1
20	○	○	○			○	○	○				○			19.5
21	○		○	○		○	○	○				○			20.1
22	○		○		○	○	○	○				○			20.3
23	○	○	○	○				○	○			○			19.9
24	○	○	○		○			○	○			○			22.1
25	○	○	○			○		○	○			○			22.3
26	○		○	○	○			○	○			○			22.7
27	○		○	○		○		○	○			○			22.9
28	○		○		○	○		○	○			○			23.1
29	○	○	○	○	○	○							○		18.0
30	○	○	○	○		○	○						○		18.4
31	○	○	○		○	○	○						○		18.6
32	○		○	○	○	○	○						○		19.2
33	○	○	○	○	○			○					○		18.8
34	○	○	○	○		○		○					○		19.0
35	○	○	○		○	○		○					○		19.2
36	○		○	○	○	○		○					○		19.8
37	○		○		○	○	○	○					○		20.4
38	○	○	○	○				○	○				○		20.0
39	○	○	○		○			○	○				○		20.2
40	○	○	○			○		○	○				○		20.4
41	○		○	○	○			○	○				○		21.0
42	○		○	○		○		○	○				○		21.2
43	○		○		○	○		○	○				○		21.4
44	○	○	○	○	○							○	○		19.4
45	○	○	○	○	○							○	○		19.6
46	○	○	○		○	○						○	○		19.8
47	○	○			○	○	○					○	○		20.9
48	○		○	○	○	○						○	○		20.4
49	○	○			○	○	○					○	○		21.0
50	○	○	○	○				○				○	○		20.5
51	○	○	○		○			○				○	○		20.7
52	○	○			○	○		○				○	○		21.6
53	○		○	○	○			○				○	○		21.3
54	○		○		○	○		○				○	○		21.7

表4　別　　掲

欄	8												
辺の番号	⑮	⑯	⑰	⑱	⑲	⑳	㉑	㉒	㉓	㉔	㉕	㉖	㉗
長　さ	8.0	8.2	9.1	10.0	10.1	10.2	10.4	10.5	10.6	11.0	11.3	11.9	12.1
辺	$\overline{BG}$	$\overline{AG}$	$\overline{DI}$	$\overline{DH}$	$\overline{AE}$	$\overline{CG}$	$\overline{DE}$	$\overline{BE}$	$\overline{BI}$	$\overline{BH}$	$\overline{DF}$	$\overline{BF}$	$\overline{CI}$
1 ～ 54	○		○										

又，$T_0+M_T \leqq L$ は架辺の部分と，それ以外の部分に分けても同内容の式が成り立つ。即ち，如何なる巡回路も架辺の合計は $\overline{DG}+\overline{BG}$ より小さくなれないし，その他の部分は（$T_0-\overline{DG}$）より小さくなれない。というのは，T_0 が全長最小の木であるので，その長さは全ての頂点が連結であるための必要最小限の値であるからである。そして，連結は巡回路にとって不可欠である。従って，$T_0-\overline{DG}=17.1$ より小さい組合せしか出来ない行も無視出来る事になる。

ハ）　行によってはいくつかの欄が○印で満杯になっているものがある。満杯の欄にはそこでの選択の余地がなく，どの組合せもいくつかの辺を絶対的に採らなければならず，それらの辺が巡回路となる事を阻む（部分的な閉路を作ったり，一つの頂点から三つ以上の辺が出たりして）場合がある。例えば6行目の場合，1•2及び3欄が満杯で，$\overline{AB}$，$\overline{BD}$ 及び $\overline{BC}$ を採らざるを得なく，これはBから3辺が出てしまう事を意味し，巡回路を阻んでいる。この機な行も行全体を無視する事が出来る。

これらの事によって無視出来ない行は，そこに属する組合せの一つずつについて巡回路との対応の有無，$L-\overline{BG}-\overline{DI}$ やLとの比較をして行かなければならない。

本例題の場合，無視出来ない最初の行は3行目であり，5欄でどの辺を採るかの違いで4通りの組合せがあるに過ぎない（架辺の採り方は別にして）。この4通りを次の様に検討する。

5欄で，$\overline{AD}$ を採ると，それ以前の欄で絶対的に選ばなければならない $\overline{BD}$，$\overline{CD}$ と相まって，Dが3度出て来る。これはDから3辺が出ている事を意味し，巡回路になり得ない。同様に，5欄で $\overline{FH}$ をとれば，$\overline{HI}$，$\overline{GH}$ との関係で巡回路にならない。

5欄で $\overline{EG}$ を採ると，この7辺に一度しか関与していない頂点は，A，C，F及びIの4個の頂点となる。従って，架辺はこの4個の頂点の間で作られなければならない。そうでないと，9個の頂点の少なくとも一つは3辺以上に関与する事になってしまい，巡回路にはなり得ない事になってしまうから。ところで，A，C，F，Iを前出の二つのブロック（図5参照）に分ければ，A，CとF，Iに分けられるが，架辺をなすためにはAがF又はIに結ばれなければならないが，これはどちらも対角線（図3参照）をなすので，最短の巡回路に使はれる事はないので，既に表3，表4から除外してある。従って，適切な架辺を作れないという事になる。

5欄で，$\overline{GI}$ を採れば，A，C，F，Eで架辺を作らなければならないが，今度はCが対角線を作ってしまう（図3参照）。

この様にして，3行目には目当ての組合せはない事を知る。

4，5及び6行は全体を無視する事が出来，次は7行目となる。この行には4欄と5欄での選択の仕方によって ${}_2C_1\times{}_4C_2=12$ 通りの組合せがある。そのうち巡回路と対応を持つのは2組だけで，その長さは共に L_1 より大きくなる。

次の8行目には ${}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_4C_2=24$ 通りの組合せがあり，この中には巡回路と対応するものが3

組ある。一つは交岐点を持ち，他の２本はその長さが37.0と36.7である。L_1より短い初めての巡回路36.7に着目する。ここまでに検討された組合せは全部で40通りである。

ここで"組合せの列"として用いられた表４の行の列が，各行に属する組合せはそれより下の行の組合せより短くなる様に工夫されていれば，最初に見つけられた巡回路が最短のものとなるが，表４の行の列には大まかな秩序があるに過ぎない。従って，L_1よりも長い巡回路が，L_1よりも短い36.7の巡回路よりも先に出て来てしまったし，36.7の巡回路が(図８参照。この組合せは，$\overline{FA}$，$\overline{AB}$，$\overline{HI}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$，$\overline{EG}$，$\overline{FH}$，$\overline{AG}$，$\overline{DI}$)が最短のものである保証もない。従って，９行目以下の行も検討せざるを得ない。

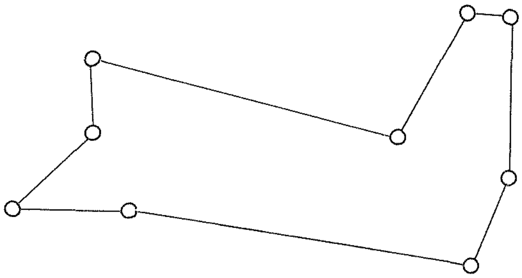


図８　最短の巡回路

先に挙げた行をまるごと無視出来る場合の条件により，16の行が無視出来る。それらは，16，25～30，34，42～45，50及び53～55の各行である。更に，表４の最後に別掲してある架辺だけに関する部分を見れば判る通り，着目している巡回路は架辺として採り得る最小のものを採っている。即ち，本例題の場合，"二つのブロック"には各々複数の頂点が所属しているので，両者を繋ぐ二本の架辺に関与する４個の頂点は全て別々なものでなければならない（図６及び図５参照）が，$\overline{AG}$，$\overline{DI}$はこれを満たす最小のものである。従って，36.7より短くなる組合せは，架辺を除いた残りの７辺の和が，$36.7-(\overline{AG}+\overline{DI})=19.4$より小さくなっていなければならない。すると，表４の右端の数字が19.4以下の行はこれも又，無視してよい事になる。この新たな情報によって，10～15，20～24，37～41，46～49及び51，52の計21個の行が新たに無視出来る。結局，前の条件によって無視された16行と合せて，合計37個の行が無視出来，９行目以下で調べなければならない行は僅か10個の行だけとなる。この10個の行に含まれている組合せの総数は106である。実際，それらを全て検査する事により，着目した長さ36.7の巡回路が最短である事が判明した。即ち，８行以前に検査した40通りと合わせ，合計146通りの組合せの検査により，最短の巡回路を得た事になる。架辺についての組合せは，それ以外の辺の組合せにより最大でも二通りだけに自動的に絞られてしまう。その事を加味すれば292通りである。但し実際には，架辺の調査まで到らないうちに失格してしまう組合せが大半である。

これらの事情を最初に掲げた諸式と照し合せてみる。

$n=9$で余り大きくないので近似式を使わずに容易に真値が求められ，$A(9)\fallingdotseq 2\times10^4$，$B(9)\fallingdotseq 9.4\times10^7$となり，従って，$B(9)/A(9)\fallingdotseq 4.7\times10^3$となる。即ち，頂点が９個の場合には，辺に関する組合せを小さいものから順にべたものを，最初の組合せから順に巡回路との対応の有無を調べ，対応を持つ組合せに初めて出合うまでに通過するであろう組合せの数の目安として，4.7×10^3を想定したのである。

上記の方法で，最短の巡回路を得るまでに通過した組合せの数292は，4.7×10^3よりずっと小さい。従って，表４の組合せに関する行の列は，小さい順に並べた"組合せの列"の役割を果しているると言えるだろう。即ち，$B(n)\gg A(n)$である組合せを全部ではなく，最短の巡回路を求めるのに充分な程度にまで，小さいものから順に並べ得たという事になる。これに関してもう一つ興味深い結果を示して置きます。

上で得た最短の巡回路を新たな基準にとって，表４に相当するものを作るとこの場合は21行の

表 5　最短の巡回路を標本にした時残る行

欄	1	2		3	4		5	6					7		
番号	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬		
長さ	1.0	2.0	2.2	2.6	2.8	3.0	3.2	3.8	4.0	4.1	4.2	4.4	4.5		
行＼辺	E F	A B	B D	H I	B C	C D	G H	E G	G I	A D	F H	F G	A C	最小値	組合せの数
1	○	○	○	○	○			○	○					18.4	20
2	○	○	○	○			○	○	○					18.8	10
3	○	○	○		○		○	○	○					19.0	20
4	○	○		○	○	○		○	○					19.2	20
5	○	○	○	○	○		○						○	18.3	2
6	○	○	○	○			○	○					○	19.3	5
7	○	○	○		○		○	○					○	19.5	10
8	○	○	○	○	○			○					○	18.9	10
9	○	○	○	○	○		○	○						17.6	10
10	○	○		○	○	○	○	○						18.4	10
11	○	○		○	○		○	○	○					19.4	40
														計 157	

表が先ず出来る。これから無視出来る行を取り除くと表 5 となる。この表 5 に含まれている組合せの数は 157 通りであり，架辺の分を考慮し 314 通りを得る。先の 292 とよく一致する事から，この表の作り方とその後の扱い方は，よく無駄を省いていると推測出来る。

最短の巡回路に到るまでに検討を要する組合せの数，約 300 は目安とした $B/A=4.7\times10^3$ よりずっと小さい。この事情が，n が大きくなった場合にも成立つとすれば，巡回路の全数検査よりここに示した組合せ検査の方が，図 1 に見るより更に有利だという事になる。n がずっと大きくなった場合や，特殊な例題の場合，検査が必要不可となる組合せの数がどの様に変化するのかは，今後の課題とする。

最後に，本例題の場合，上記の最短の巡回路に直接倒達する幾何学的方法がある事を示しておきます。

i ）全長最小の木（図 4）に，二つのブロック（図 5 参照）の間の架辺となり得るもの（表 4 の末

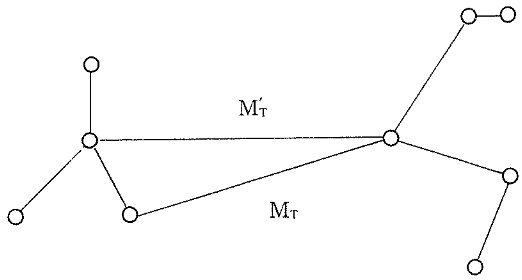


図 9

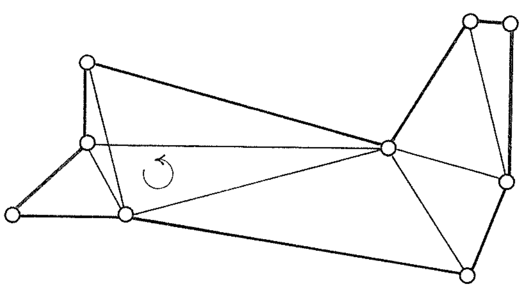


図 10　○ 印

尾に別掲されている）のうちM_Tの次に小さい辺$\overline{BG}$を加え（図9），9辺のグラフとする。

ii）この9辺を，各辺に関与している9個の頂点と対応させる。この1対1の対応のつけ方は，閉路になっている部分B–D–G–Bをどちら回りするかで2通りある。この2通りの対応づけを各々表2にマークしてある。一方は○印で，他方は□印である。

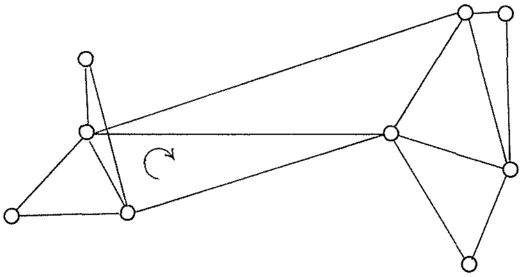


図11 □ 印

iii）図9のグラフに，各頂点が対応している辺の次に小さい辺（○印の場合には，表4の○印の右隣りの辺）を書き加える。○印の方の対応からは図10を，□印の対応の方からは図11のグラフを得る。

iv）図10及び図11のグラフの中から巡回路を探す。図11のグラフの中には巡回路は一つもなく，図10のグラフの中にただ一つだけ巡回路がある。それを図10に太線で示めしてある。これは，最短の巡回路（図8）と同一のものである。

この方法で最短の巡回路が得られる根拠は次の如くである。

先ず，如何なる巡回路も二次連結であり，従って少なくとも一次連結である事が必要となるが，これを全長最小の木をベースにとる事で無駄なく保証する。

次に，巡回路は閉路なので木（頂点の数には一つ足りない辺の数）に1辺を加える必要がある。$L \geqq T_0 + M_T$であるが，本例題の場合，同じ長さの辺はないので，架辺となり得るものの中でM_Tの次に小さい$M'_T = \overline{BG}$にM_Tを取り替る事が出来るので，これを加える。即ち，全ての頂点を任意の二つのブロックに分割した場合，巡回路はどの分割に対しても2本の架辺を必要とするが，最も長さを必要とする分割に対して，最も無駄のない辺を供給する事で，その必要性を賄った分けである。巡回路に必要でT_0に不足しているこれだけのものを供給するだけで，T_0が枝分れを持たない形をしている場合には，最短の巡回路が得られてしまう場合もある。（図12参照）

更に，$L \geqq T_0 + M'_T$であるから，最短の巡回路は，$T_0 + M'_T$の辺のいくつかをほんの少し長いもので置き換えて作られる事が予想されるが，その置き換え用の辺として，$T_0 + M'_T$の各辺の次に

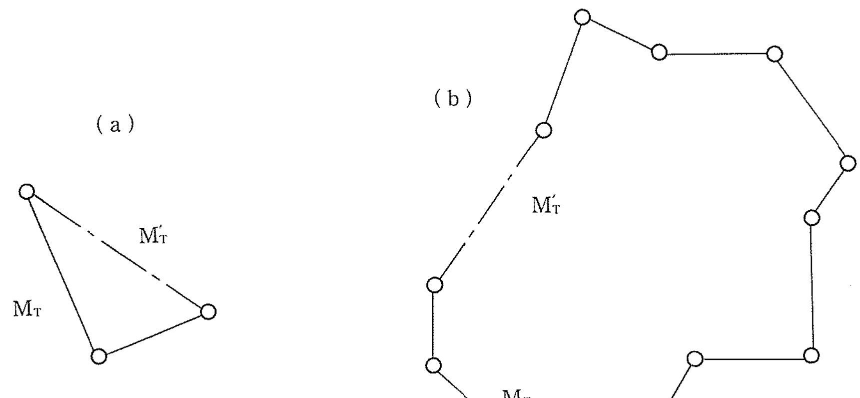


図12 $T_0 + M'_T$=最短巡回路の例

小さい辺を提供しているのである。

この幾何学的な方法が，如何なる例題においても，巡回路を形成するとは限らない。又もし，巡回路が得られたとしても，それが最短のものであるかどうかは判らない。しかし上記の根拠からして，最短のものである可能性は極めて高いと思われる。

又，この方法は辺を与え過ぎていないので巡回路をみつけるのが至極容易である。即ち，一つの頂点から2本しか出ていない辺は両者共に使用せざるを得なく，その様な辺を全てマークしておけば，それらの辺のどれかを出発し，後は部分的な閉路を作らない様に気をつけながらグラフ上の辺を伷って行けば殆ど自動的に有無が確められる。

3. あ と が き

前回の報告の時には，全長最小の木と巡回路の関係などを未だ見つけておらず，又，グラフ理論の利用も充分でなく，検査範囲の冗長度が大きかった。しかし，今回の改良された方法は，あえて最短の巡回路を標本にとって確かめた所によれば，その検査範囲は殆ど必要不可欠な部分だけに絞られていると考えられる。又，表4の行の列，即ち"組合せの列"を作る際，前の時には，組合せの公式に関する漸化式を用いたが，これはとても神経のいる面倒なものであった。今回は代りに表を眺めながら半自動的に行なう方法により，ずっと手軽なものになった。

この組合せ検査の方法が，nが大きくなった場合や，例題の種々な特徴によってその有効性が如何に変化するか等は，方法自体の一層の改良と共に今後の課題としたい。

最後に示した幾何学的方法は，nが手頃な場合には目見当の作図で最短の巡回路が得られる場合のある事を示している。最短でなくともそれに近いものならば，更に多くの場合に得られるものと思われ，日常的手軽さで使用可能なものとなっている。

この最短に近いものを最短のものに改造するヒントは既に得ており，詳細な検討は次回に報告したいと思います。

参 考 文 献

1）榊原勝昭：セールス巡回路に関する二・三の考察，北海道大学工学部研究報告　122号（1984）
2）J. B. Kruskal, J. R., Proc. Am. Math. Soc. vol7（1956）pp. 48–50