HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	一般化されたシャノンの標本化定理 ： 多項式オーダーの増大度をもつ振動型関数に対する補間公式への応用
Author(s)	長島, 知正; 八重樫, 光俊
Citation	北海道大學工學部研究報告, 127, 17-26
Issue Date	1985-07-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/41945
Type	departmental bulletin paper
File Information	127_17-26.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第127号（昭和60年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University. No. 127 (1985)

一般化されたシャノンの標本化定理
—— 多項式オーダーの増大度をもつ振動型関数に対する補間公式への応用 ——

長島　知正　八重樫光俊*

（昭和60年3月30日受理）

A Generalization of the Shannon's Sampling Theorem

Tomomasa NAGASHIMA and Mitsutoshi YAEGASHI

(Received March 30, 1985)

Abstract

The sampling theorem by Shannon has been well known in such fields as communication theory, information theory and signal processings. However, the condition to be satisfied by the theorem is too strong for practical purposes, i. e., it is ordinarily assumed that sampled functions should belong to L_2.

In this paper, we establish a theorem which can be considered as a generalization of Shannon's sampling theorem and is valid for a class of functions which does not necessarily belong to L_2. Our theorem can be also considered as an explicit sampling theorem for the class of functions given by the Fourier transform of Distributions with compact support.

1．序　　論

帯域幅の制限された波形（信号）に対する標本化定理としてシャノンの標本化定理は良く知られており，通信理論をはじめとし，情報理論，信号処理論等の分野でのひとつの基本定理と云うこともできよう。しかしながら，このシャノンの標本化定理は，通常 L_2 の波形を対象としているため，応用上波形の範囲が狭すぎるということが指摘されている[1),2)]。一方，このシャノンの標本化定理を連続関数に対する補間式（内挿公式）としてみることができるが，この立場から考える場合にも，多項式等を排除するため，補間式としての実用性を大巾に制限することになっている[3)]。

本論文では，連続関数に対する実用的な内挿公式を構成するという立場から，対象とする関数の範囲を L_2 に制限せず，より広い範囲の関数に対しても成立するようにシャノンの標本化定理を一般化し，特に，多項式オーダーの増大度をもつ振動型の連続関数に対して有効な補間式（内挿公式）を提出する。ここで示す内挿公式は，また，コンパクト・サポートをもつ超関数(Distribution) のフーリエ変換で与えられる波形に対するひとつの explicit な標本化公式[4)] と考えることもできる。

2．一般化されたシャノンの標本化定理[5)]

ここでは，序論で述べたように，対象とする関数の範囲を L_2 の制限をはずしても成り立つよ

＊　精密工学科　精密機器学第二講座

うにシャノンの標本化定理の拡張を行う。そのような一般化のひとつとして以下の定理が成り立つ。

[定理1]

$f(z)$を整関数($z\in \boldsymbol{C}$)とする。

$\exists p\in \boldsymbol{N}\cup\{0\},\quad \exists K>0,\quad 0\leqq {}^{\exists}\alpha<1,\quad \exists\varepsilon(\neq 1-\alpha)<0,\quad s.t.,$

$$|f(z)|\leqq K(1+|z|^p)\frac{(1+|Re\, z|)^{\alpha}}{(1+|Im\, z|)^{\alpha+\varepsilon}}\, e^{|Im\, z|}, \tag{$C-1$}$$

$\Rightarrow$

$$f(z)=\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{p-k}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\,\frac{H^{(k)}(0)}{k!}z^{k+j-1}\,\sin z+\lim_{n\to\infty}\sum_{l=-n}^{n}{}'f(l\pi)\left(\frac{z}{l\pi}\right)^{p}\frac{\sin(z-l\pi)}{z-l\pi} \tag{$F-1$}$$

$$=\sum_{l=1}^{p}f(\alpha_l)\frac{Q(z)}{Q^{(1)}(\alpha_l)\sin\alpha_l}\,\frac{\sin z}{z-\alpha_l}+\lim_{n\to\infty}\sum_{l=-n}^{n}f(l\pi)\frac{Q(z)}{Q(l\pi)}\,\frac{\sin(z-l\pi)}{z-l\pi} \tag{$F-2$}$$

ただし，$(F-1)$における$\sum'$は$l=0$を除く和を表わし，また，

$$f^{(k)}(0)\equiv\frac{d^k}{dz^k}f(z)\Big|_{z=0}$$

$$H(z)\equiv z/\sin z$$

である。$(F-2)$における$Q(z)$は，$z=\alpha_l\mp q\pi$ ($l=1,2,\cdots$, p: $|q|=0,1,2,\cdots$) に1位の零点をもつp次の多項式である。

証明：

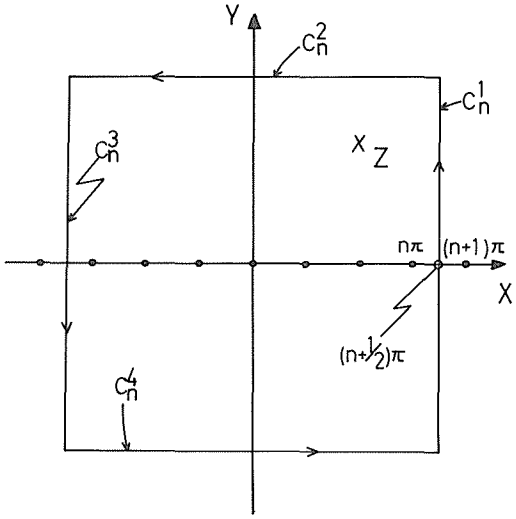

図1　積分路C_n(ただし，$C_n=\bigcup_{j=1}^{4}C_n^j$)

C_nを$\sin z$の零点$a_l=l\pi(|l|=0,1,2,\cdots)$の内，$|l|\leqq n$のみを内部に含む，$a_l$を通らない正方形の周とし，$z$を$C_n$の内部の点とする。(必要な記号等を図1に示した。ここで，$\zeta=x+iy$とする。)

初めに$(F-1)$を証明する。

(Ⅰ) $(F-1)$の証明

$$I_n(z)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^p\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\sin\zeta}\,d\zeta \tag{1}$$

を考える。コーシーの積分定理より，(1)はC_n内の留数として表わされ，

$$I_n(z)=\sum_{\{C_n\text{内の極}\}}Res\left\{\left(\frac{z}{\zeta}\right)^p\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\sin\zeta}\right\} \tag{2}$$

となる。ここで，C_n内には$\zeta=z$と$\zeta=l\pi(|l|=1,2,\cdots,n)$にそれぞれ1位の極，$\zeta=0$に$(p+1)$位の極がある事に注意して，それらの留数を求めると，次のように与えられる。

$$\underset{\zeta=z}{Res}\left\{\left(\frac{z}{\zeta}\right)^p\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\sin\zeta}\right\}=\frac{f(z)}{\sin z}$$

$$\underset{\zeta=l\pi}{Res}\left\{\left(\frac{z}{\zeta}\right)^p\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\sin\zeta}\right\}=(-1)^l\left(\frac{z}{l\pi}\right)^p\frac{f(l\pi)}{l\pi-z}\qquad(|l|=1,2,\cdots,n)$$

$$\underset{\zeta=0}{Res}\left\{\left(\frac{z}{\zeta}\right)^p\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\sin\zeta}\right\}=\frac{z^p}{p!}\frac{d^p}{d\zeta^p}\left\{\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\frac{\zeta}{\sin\zeta}\right\}\Big|_{\zeta=0}$$

$$=-\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{p-k}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\,\frac{H^{(k)}(0)}{k!}\,z^{k+j-1}$$

従って，

$$I_n(z)=\frac{f(z)}{\sin z}-\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{p-k}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\,\frac{H^{(k)}(0)}{k!}\,z^{k+j-1}-\sum_{l=-n}^{n}{}'(-1)^l\left(\frac{z}{l\pi}\right)^p\frac{f(l\pi)}{z-l\pi} \tag{3}$$

よって，$|I_n(z)|\to0\,(n\to\infty)$ならば，$(F-1)$が得られる。以下，$|I_n(z)|$を評価する；

$$|I_n(z)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_n}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^p\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\sin\zeta}\,d\zeta\right|$$

$$\leqq\frac{|z|^p}{2\pi}\sum_{m=1}^{4}\int_{C_n^m}\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta^p(\zeta-z)\sin\zeta}\right||d\zeta|. \tag{4}$$

上の積分は，$(C-1)$とC_n上で成り立つ次の不等式(証明は参考文献3のP106参照)

$$\left|\frac{1}{\sin\zeta}\right|\leqq\beta e^{-|y|}\qquad(\beta>0) \tag{5}$$

および

$$\frac{1+|\zeta|^p}{|\zeta|^p}=1+|\zeta|^{-p}\leqq2 \tag{6}$$

を用いて，

$$\int_{C_n^m}\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta^p(\zeta-z)\sin\zeta}\right||d\zeta|\leqq\int_{C_n^m}K(1+|\zeta|^p)\,\frac{(1+|x|)^\alpha}{(1+|y|)^{\alpha+\epsilon}}\,e^{|y|}\,\frac{\beta e^{-|y|}}{|\zeta|^p|\zeta-z|}\,|d\zeta|$$

$$\leqq2K\beta\int_{C_n^m}\frac{(1+|x|)^\alpha}{(1+|y|)^{\alpha+\epsilon}}\,\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|} \tag{7}$$

と評価できる。ここで,

$$J_n^m(z)\equiv\int_{C_n^m}\frac{(1+|x|)^\alpha}{(1+|y|)^{\alpha+\varepsilon}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|}\qquad(m=1,2,3,4)\tag{8}$$

とおくと，$J_n^m(z)\to 0\,(n\to\infty)$(付録参照)が成り立つので,

$$|I_n(z)|\leqq\frac{|z|^p}{2\pi}\cdot 2K\beta\sum_{m=1}^{4}J_n^m(z)\tag{9}$$

$$\to 0\qquad(n\to\infty)$$

が云える。従って，(3)より,

$$\frac{f(z)}{\sin z}=\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{p-k}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\frac{H^{(k)}(0)}{k!}z^{k+j-1}+\lim_{n\to\infty}\sum_{l=-n}^{n}{}'(-1)^l\left(\frac{z}{l\pi}\right)^p\frac{f(l\pi)}{z-l\pi}\tag{10}$$

となる。(10)の両辺に$\sin z$をかけて$(F-1)$が得られる。次に$(F-2)$を証明する。

(II) $(F-2)$の証明

$$Q(z)=a\prod_{k=1}^{p}(z-\alpha_k)\qquad(a\in\boldsymbol{C})\tag{11}$$

(ただし$\alpha_k\neq q\pi;|q|=0,1,2,\cdots$)

とおく。また，(I)と同様に,

$$\widetilde{I_n}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{Q(z)}{Q(\zeta)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\sin\zeta}d\zeta\tag{12}$$

$$=\sum_{\{C_n\text{内の極}\}}Res\left\{\frac{Q(z)}{Q(\zeta)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\sin\zeta}\right\}\tag{13}$$

となるが，この場合それぞれの極における留数を求めると,

$$\underset{\zeta=z}{Res}\left\{\frac{Q(z)}{Q(\zeta)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\sin\zeta}\right\}=\frac{f(z)}{\sin z}$$

$$\underset{\zeta=\alpha_l}{Res}\left\{\frac{Q(z)}{Q(\zeta)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\sin\zeta}\right\}=\frac{Q(z)\,f(\alpha_l)}{Q^{(1)}(\alpha_l)(\alpha_l-z)\sin\alpha_l}\qquad(l=1,2,\cdots,p)$$

$$\underset{\zeta=l\pi}{Res}\left\{\frac{Q(z)}{Q(\zeta)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\sin\zeta}\right\}=(-1)^l\frac{Q(z)\,f(l\pi)}{Q(l\pi)(l\pi-z)}\qquad(|l|=0,1,2,\cdots,n)$$

である。従って,

$$\widetilde{I_n}(z)=\frac{f(z)}{\sin z}+\sum_{l=1}^{p}\frac{Q(z)\,f(\alpha_l)}{Q^{(1)}(\alpha_l)(\alpha_l-z)\sin\alpha_l}+\sum_{l=-n}^{n}(-1)^l\frac{Q(z)\,f(l\pi)}{Q(l\pi)(l\pi-z)}\tag{14}$$

が成り立つ。以下，(I)と同様に$|\widetilde{I_n}(z)|$を評価する;

$$|\widetilde{I_n}(z)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_n}\frac{Q(z)}{Q(\zeta)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\sin\zeta}d\zeta\right|\tag{15}$$

$$\leqq\frac{|Q(z)|}{2\pi}\sum_{m=1}^{4}\int_{C_n^m}\left|\frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)(\zeta-z)\sin\zeta}\right||d\zeta|.\tag{16}$$

C_n上には$Q(\zeta)$の零点はないので,

$$\frac{1+|\zeta|^p}{|Q(\zeta)|}\leqq M\qquad(M>0)\tag{17}$$

である。$(C-1),(5),(17)$および(8)を使うと,

$$\int_{C_n^m}\left|\frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)(\zeta-z)\sin\zeta}\right||d\zeta|\leqq\int_{C_n^m}K\frac{1+|\zeta|^p}{|Q(\zeta)|}\frac{(1+|x|)^\alpha}{(1+|y|)^{\alpha+\varepsilon}}e^{|y|}\frac{\beta e^{-|y|}}{|\zeta-z|}|d\zeta|$$

$$\leqq K\beta M\int_{C_n^m}\frac{(1+|x|)^\alpha}{(1+|y|)^{\alpha+\varepsilon}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|} \tag{18}$$

$$=K\beta M\,J_n^m(z)$$

となる。$J_n^m(z)\to 0\ (n\to\infty)$より，

$$|\tilde{I}_n(z)|\leqq\frac{|Q(z)|}{2\pi}\ K\beta M\sum_{m=1}^{4}J_n^m(z) \tag{19}$$

$$\to 0\quad(n\to\infty)$$

が云える。よって，$(F-1)$及び$(F-2)$が証明された。

3．数値計算例

この章では，次式で与えられるシャノンの標本化公式

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{l=-n}^{n}f(l\pi)\frac{\sin(z-l\pi)}{z-l\pi}\ ,$$

および$(F-1)$，$(F-2)$の三つの内挿公式について，有限の項で打ち切った式$f_N(x)$ $(x\in\boldsymbol{R})$をそれぞれ計算し，真値と比較する。それぞれの$f_N(x)$は次の通りである；

シャノンの場合　$f_N(x)=\sum_{l=-N}^{N}f(l\pi)\frac{\sin(x-l\pi)}{x-l\pi}$

$(F-1)$の場合　$f_N(x)=\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{p-k}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\frac{H^{(k)}(0)}{k!}x^{k+j-1}\sin x+\sum_{l=-N}^{N}{}'f(l\pi)\left(\frac{x}{l\pi}\right)^p\frac{\sin(x-l\pi)}{x-l\pi}$

$(F-2)$の場合　$f_N(x)=\sum_{l=1}^{p}\frac{Q(x)\,f(\alpha_l)\sin x}{Q^{(1)}(\alpha_l)(x-\alpha_l)\sin\alpha_l}+\sum_{l=-N}^{N}\frac{Q(x)\,f(l\pi)\sin(x-l\pi)}{Q(l\pi)(x-l\pi)}$.

以下，シャノンの標本化公式が適用できない，実軸上で多項式オーダーの増大度をもつ関数を具体的に選び，$(F-1)$，$(F-2)$が有効であることを数値例として示す。ここでは，内挿の対象となる$f(x)$の一例として，$(C-1)$を満たす次の関数を選ぶ；

$$f(x)=\frac{1}{10}\{(x+1)^2+1\}\sin\frac{x}{2}\ .$$

また，$(F-1)$において$p=2$，さらに$(F-2)$において，

$$Q(x)=(x+8)(x-14)$$

とする。

$f_N(x)$および打ち切り誤差$|f(x)-f_N(x)|$のグラフは図2から図7のようになる。

図3は，シャノンの標本化公式による$f_N(x)$がNを大きくしても$f(x)$に収束しないことを示している。従って，この$f(x)$に対してシャノンの標本化公式は適用できないことが分かろう。一方，図5及び図7から，$(F-1)$,$(F-2)$による$f_N(x)$は$f(x)$に収束する事を示しており，これらは$f(x)$に対して有効な内挿公式である事が数値例として，確認されたことになろう。

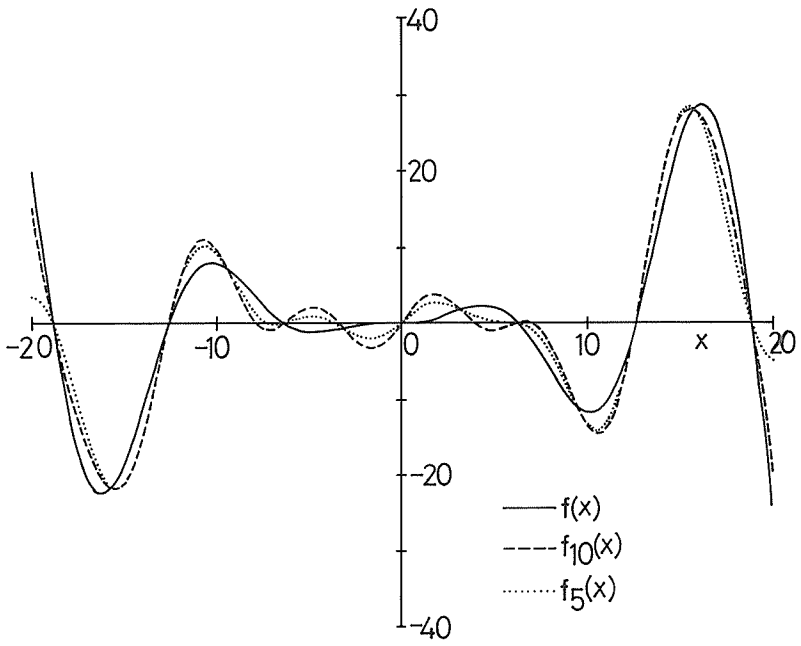

図2　$f(x)$とシャノンの標本化定理による$f_N(x)$　(N=5, 10)

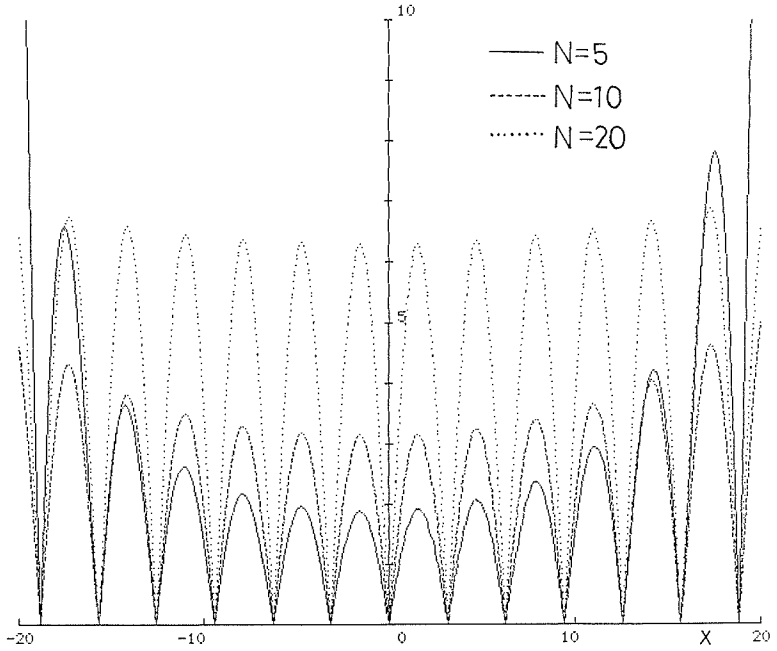

図3　シャノンの標本化定理による打ち切り誤差 $|f(x)-f_N(x)|$　(N=5, 10, 20)

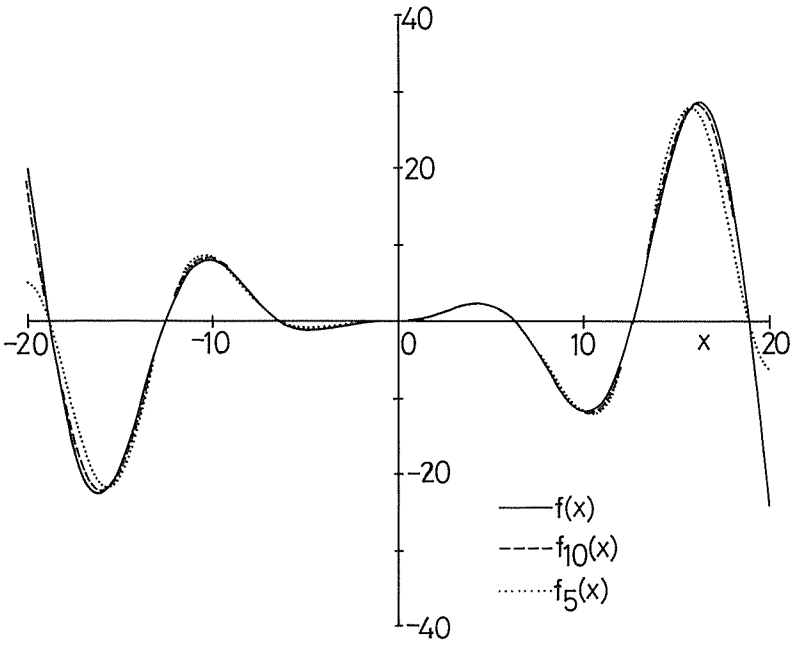

図4　$f(x)$と$(F-1)$による$f_N(x)$　$(N=5, 10)$

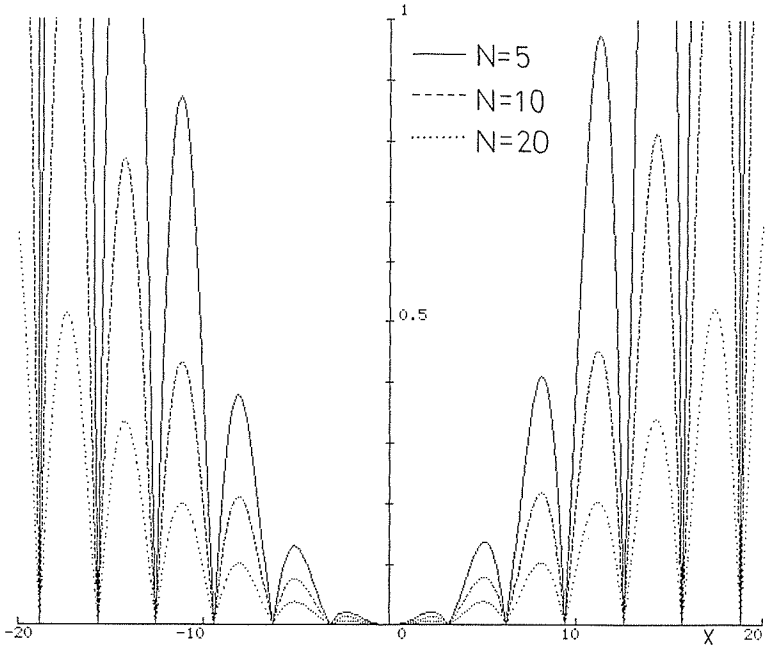

図5　$(F-1)$による打ち切り誤差$|f(x)-f_N(x)|$　$(N=5, 10, 20)$

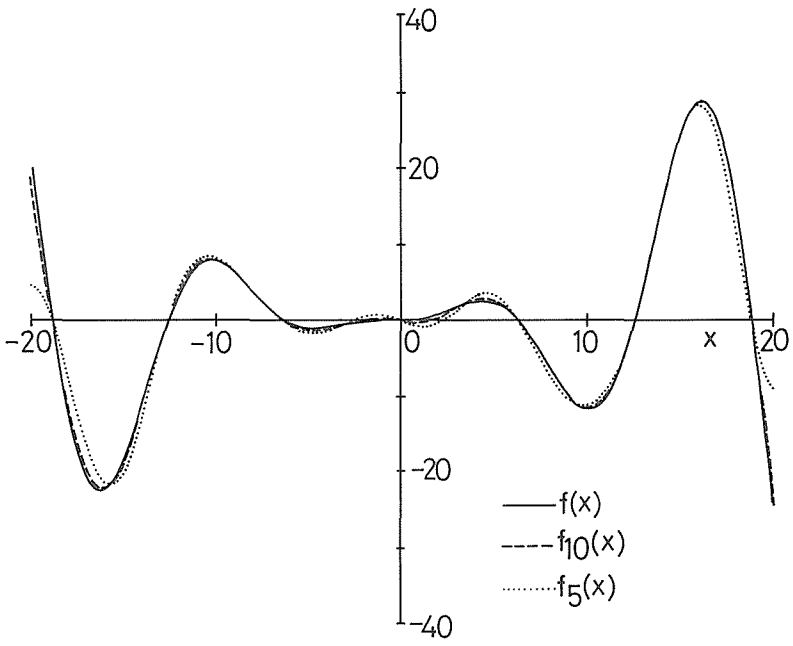

図6　$f(x)$と$(F-2)$による$f_N(x)$　$(N=5, 10)$

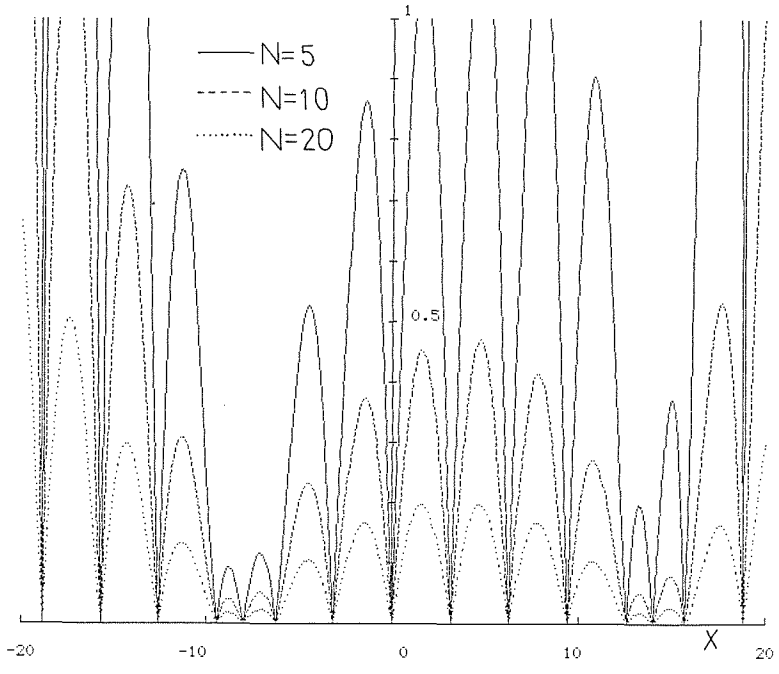

図7　$(F-2)$による打ち切り誤差 $|f(x)-f_N(x)|$　$(N=5, 10, 20)$

4. ま と め

§2で与えた，一般化されたシャノンの標本化定理について以下二，三の説明を加える。

(i) **定理1**において，$p=0$とするとき，シャノンの標本化公式を与える。すなわち，次の命題が成り立つ。

$$^{\exists}K>0,\ 0\leqq {}^{\exists}\alpha<1,\ {}^{\exists}\varepsilon(\neq 1-\alpha)<0, \qquad s,t.,$$

$$|f(z)|\leqq K\frac{(1+|Re\,z|)^{\alpha}}{(1+|Im\,z|)^{\alpha+\varepsilon}}\ e^{|Im\,z|},$$

$$\Rightarrow$$

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{l=-n}^{n}f(l\pi)\frac{\sin(z-l\pi)}{z-l\pi}\ .$$

(ii) $(C-1)$における$e^{|Im\,z|}$を$e^{A|Im\,z|}$(ただし，Aは非負の実数)とした場合にも$(F-1),(F-2)$に対応する公式は容易に導かれる。$(F-1),(F-2)$は$A=1$に規格化した場合の結果である。

(iii) $f(z)$が多項式である場合には，与えられた多項式の次数に応じてpを選べば，$(F-1)$ないし$(F-2)$を適用することができる。ゆえに，この定理は，ある意味で，多項式を対象とするラグランジュ補間と（ある種の）周期関数に適用されるシャノンの標本化定理を一つの公式の形に統一したものと考える事ができよう。

最後に，対象を指数関数オーダーの増大度をもつ関数のクラスへ拡張することや，標本化関数として，無限乗積を用いる標本化定理[6]は現在検討中の課題であることを述べて終りとしたい。

参考文献

1) 杉山 宏：電気通信学会誌**49**, No. 9 (1966) p. 1673
2) 同 上：第2回情報理論とその応用研究会資料 (1979) p. 359
3) 長島知正，瀧澤英一：北大工学部研究報告 No. 120 (1984) p. 99
4) A. J. Jerri：Proc. IEEE **65**, No. 11 (1977) p. 359
5) 長島知正，八重樫光俊：SICE北海道支部講演会講演集 (1985) p. 17
6) M. A. ЕВГРАФОВ：АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИИ ЦЕЛЬІЕ ФУНКЦИИ (НАУКА, МОСКВА,1979)

謝 辞

有益なアドバァイスを頂いた工学部精密工学科島 公脩教授に感謝致します。また，著者(*T. N.*)は，北大数学教室一瀬 孝助教授に永らく教示を受ける機会に恵まれた。ここに心から謝意を表わしたい。

付 録

$$J_n^m(z)\equiv\int_{C_n^m}\frac{(1+|x|)^{\alpha}}{(1+|y|)^{\alpha+\varepsilon}}\ \frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|}\to 0 \quad (n\to\infty) \qquad (m=1,2,3,4)$$

証明

(I) $m=2,4$の場合

(i) $\zeta=x\pm i(n+1/2)\pi \quad (|x|\leqq(n+1/2)\pi)$

(ii) zを半径$(n+1/2)\pi$の円内の点と仮定してよいから，

$$|\zeta-z|\geqq|\zeta|-|z|=\sqrt{x^2+(n+1/2)^2\pi^2}\ -|z|\geqq(n+1/2)\pi-|z|>0$$

(ⅰ),(ⅱ)を用いて,

$$J_n^m(z)\leqq\int_{-(n+1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi}\frac{\{1+(n+1/2)\pi\}^{\alpha}}{\{1+(n+1/2)\pi\}^{\alpha+\varepsilon}}\frac{dx}{(n+1/2)\pi-|z|}$$

$$=\frac{1}{\{1+(n+1/2)\pi\}^{\varepsilon}}\quad\frac{2(n+1/2)\pi}{(n+1/2)\pi-|z|}$$

$$\to 0\qquad(n\to\infty).$$

(Ⅱ)　$m=1,3$の場合

(ⅲ)　$\zeta=\pm(n+1/2)\pi+iy\quad(|y|\leqq(n+1/2)\pi)$

(ⅳ)　$|\zeta-z|\geqq|\zeta|-|z|=\sqrt{(n+1/2)^2\pi^2+y^2}-|z|\geqq(n+1/2)\pi-|z|>0$

(ⅲ),(ⅳ)を用いて,

$$J_n^m(z)\leqq\int_{-(n+1/2)\pi}^{(n+1/2)\pi}\frac{\{1+(n+1/2)\pi\}^{\alpha}}{(1+|y|)^{\alpha+\varepsilon}}\frac{dy}{(n+1/2)\pi-|z|}$$

$$=\frac{2\{1+(n+1/2)\pi\}^{\alpha}}{(n+1/2)\pi-|z|}\int_0^{(n+1/2)\pi}\frac{dy}{(1+y)^{\alpha+\varepsilon}}$$

ここで，$u=1+y$とおくと，上の積分は,

$$\int_0^{(n+1/2)\pi}\frac{dy}{(1+y)^{\alpha+\varepsilon}}=\int_1^{1+(n+1/2)\pi}u^{-(\alpha+\varepsilon)}du$$

$$=\left[\frac{u^{1-\alpha-\varepsilon}}{1-\alpha-\varepsilon}\right]_1^{1+(n+1/2)\pi}$$

$$=\frac{\{1+(n+1/2)\pi\}^{1-\alpha-\varepsilon}-1}{1-\alpha-\varepsilon}$$

となる。従って,

$$J_n^m(z)\leqq\frac{2}{1-\alpha-\varepsilon}\ \frac{\{1+(n+1/2)\pi\}^{1-\varepsilon}-\{1+(n+1/2)\pi\}^{\alpha}}{(n+1/2)\pi-|z|}$$

$$=\frac{2}{1-\alpha-\varepsilon}\ \frac{1+(n+1/2)\pi}{(n+1/2)\pi-|z|}\ [\{1+(n+1/2)\pi\}^{-\varepsilon}-\{1+(n+1/2)\pi\}^{\alpha-1}]$$

$$\to 0\qquad(n\to\infty)$$

である。この結果,(Ⅰ),(Ⅱ)より$J_n^m(z)\to 0$ $(n\to\infty)$ $(m=1,2,3\cdot 4)$が成り立つ。