HOKKAIDO UNIVERSITY

| | |
|---|---|
| Title | 準ミニマックス法による多項式近似の精度について |
| Author(s) | 伊達, 惇; 河口, 万由香 |
| Citation | 北海道大學工學部研究報告, 128, 103-112 |
| Issue Date | 1985-10-31 |
| Doc URL | https://hdl.handle.net/2115/41949 |
| Type | departmental bulletin paper |
| File Information | 128_103-112.pdf |

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第128号（昭和60年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University. No.128 (1985)

# 準ミニマックス法による多項式近似の精度について

伊達　惇　　河口万由香

（昭和60年6月30日受理）

# Accuracy of Polynomial Approximation of Quasi-Minimax Methods

Tsutomu DA-TE and Mayuka KAWAGUCHI

(Received June 30, 1985)

**Abstract**

In this paper, we deal with methods of finding a polynomial that can be used to determine approximate values of a given function.

The minimax method is considered to give the "best" approximations for this purpose, but its procedure to obtain polymomials is so complicated that more simple and convenient algorithms with minimal loss of accuracy have been required. The approximation formulae of the minimax methed are shown in Encyclopedic Dictionary of Mathematics published by MIT Press, etc. We picked up, among the above formulae, sine function and exponential function as the representative samples, and compared their accuracies with those of the approximations which we arranged as a sort of quasi-minimax algorithm in such a way as to simplify the minimax method. We obtained the results that some of our approximations have "better" accuracies than those formulae shown in Encyclopedic Dictionary of Mathematics published by MIT.

## 1．序　　論

数値計算においては，高速化，高精度化あるいは必要とされる精度の保証ということが古くからの課題であるが，その後プログラミング技法やソフトウェア品質も対象となった。一方，多様な情報機器の出現，普及にともない，計算手段が多様化し，使用可能な言語，変数や組み込み関数の精度あるいは入出力等に関する制約条件が不統一となり，個々の利用者にとっては，それらは絶えず変動するものとなっている，すなわち計算手段への習熟が容易には期待できない，という状況が生じている。数値計算の時間に占める割合は，後者の部分に起因するものがきわめて大きい，といっても差し支えはない。限られた計算手段を熟練者が用いたときに効率の高い計算アルゴリズムは，別の計算手段を用いたときにもそうであるという保証はなく，また複雑な手順の場合は，何らかの異常があったときにその原因を発見・除去することが熟練しないものにとってはきわめて困難となる，ということもしばしば起こる。このような場合には，計算アルゴリズムには簡単で見通しが良いことが強く要請されることとなる。

情報工学専攻　情報科学

ここに計算アルゴリズムの種類が多い関数近似の問題に対して，簡便さと見通しの良さを備えた多項式近似をとりあげ，最良近似法とされるミニマックス近似法のアルゴリズムの複雑さを2節で述べ，3節において，その改良型である準ミニマックス近似の工夫を紹介する。4節において，それらの工夫について，sin関数および指数関数という見通しのよい関数に対して近似の度合いを実際に計算し，確立されたミニマックス法による成果と比較する。比較の対象として用いたものは，この種の文献としてはわが国で権威あるとされる数学辞典（岩波）所載の数表であり，精度など他の条件を合わせて比較した結果そこに記載されたものよりも優れた近似式を得るに至ったので報告する次第である。

## 2．多項式のミニマックス近似

関数近似における"近さの尺度"（すなわち近似の良さの尺度）として，ミニマックス法では，誤差の最大値

$$M(f,g)=\max_{a\leq x\leq b}|f(x)-g(x)| \tag{2.1}$$

を用いる。ただし，被近似関数を$f(x)$，近似関数を$g(x)$，近似区間を$[a,\ b]$とする。式(2.1)を最小にする$g(x)$をミニマックス近似関数と呼ぶ。

$n$次多項式$g(x)$でミニマックス近似を行うと，偏差点は$(n+2)$個で，誤差の値は交互に$+M(f,\ g)$, $-M(f,\ g)$となり，かつ多くの場合，両端が偏差点となる。

ミニマックス近似多項式を求めるためにChebychevの定理を利用するならば，$f(x)$は連続微分可能として，$(n+1)$個の係数と$(n+2)$個の偏差点および誤差の最大絶対値$\mathrm{M}(f,\ g)=\rho$という$(2n+4)$個の未知数に対し，次の$(2n+4)$個の連立方程式を得る。

$$\begin{cases} f(x_i)-\sum_{k=0}^{n} a_k (x_i)^k=\pm(-1)^i\rho \quad (\text{符号は全式に共通}) & (2.2)\\ f'(x_i)-\sum_{k=0}^{n} a_k\, k(x_i)^{k-1}=0 \quad (i=0,1,\cdots,n+1) & (2.3)\end{cases}$$

実際には，式(2.2)，(2.3)を厳密に解くことは，ほとんど不可能と言える。しかし，ミニマックス近似にかなり近い近似式がわかっていれば，それをもとにして，式(2.2)，(2.3)を近似的に，未知数の修正量を変数とする連立一次方程式におきかえることができる。そこでその方程式を解くのを繰り返すことによって，ミニマックス近似式を逐次近似的に求める手法が用いられる。

## 3．準ミニマックス近似

前節で述べたように，ミニマックス近似は，計算手順が複雑なため実用的ではないので，比較的少ない計算量でミニマックス近似にかなり近い近似の得られる方法が考案されている。本節では，ミニマックス近似の誤差およびその改良について述べる。

### 3.1 ミニマックス近似の誤差

Chebychevの定理により，近似多項式$g(x)$が$f(x)$のミニマックス近似になっているなら，$E(x)=g(x)-f(x)$の零点は$(n+1)$個あり，それらを$x_0, x_1,\cdots, x_n$とおくと近似的に

$$f(x)=g(x)+\pi(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\quad \xi\in[a,b] \tag{3.1.1}$$

$$\pi(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \tag{3.1.2}$$

と書くことができる。

$$M(f,g)=\max_{a\leqq x\leqq b}|g(x)-f(x)|$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\max_{a\leqq x\leqq b}|\pi(x)f^{(n+1)}(\xi)|$$

となり，　$\max_{a\leqq x\leqq b}|\pi(x)f^{(n+1)}(\xi)|$　を最小にする $g(x)$ がミニマックス近似多項式となる。

$$A=\max_{a\leqq x\leqq b}|f^{(n+1)}(x)|$$

とおくと

$$\max_{a\leqq x\leqq b}|g(x)-f(x)|\leqq\frac{A}{(n+1)!}\max_{a\leqq x\leqq b}|\pi(x)|$$

となる。ただし，等号が成立するのは，$|f^{(n+1)}(\xi)|$ が最大値をとる $x$ と，$\pi(x)$ の零点とが一致する場合のみである。

$\pi(x)$ が **3.2** で述べる準ミニマックス近似の $\pi(x)$ にほぼ等しいとすれば

$$E(x)=|g(x)-f(x)|$$

$$=\left|\pi(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right|$$

$$\leqq 2^{-n}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right|$$

となる。$f^{(n+1)}(\xi)$ は $f^{(n+1)}(0)$ とほぼ同じオーダーとみなせるから，$f(x)$ の $(n+1)$ 次の Taylor 展開係数を $b_{n+1}$ とおくと，

$$|E(x)|\leqq 2^{-n}\left|\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}\right|$$

$$=2^{-n}|b_{n+1}|$$

となり、ミニマックス近似の誤差はほぼ $|b_{n+1}|/2^n$ で押さえられる。

### 3.2　準ミニマックス近似の誤差

式 (2.3) における $\pi(x)$ として，計算しやすいものを考えて，得られた近似式に対して必要に応じて微修正を行う方法を準ミニマックス近似と呼ぶことにする。

$\max_{a\leqq x\leqq b}|\pi(x)f^{(n+1)}(\xi)|$ の代わりに，$\max_{a\leqq x\leqq b}|\pi(x)|$ を最小にするように $g(x)$ を決める（すなわち，$\pi(x)$ の零点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ を求める）ことにより，ミニマックス近似に近い近似方式を与えることができる。これは準ミニマックス近似（準最良近似）の一つである。

近似区間を $[-1,1]$ としても一般性は失われないので，そのように制限すると，$\max_{a\leqq x\leqq b}|\pi(x)|$ が最小になるような $\pi(x)$ は，式 (3.1.2) より $x$ の最高次の係数が 1 であるから，簡単な計算により，

$$\pi(x)=2^{-n}T_{n+1}(x)$$

であることが示される。したがって準ミニマックス近似多項式を $h(x)$ とおくと，

$$f(x)=h(x)+\frac{A}{(n+1)!}2^{-n}T_{n+1}(x)\qquad(3.2.1)$$

となる。

**(i) Chebychev 近似の誤差** 準ミニマックス近似多項式 $h(x)$ を

$$h(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x)$$

とおくと，Chebychev 近似が得られる。$T_{n+1}(x)$ の零点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ における選点直交性により，係数は，

$$\begin{cases} c_0=\dfrac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \\ c_k=\dfrac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)T_k(x_i) \qquad (k\neq 0) \end{cases}$$

となる。従って，この場合の誤差は，ほぼミニマックス近似の誤差と等しくなることが予想される。

**(ii) Taylor 級数に telescoping をほどこした近似の誤差** telescoping は得られている近似多項式が持つ誤差を所定の範囲におさえながら，区間 $[-1,1]$ における Chebychev 多項式を用いて多項式の次数を下げる技法である。本項では，$f(x)$ の Taylor 級数展開を $n$ 次の項までで打ち切ったものを $g(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ とおき，これに $-(a_n/2^{n-1})T_n(x)$ を加えて $n$ 次の項を消去するという操作を所定の誤差範囲で繰り返しつつ近似多項式の次数を減らす。

$$f_{m+1}(x)=\sum_{k=0}^{m+1} a_k x^k$$

とおくと，

$$f_m(x)=f_{m+1}(x)-\frac{a_{m+1}}{2^m}T_{m+1}(x) \tag{3.2.2}$$

が得られる。ここで $f_{m+1}(x)$ を，$f(x)$ の Taylor 展開式を $(m+1)$ 次で打ち切ったものとすると，

$$a_{m+1}=\frac{f^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} \tag{3.2.3}$$

であるから，式 (3.2.3) を式 (3.2.2) に代入すると

$$f_{m+1}=f_m(x)+\frac{f^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}2^{-m}T_{m+1}(x)$$

が得られ，$f_m(x)$ は $f_{m+1}(x)$ の準ミニマックス近似となっていることがわかる。

$n$ 次多項式 $f_n(x)$ に telescoping を行って，$m$ 次多項式 $f_m(x)$ をつくるとき，

$$f_n(x)=f_m(x)+\sum_{i=1}^{n-m} a_{n-i+1}^{(i)}2^{-(n-i)}T_{n-i+1}(x)$$

と表せる。ただし $a_{n-i+1}^{(i)}$ は $i$ 回目の telescoping を行う前の $(n-i+1)$ 次の係数である。

$$\sum_{i=1}^{n-m} a_{n-i+1}^{(i)}2^{-(n-i)}T_{n-i+1}(x)\simeq a_{m+1}^{(n-m)}2^{-m}T_{m+1}(x)$$

であるから，$f_m(x)$ はほぼ $f_n(x)$ の準ミニマックス近似になっている。$f_n(x)$ を $f(x)$ の十分高い次数の Taylor 展開近似式とすると，$f_m(x)$ は，ほぼ $f(x)$ の準ミニマックス近似になることがわかる。

以下，4 節において，これらの誤差の様相を数値実験の上で比較検討する。

## 4．準ミニマックス近似例

ミニマックス近似を行って近似式を作成した，文献1）記載の関数の中から，$\sin(\pi x/2)/x$ および文献2）より $\exp(-x)$ をとりあげ，それぞれの近似式に対して，準ミニマックス法で求めた我々の近似式を対比させ，それらの誤差を比較する。以下，準ミニマックス近似の例として，

(i)　Taylor 展開式に telescoping を行って作成した近似（以下，近似法(i)と呼ぶ）

(ii)　Chebychev 近似（以下，近似法(ii)と呼ぶ）

を採用し，文献所載の近似多項式を標準近似（近似法(iii)）と呼ぶこととする。

計算は，北大大型計算機センター，HITAC　M-280Hを使用し，PASCALで記述したプログラムによって行った。また，リスト出力には，H-8172 レーザプリンタを，図形出力は H-8195 漢字プリンタを使用した。

### 4.1　$\sin(\pi x/2)/x$ の区間［－1，1］における 10 次多項式近似

**Table (4.1.1)** に近似法(i), (ii), (iii)による近似多項式の係数 $a_i$ を示す。なお，近似法(i)は，22 次の Taylor 展開式に telescoping をほどこして 10 次多項式に変換したものである。近似法(iii)については，文献1）（数学辞典　数表 15)には，8 次の係数が 0.0000160254789 であると記載されているが，そのままではあまりに精度が落ちるので，誤植と解した上で，0.000160254789 と一桁修正して使用した。

**Fig. (4.1.1)** において，実線，点線，一点鎖線はそれぞれ近似法(i), (ii), (iii)による近似誤差 $g(x)-\sin(\pi x/2)/x$ を示す。3 種の近似法による誤差はほぼ一致しており，そのまま図示した場合，**Fig. (4.1.1)** のように 3 本の誤差曲線が重なって見える。両端に近い 4 個の極値付近で，曲線が 2 本に分かれているのがかろうじて判別できる程度である。

そこで，(ii), (iii)の近似値より，(i)の近似値を引いたものをグラフにしたのが，**Fig. (4.1.2)** である。近似法(ii)の値は，近似法(i)の値と，区間全体においてほぼ一様に差が生じているのに対し，近似法(iii)の値は，区間の両端付近で，近似法(i)の値より，小さくなっていることがわかる。

**Table (4.1.2)** は，近似法(i), (ii), (iii)による近似誤差の極値を拾い出したものである。Table の数

**Table (4.1.1)**　近似多項式の係数：$f(x)=\sin(\pi x/2)/x$, $[-1, 1]$, $n=10$
近似法（ i ）　telescoping
近似法（ ii ）　Chebychev 近似
近似法（ iii ）　標準近似

| | ( i ) | ( ii ) | ( iii ) |
|---|---|---|---|
| $a_0$ | 1.5707963267681 | 1.5707963267681 | 1.5707963267682 |
| $a_1$ | 0.0000000000000 | 0.0000000000000 | 0.0000000000000 |
| $a_2$ | −0.6459640955781 | −0.6459640955754 | −0.6459640955819 |
| $a_3$ | 0.0000000000000 | 0.0000000000002 | 0.0000000000000 |
| $a_4$ | 0.0796926037171 | 0.0796926036958 | 0.0796926037479 |
| $a_5$ | 0.0000000000000 | −0.0000000000031 | 0.0000000000000 |
| $a_6$ | −0.0046816577955 | −0.0046816577366 | −0.0046816578817 |
| $a_7$ | 0.0000000000000 | 0.0000000000104 | 0.0000000000000 |
| $a_8$ | 0.0001602546910 | 0.0001602546242 | 0.000160254789 |
| $a_9$ | 0.0000000000000 | −0.0000000000131 | 0.0000000000000 |
| $a_{10}$ | −0.0000034318293 | −0.0000034318027 | −0.0000034318687 |
| $a_{11}$ | | 0.0000000000056 | |

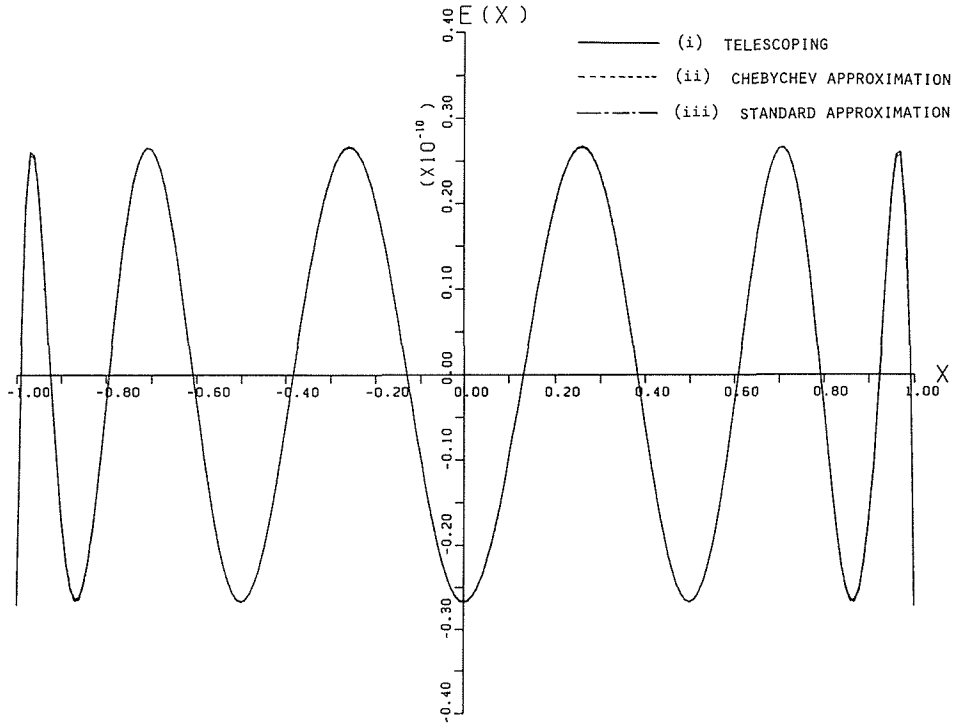


**Fig.(4.1.1)** 近似法(i), (ii), (iii)による近似の誤差曲線
$f(x)=\sin(\pi x/2)/x$, $[-1,1]$, $n=10$

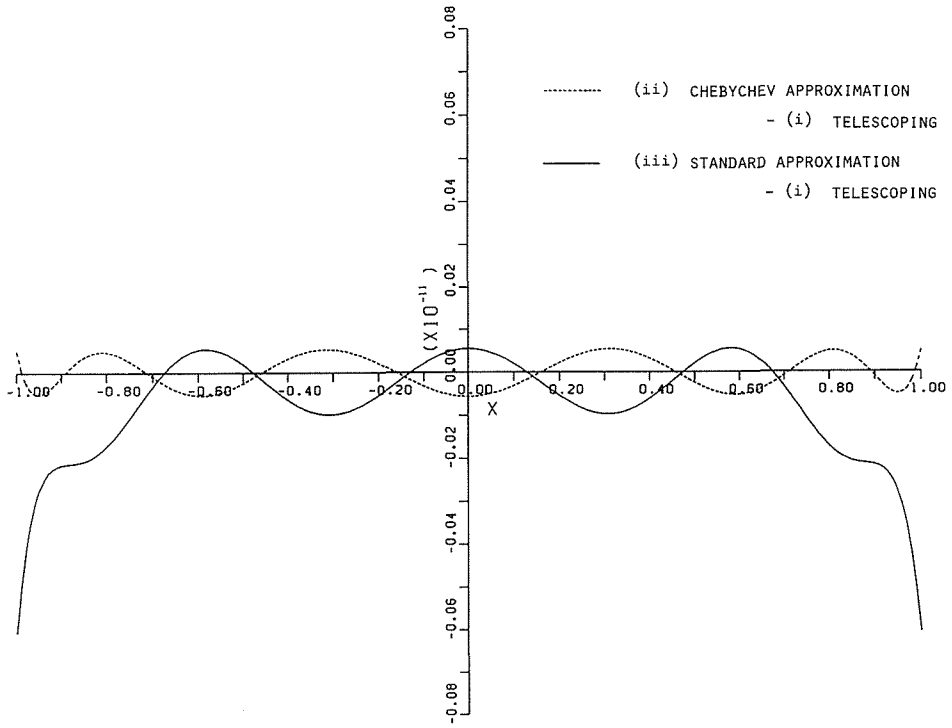


**Fig.(4.1.2)** 近似法(i), (ii), (iii)による近似値の差

**Table (4.1.2)** 近似法(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)における誤差の極値
$f(x)=\sin(\pi x/2)/x, [-1, 1], n=10$

| (ⅰ) | | (ⅱ) | | (ⅲ) | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 極　値 | $x$ | 極　値 | $x$ | 極　値 |
| −1.00 | −2.67000E−11 | −1.00 | −2.66000E−11 | −1.00 | −2.72000E−11 |
| −0.96 | 2.56011E−11 | −0.96 | 2.56322E−11 | −0.96 | 2.53868E−11 |
| −0.86 | −2.64491E−11 | −0.86 | −2.63578E−11 | −0.86 | −2.65814E−11 |
| −0.70 | 2.64300E−11 | −0.70 | 2.64826E−11 | −0.70 | 2.64582E−11 |
| −0.50 | −2.67650E−11 | −0.50 | −2.67224E−11 | −0.50 | −2.66926E−11 |
| −0.26 | 2.66904E−11 | −0.26 | 2.67919E−11 | −0.26 | 2.66496E−11 |
| 0.00 | −2.67966E−11 | 0.00 | −2.67966E−11 | 0.00 | −2.66966E−11 |
| 0.26 | 2.66904E−11 | 0.26 | 2.67930E−11 | 0.26 | 2.66496E−11 |
| 0.50 | −2.67650E−11 | 0.50 | −2.67495E−11 | 0.50 | −2.66926E−11 |
| 0.70 | 2.64300E−11 | 0.70 | 2.64511E−11 | 0.70 | 2.64582E−11 |
| 0.86 | −2.64488E−11 | 0.86 | −2.63933E−11 | 0.86 | −2.65812E−11 |
| 0.96 | 2.56011E−11 | 0.96 | 2.55649E−11 | 0.96 | 2.53870E−11 |
| 1.00 | −2.66999E−11 | 1.00 | −2.66000E−11 | 1.00 | −2.72000E−11 |

字は，倍精度計算により得られたものを，作表の便宜上、有効数字を減らしたもので，切り捨てた部分は比較において重要な役割は果さないと判断される。近似法(i), (ii), (iii)における，誤差の絶対値の最大値 $M(f, g)$ はそれぞれ，$2.67966\times10^{-11}$, $2.67966\times10^{-11}$, $2.72000\times10^{-11}$ となっており，ミニマックス近似の定義に従って，近似法(iii)よりも，近似法(i), (ii)の結果の方がわずかながら，ミニマックス近似に近い（すなわち，ミニマックスの意味で良い近似である）と言える。

また，$n$ 次多項式によるミニマックス近似を行うと，多くの場合に（$n+2$）個の偏差点を持つ誤差特性を示すが，この例のように，被近似関数が偶関数または奇関数の場合は，$n$ 次多項式による近似に対して，（$n+3$）個の偏差点を持つ。それは，（$n+1$）次の項が 0 であるため，$n$ 次多項式で近似しても，（$n+1$）次多項式で近似した場合の誤差特性を有するからである。

近似法(ii)において，11 次の項まで計算しているのも同様の理由によるが，奇数次の項が 0 とならないのは，打ち切り誤差の影響である。

## 4.2 exp(−x) の区間［0，ln 2］における 6 次多項式近似

**Table. (4.2.1)**に近似法(i), (ii), (iii)による近似多項式の係数 $a_i$ を示す。なお，近似法(i)は 20 次の Taylor 展開式に telescoping をほどこして 6 次多項式に変換したものである。

**Table (4.2.1)** 近似多項式の係数：$f(x)=\exp(-x)$, ［0，ln 2］, $n=6$
近似法(ⅰ)　telescoping
近似法(ⅱ)　Chebychev 近似
近似法(ⅲ)　標準近似

| | (ⅰ) | (ⅱ) | (ⅲ) |
|---|---|---|---|
| $a_0$ | 0.99999999865 | 0.99999999862 | 0.99999999865 |
| $a_1$ | −0.99999980774 | −0.99999980473 | −0.99999980774 |
| $a_2$ | 0.49999552196 | 0.49999547146 | 0.49999552195 |
| $a_3$ | −0.16662741027 | −0.16662710037 | −0.16662741017 |
| $a_4$ | 0.04150174124 | 0.04150088105 | 0.04150174091 |
| $a_5$ | −0.00797309245 | −0.00797199140 | −0.00797309192 |
| $a_6$ | 0.00098631392 | 0.00098578522 | 0.00098631361 |

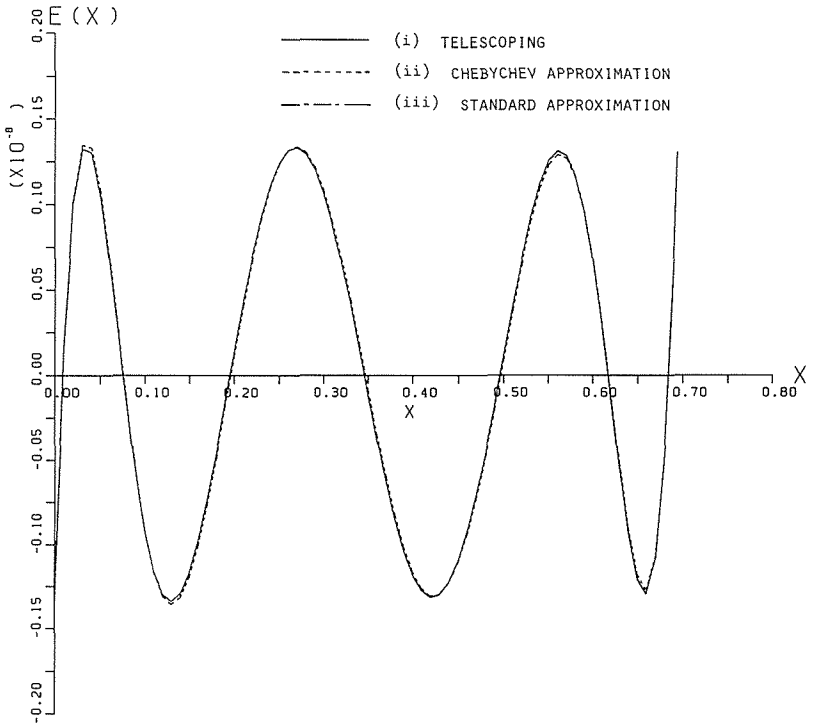


**Fig.(4.2.1)** 近似法(i), (ii), (iii)による近似の誤差曲線
$f(x)=\exp(-x)$, $[0, \ln 2]$, $n=6$

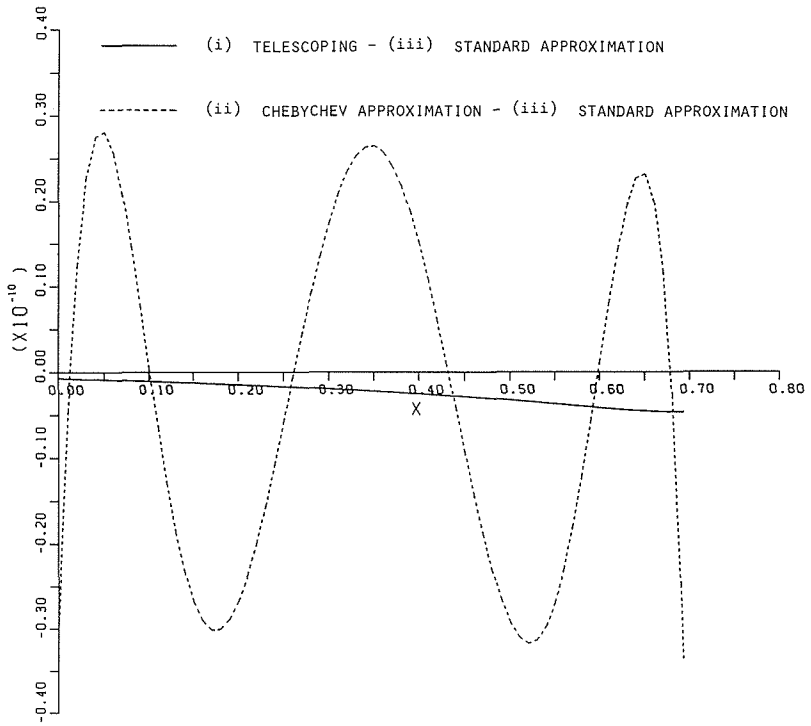


**Fig.(4.2.2)** 近似法(i), (ii), (iii)による近似値の差

**Table (4.2.2)**　近似法(ⅰ)、(ⅱ)、(ⅲ)における誤差の極値
$f(x)=\exp(-x)$、$[0,1n2]$、$n=6$

| (ⅰ) | | (ⅱ) | | (ⅲ) | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 極　値 | $x$ | 極　値 | $x$ | 極　値 |
| 0.00 | −1.35000E−9 | 0.00 | −1.38000E−9 | 0.00 | −1.35000E−9 |
| 0.04 | 1.30101E−9 | 0.04 | 1.32835E−9 | 0.04 | 1.30100E−9 |
| 0.12 | −1.29455E−9 | 0.12 | −1.31567E−9 | 0.12 | −1.29458E−9 |
| 0.26 | 1.30967E−9 | 0.26 | 1.30929E−9 | 0.26 | 1.30978E−9 |
| 0.42 | −1.31120E−9 | 0.42 | −1.30412E−9 | 0.42 | −1.31060E−9 |
| 0.56 | 1.30447E−9 | 0.56 | 1.28401E−9 | 0.56 | 1.30607E−9 |
| 0.66 | −1.29083E−9 | 0.66 | −1.26687E−9 | 0.66 | −1.28830E−9 |
| LN(2) | 1.29627E−9 | LN(2) | 1.26734E−9 | LN(2) | 1.29901E−9 |

前節同様に近似法(i)，(ii)，(iii)による近似誤差を **Fig. (4.2.1)** に示す。実線・点線・一点鎖線はそれぞれ近似法(i)，(ii)，(iii)による近似誤差の値を示している。この例でも3種の近似法の誤差はほぼ一致しており，近似法(ii)の誤差曲線が近似区間全体にわたって他の2つの近似と，わずかに異なるのが認められる。

**Fig. (4.2.2)** において，実線・点線はそれぞれ，近似法(i)，(ii)の近似値より(iii)の近似値を引いた値を示している。このグラフより，近似法(i)，(iii)の近似値がかなり接近しているのに対して，近似法(ii)の近似値だけが大きく異なっていることがわかる。

**Table (4.2.2)** は，近似法(i)，(ii)，(iii)の誤差の極値を拾い出したものである。この Table によると，誤差の絶対値の最大値 $M(f, g)$ は，近似法(i)，(ii)，(iii)においてそれぞれ，$1.35000\times10^{-9}$，$1.38000\times10^{-9}$，$1.35000\times10^{-9}$ であり，したがって指数関数の場合は，近似法(i)と近似法(iii)の精度は同程度であるといえる。この Table の数値も **Table (4.1.2)** と同様，倍精度で計算した値を丸めたものである。

なお，この例は，6次多項式による近似に対して偏差点が8個ある場合であり，標準的な場合であるといえよう。

## 5．おわりに

文献1)(岩波数学辞典) の誤植を発見したときに，近似式それ自体の精査の必要を感じて，ミニマックス近似法とその周辺の近似法を吟味した結果，最良近似とみなされて提示されている標準近似式に比べて，同等以上の精度を有する式を発見するに至った。精度を上げた計算を行って，近似式の次数を上げれば，それだけ結果の精度は上がることは自明であるが，本報告において提示した近似式は，次数を同じ値としている。

わが国において，この分野において権威ある文献における近似式の2例を精査したにとどまるが，計算手段の普及多様化にともなって，近似式は多くの人に利用され，かつ誤差に対する要求も多様化することが予想されるので，提示されている既成の成果の内容，表現ともに再吟味することが必要と考える。

## 参考文献

1）数学辞典 第2版，岩波書店，p. 979,（1968）
2）山内二郎・森口繁一・一松信：電子論算機のための数値計算法Ⅰ，培風館，p. 113,（1965）
3）Encyclopedic Dictionary of Mathematics, MIT Press, Vol. II, p. 1506, (1977)