HOKKAIDO UNIVERSITY

| | |
|---|---|
| Title | 最小二乗法の精度低下現象の解析 |
| Author(s) | 河口，万由香；伊達，惇 |
| Citation | 北海道大學工學部研究報告，128，113-121 |
| Issue Date | 1985-10-31 |
| Doc URL | https://hdl.handle.net/2115/41953 |
| Type | departmental bulletin paper |
| File Information | 128_113-122.pdf |

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第128号（昭和60年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido Universtty. No.128 (1985)

# 最小二乗法の精度低下現象の解析

河口万由香　　伊達　　惇

（昭和60年6月30日受理）

# Analysis of Drops in Accuracy of Least-Squares approximation

Mayuka KAWAGUCHI and Tsutomu DA-TE

(Received June 30, 1985)

**Abstract**

The aim of this paper is to show that, in the practical use of the least square methods, we often meet with unexpected trouble, and that the resulting fitness often fails even if the degree of polynomials is increased. We gave theoretical considerations to this problem introducing the measure of fitness and showed that the failure of fitness in a power series approximation arises from ill-conditioned case of equations to be solved. For Legendre polynomials, however, such failure of fitness is not expected from that view-point. The numerical experiments show the above projection to a high extent.

## 1．序　　論

関数近似の方法として，最小二乗近似，ミニマックス近似の他に，級数展開の部分和による近似法，および，級数展開に何らかの修正を加える方法があるが，それぞれ，目的にしたがった使い分けがなされる。

近似を行う目的によって，許容する誤差の大きさが異なり，それにともなって近似計算に要する手間が変わるのであるが，このほかに，計算手段が多様化した昨今，使用する計算機種あるいは言語によって有効数字の大きさや組み込み関数の扱いが異なることの影響があり，後者の方が実質的な計算時間決定に重要な役割を果たすことが多い。

データの集合から適当な関数を近似する作業において最も良く使用される最小二乗法は，理論上の構造が明確である反面，実際に適用するときには，意外な数値計算上の障害に出会うことが多い。多項式で近似を行う場合に，多項式の次数をあげればそれだけ近似の精度は増すと考えやすいが，そうではないことを示す簡明な数値実験結果を得たので，考察を添えて報告する次第である。

構成は，2節において，多項式近似に関する数学的準備を行うものとして，近似の度合いを示す尺度の導入をするとともに，ベキ級数近似，および直交多項式近似としてのLegendre, Chebychev両多項式を導入する。3，4節においては，多項式の次数増大にともなって近似の精度が低下する場合がありうることを，理由の考察，数値実験結果を添えて紹介する。

---

＊　情報工学専攻　情報科学

## 2. 多項式近似の最小二乗法

最小二乗近似の場合は，被近似関数を $f(x)$，近似関数を $g(x)$，近似区間を $[a,b]$ としたとき，二乗ノルムと呼ばれる，

$$\|f-g\|^2=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}^2dx \tag{2.1}$$

または偏差平方和

$$\sum_{i=0}^{m}\{f(x_i)-g(x_i)\}^2,\quad (a\leqq x_0,x_1,\cdots\cdots,x_m\leqq b) \tag{2.2}$$

を関数近似における“近さの尺度”として採用する。

まず，式(2.1)を最小にする近似式 $g(x)$ を求めることを考える。

$$(f,g)\equiv\int_a^b f(x)g(x)dx \tag{2.3}$$

とおく。

近似関数 $g(x)$ はある関数族 $L$ に属し，$L$ を有限次元の線形空間，$g_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ を $L$ のある基底とすると，$g(x)$ は次式のように $g_i(x)$ の一次結合で表される。

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ig_i(x) \tag{2.4}$$

ここで，

$$\boldsymbol{G}\equiv((g_i,g_j))=\begin{pmatrix}(g_1,g_1) & (g_1,g_2)\cdots\cdots(g_1,g_n)\\ (g_2,g_1) & \vdots\\ \vdots & \vdots\\ (g_n,g_1)\cdots\cdots\cdots\cdots & (g_n,g_n)\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{A}\equiv(a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n)'$$

$$\boldsymbol{F}\equiv((f,g_1),(f,g_2),\cdots\cdots,(f,g_n))' \tag{2.6}$$

とおくと，式(2.4)の係数 $a_i$ は次の連立一次方程式の解として求められる。

$$\boldsymbol{GA}=\boldsymbol{F} \tag{2.7}$$

$g_1,g_2,\cdots\cdots,g_n$ が一次独立ならば，

$$\det((g_i,g_j))=|\boldsymbol{G}|\neq 0$$

であるから，式(2.7)はただ一通りの解を持つ。

また，$g_1,g_2,\cdots\cdots,g_n$ が直交系であれば，$(g_i,g_j)=0$ $(i\neq j)$ であるから，行列 $\boldsymbol{G}$ は対角行列となり，

$$a_i=\frac{(f,g_i)}{(g_i,g_i)} \tag{2.8}$$

によって，ただちに解が求められる。

また，式(2.2)を最小にする場合には，

$$\|f-g\|^2 \equiv \sum_{i=0}^{m} \{f(x_i)-g(x_i)\}^2$$

$$(f,g) \equiv \sum_{i=0}^{m} f(x_i)g(x_i) \qquad (a \leqq x_0, x_1, \cdots\cdots, x_m \leqq b)$$

とおくことにより，式(2.7)，(2.8)を満足する。

以下，多項式近似の最小二乗法の例として，それぞれ代表的な特徴を有する，(i)ベキ級数近似，(ii)直交多項式近似，(iii)Chebychev 近似(Chebychev 補間)を扱う。

**(i) ベキ級数近似**　式(2.4)において，$g_i=x^i$ $(i=0,1,\cdots\cdots,n)$ とおいたときの

$$g(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{2.9}$$

を近似関数として採用した場合をベキ級数近似と呼ぶ。式(2.9)を式(2.5)，(2.6)に代入し(ただし，$i,j=0,1,\cdots\cdots,n$)，連立一次方程式(2.7)を解くと，係数 $a_i$ が求められる。式(2.7)は具体的には次のような形になる。

$$\begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} 1\,dx & \int_{-1}^{1} x\,dx & \cdots\cdots & \int_{-1}^{1} x^n\,dx \\ \int_{-1}^{1} x\,dx & \int_{-1}^{1} x^2\,dx & \cdots\cdots & \int_{-1}^{1} x^{n+1}dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_{-1}^{1} x^n dx & \int_{-1}^{1} x^{n+1}dx & \cdots\cdots & \int_{-1}^{1} x^{2n}\,dx \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \\ \int_{-1}^{1} f(x)x\,dx \\ \vdots \\ \int_{-1}^{1} f(x)x^n dx \end{pmatrix}$$

註1〕

**(ii) 直交多項式近似**　直交多項式の例として Legendre 関数をとりあげる。Legendre 関数(Legendre 多項式)は次の Rodrigues の公式によって定義される。

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d}{dx^n}(x^2-1)^n$$

これは，次のような漸化式を満たし，かつ，直交性を持つ。

$$\begin{cases}(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0 \\ P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x\end{cases} \tag{2.10}$$

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)dx=\begin{cases}0 & (i \neq j) \\ 2/(2i+1) & (i=j)\end{cases}$$

このような，直交多項式の一次結合から成る関数

$$g(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i P_i(x)$$

を近似関数として採用すると式(2.8)によりただちに次式で $a_i$ が求められる。

$$b_i=\frac{\int_{-1}^{1} f(x)P_i(x)dx}{\int_{-1}^{1}\{P_i(x)\}^2 dx}$$

$$=\frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_i(x)dx \qquad (i=0,1,\cdots\cdots,n)$$

---

註1〕 区間 $[a,b]$ のかわりに，一般性を失わずに，$[-1,1]$ で議論する。

**(iii) Chebychev 近似 (Chebychev 補間)** 初めに Chebychev 多項式 (Chebychev 関数) について述べる。

Chebychev 多項式は $[-1,1]$ において定義される。

$$T_n(x)=\cos[n\cos^{-1}x]$$

$\theta=\cos^{-1}x$ とおくと

$$T_n(x)=\cos(n\theta) \qquad \text{ただし } \theta\in[0,\pi]$$

と書き換えられる。これは，次の漸化式を満たし，$T_{n+1}(x)=0$ の根を $x_\upsilon$ $(\upsilon=0,1,\cdots\cdots,n)$ とすると，選点直交性を示す。

$$\begin{cases} T_{n+1}(x)-2xT_n(x)+T_{n-1}(x)=0 \\ T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x \end{cases}$$

$$\sum_{\upsilon=0}^{n} T_i(x_\upsilon)T_j(x_\upsilon)=\begin{cases} 0 & (i\neq j,\ i=n+1 \text{ あるいは } j=n+1) \\ (n+1)/2 & (i=j) \\ n+1 & (i=j=0) \end{cases}$$

Chebychev 多項式の一次結合から成る関数

$$g(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i T_i(x)$$

を近似関数とすると，式 (2.8) よりただちに次式で $a_i$ が求められる。

$$a_i=\frac{\sum_{\upsilon=0}^{n} f(x_\upsilon)T_i(x_\upsilon)}{\sum_{\upsilon=0}^{n}\{T_i(x_\upsilon)\}^2}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{\upsilon=0}^{n} f(x_\upsilon) & (i=0) \\ \dfrac{2}{n+1}\displaystyle\sum_{\upsilon=0}^{n} f(x_\upsilon)T_i(x_\upsilon) & (i=1,2,\cdots\cdots,n) \end{cases}$$

## 3. ベキ級数近似の次数増加に伴う精度低下

2 節において述べた最小二乗ベキ級数近似において，近似区間を $[0,1]$ とした場合，連立一次方程式の係数行列 (2.5)は，次のような形になる。

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & & 1/(n+2) \\ 1/3 & 1/4 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots\cdots & & 1/(2n+1) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

これは，Hilbert 行列の $(n+1)$ 次の小行列であり，連立一次方程式の係数行列としては，不良条件の場合 (ill-conditioned case) であることが知られている。ここに，$\boldsymbol{B}$ を正方行列とすると，$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}$ の固有値のうち，絶対値最大のものを $\lambda$，最小のものを $\mu$ とするとき，比 $\sqrt{|\lambda/\mu|}$ が大きいほど条件不良である。(退化したとき ($|\boldsymbol{B}|=0$ の場合) は $\mu=0$ となって上記の比は無限大に

なる。)

より簡便な判定法としては，行列$\boldsymbol{B}$において絶対値最大の要素を1に規格化したとき，その逆行列が非常に絶対値の大きな要素を持てば，$\boldsymbol{B}$は不良条件であると言える。

係数行列(3.1)の逆行列の要素の絶対値の最大は，次数$n$が大きくなるにつれて，加速的に増大し，例えば$n=8$のとき，約$3\times10^{12}$になる。これは，近似区間が$[0,1]$の場合であるが，近似区間をどのように定義しても，多少の程度の差こそあれ，係数行列が不良条件になることは変わらない。

係数行列が不良条件の時，連立一次方程式の数値計算の過程で発生する打ち切り誤差あるいは桁落ちが蓄積して，結果として大きな誤差を生ずることになる。従って，ベキ級数を用いて最小二乗近似を行うと，次数$n$がある程度以上大きくなると，誤差が増大することが予想され，この方法は，次数の大きい多項式で近似する場合には適当ではない。

この問題を回避するためには，近似関数としてベキ級数の代わりに直交関数系が使用される。2節において述べたように，近似関数$g(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i g_i$において$g_i$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$が直交系であれば，連立一次方程式を解く必要はなく，ただちに式(2.8)より係数が求められるため，係数行列の不良条件に影響されずに済むからである。

以上の考察から，ベキ級数近似においては，ある程度までは次数を上げることにより精度は上昇するが，所定の次数をこえると逆に精度が低下することが示され，Legendre関数近似においてはそのようなことは，理論上は生じないことが示された。このことが現実の数値計算においてどのような現象となって観察されるかという問題を次節において論ずる。

## 4. ベキ級数近似と Legendre 関数近似の精度比較

2節，式(2.10)において述べた$n$次のLegendre関数は$x$の$n$次多項式である。従ってLegendre関数近似式を$g_P(x)$とおくと，

$$g_P(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i P_i(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

のように，$x$の多項式に置き換えられる。すなわち，ベキ級数近似とLegendre関数近似は，いずれも$n$次多項式によって，式(2.1)が最小になるように近似する。従って，ベキ級数近似とLegendre関数近似の精度を比較することによって，ベキ級数近似における不良条件の影響を調べることができる。

精度を比較するにあたっては，最小二乗法の“近さの尺度”である二乗ノルム式(2.1)を計算することとし，近似の対象としては，真の値が容易に得られるものの中で取扱いの容易な$f(x)=\sin(\pi x/2)$，$f(x)=\sin(\pi x/2)/x$ および $f(x)=\exp(-x)$ を採用した。それぞれ，最小二乗ベキ級数近似式とLegendre関数近似式を求め，さらに二乗ノルムを計算した結果をTable (4.1)，(4.2)，(4.3)に示す。近似区間は，それぞれ$[-1,1]$，$[-1,1]$，$[0,\ln 2]$である。

なお，この計算は，北大大型計算機センターのHITAC M—280Hを使用し，すべて自作のPASCALプログラムによって行った。計算結果の出力にはH—8172レーザプリンタを，図形出力にはH—8195漢字プリンタを用いた。

Table (4.1)，(4.2)，(4.3)共に，$N$は近似多項式の次数，$\|G-F\|^2$はベキ級数近似の二乗ノルム，$\|G_P-F\|^2$はLegendre関数近似の二乗ノルムの計算値である。

Table (4.1)において，ベキ級数近似の二乗ノルム$\|G-F\|^2$は13次で最小になり，それより高次の近似では，かえって近似精度が下がってゆくことがわかる。Lcgendre関数近似の二乗ノル

**Table(4.1)** 二乗ノルム：$f(x)=\sin(\pi x/2)$, $[-1, 1]$

| $N$ | $\|G-F\|^2$ | $\|G_p-F\|^2$ |
|---|---|---|
| 5 | 3.51428749798528979E−09 | 3.51428749798556690E−09 |
| 7 | 2.67099695770601391E−13 | 2.67099695770516270E−13 |
| 9 | 8.59889910783988753E−18 | 8.59889557100610446E−18 |
| 11 | 1.45215159269369857E−22 | 1.36788664890408006E−22 |
| 13 | 1.03554378626023680E−23 | 5.43466425235611941E−26 |
| 15 | 6.78154828736979099E−21 | 4.75279417919485998E−25 |
| 17 | 1.12259826374421607E−18 | 1.16477377358429103E−22 |
| 19 | 5.33939136586209424E−17 | 1.17940464682299731E−22 |

**Table(4.2)** 二乗ノルム：$f(x)=\sin(\pi x/2)/x$, $[-1, 1]$

| $N$ | $\|G-F\|^2$ | $\|G_p-F\|^2$ |
|---|---|---|
| 4 | 1.42318478018472225E−08 | 1.42318478018475715E−08 |
| 6 | 1.07727347752486169E−12 | 1.07727347752581367E−12 |
| 8 | 3.45996794884346020E−17 | 3.45996643671110855E−17 |
| 10 | 6.07090656491140583E−22 | 5.49580849823074007E−22 |
| 12 | 1.84444993804447468E−22 | 2.04538385859727215E−25 |
| 14 | 4.45558993958237662E−22 | 2.26263583553811607E−25 |
| 16 | 3.62151766713827645E−20 | 3.31588508752669182E−25 |
| 18 | 5.41135616672200163E−18 | 2.07527938382206286E−22 |

**Table(4.3)** 二乗ノルム：$f(x)=\exp(-x)$, $[0, \ln 2]$

| $N$ | $\|G-F\|^2$ | $\|G_p-F\|^2$ |
|---|---|---|
| 3 | 7.35875720641766172E−10 | 7.35875720641765035E−10 |
| 4 | 8.90983470735856420E−13 | 8.90983470734971633E−13 |
| 5 | 7.47296313477147565E−16 | 7.47296294540768037E−16 |
| 6 | 4.63352336479065147E−19 | 4.59808983265029057E−19 |
| 7 | 1.44764299103356730E−19 | 2.16455566760896211 1E−22 |
| 8 | 2.86232445801272959E−18 | 1.33474378716075901E−25 |
| 9 | 3.75435604241239218E−17 | 5.30809361596220652E−26 |

ム$\|G_P-F\|^2$と比較すると，5～9次では，両者はほぼ等しいが，11次以上の近似においては，明らかにLegendre関数近似の方が精度が良くなっている。従って，この場合，不良条件の影響は11次くらいから現れ始め，次数が増大するにつれて大きくなってゆくといえよう。

Table(4.2)においても，ほぼ同様の傾向が見られ，$\|G-F\|^2$は12次で最小になり，10次以上の近似では，Legendre関数近似の方が精度が良いのがわかる。

Table(4.3)においても同様に，$\|G-F\|^2$は7次で最小になり，6次以上の近似ではLegendre

関数近似の方が精度が良い。

Table (4.1), (4.2) を通じて，ベキ級数近似の二乗ノルムが最小になる多項式の次数と同じ次数において，Legendre 関数近似の二乗ノルムの値も最小になっている。これより大きい次数においては，どちらも二乗ノルムが増大しているが，増大の度合いはベキ級数の方が急激に増大するのに対して，Legendre 関数近似の場合は微増であるといえる。

さて，$f(x)=\sin(\pi x/2)$ の 11 次多項式による近似について，ベキ級数近似と Legendre 関数近似による結果を，それぞれ，Table (4.4), (4.5) に示す。Table において，A( 0 )～A(11) は 0～11 次の係数に相当し，G(X) は近似値，SIN (X＊PAI/2) は計算機の組込み関数を用いて計算した値 (これを真値とする)，G(X)－SIN (X＊PAI/2) は誤差である。また，被近似関数 $f(x)$

**Table(4.4)**　ベキ級数による最小二乗近似

```
*** OUTPUT  APPROXIMATION OF SIN ***

F(X) = SIN(X*PAI/2)
HAJIME = -1.000   OWARI =  1.000

A( 0)=   0.00000000000000000E+00
A( 1)=   1.57079632662768942E+00
A( 2)=   0.00000000000000000E+00
A( 3)=  -6.45964093039898032E-01
A( 4)=   0.00000000000000000E+00
A( 5)=   7.96925905093455317E-02
A( 6)=   0.00000000000000000E+00
A( 7)=  -4.68162946770722156E-03
A( 8)=   0.00000000000000000E+00
A( 9)=   1.60227998484206302E-04
A(10)=   0.00000000000000000E+00
A(11)=  -3.42266712102436588E-06

X       G(X)                      SIN(X*PAI/2)              G(X)-SIN(X*PAI/2)
 -1.00 -9.99999999960792876E-01 -1.00000000000000000E+00  3.92071236587909766E-11
 -0.98 -9.99506560371174579E-01 -9.99506560365731558E-01 -5.44302103389071590E-12
 -0.96 -9.98026728443487485E-01 -9.98026728428271559E-01 -1.52159257416073501E-11
 -0.94 -9.95561964612817457E-01 -9.95561964603079996E-01 -9.73746083765547610E-12
 -0.92 -9.92114701314753669E-01 -9.92114701314477807E-01 -2.75862666043735771E-13
 -0.90 -9.87688340587659988E-01 -9.87688340595137687E-01  7.47769901554562466E-12
 -0.88 -9.82287250717323576E-01 -9.82287250728688666E-01  1.13650894251193790E-11
 -0.86 -9.75916761927453108E-01 -9.75916761938747379E-01  1.12942710739361019E-11
 -0.84 -9.68583161120405711E-01 -9.68583161128631090E-01  8.22537871147943633E-12
 -0.82 -9.60293685673443975E-01 -9.60293685676943023E-01  3.49904827334768243E-12
 -0.80 -9.51056516296731366E-01 -9.51056516295153503E-01 -1.57786284038508029E-12
 -0.78 -9.40880768960184674E-01 -9.40880768954225372E-01 -5.95930249591702932E-12
 -0.76 -9.29776485897207114E-01 -9.29776485888251375E-01 -8.95573892822909556E-12
 -0.74 -9.17754625694225029E-01 -9.17754625683981085E-01 -1.02439445814894725E-11
 -0.72 -9.04827052475840776E-01 -9.04827052466019452E-01 -9.82132430937809886E-12
 -0.70 -8.91006524196299651E-01 -8.91006524188367746E-01 -7.93190513270758402E-12
 -0.68 -8.76306680048845807E-01 -8.76306680043863445E-01 -4.98236174539812282E-12
 -0.66 -8.60742027005402893E-01 -8.60742027003943588E-01 -1.45930489914292139E-12
 -0.64 -8.44327925499873039E-01 -8.44327925502014992E-01  2.14195328140931451E-12
 -0.62 -8.27080574269185589E-01 -8.27080574274561761E-01  5.37617173002047366E-12
 -0.60 -8.09016994367058873E-01 -8.09016994374947354E-01  7.88848153465693258E-12
 -0.58 -7.90155012366251644E-01 -7.90155012375690288E-01  9.43864431057761522E-12
 -0.56 -7.70513242765878612E-01 -7.70513242775789142E-01  9.91053072940673019E-12
 -0.54 -7.50111069621151427E-01 -7.50111069630459454E-01  9.30802657173046555E-12
 -0.52 -7.28968627413670300E-01 -7.28968627421411414E-01  7.74111330592575086E-12
 -0.50 -7.07106781181143215E-01 -7.07106781186547420E-01  5.40420486139225886E-12
 -0.48 -6.84547105926137656E-01 -6.84547105928688573E-01  2.55091781031779874E-12
 -0.46 -6.61311865324185552E-01 -6.61311865323651757E-01 -5.33795230239775265E-13
 -0.44 -6.37423989752249495E-01 -6.37423989748689565E-01 -3.55993012846056445E-12
 -0.42 -6.12907053659233814E-01 -6.12907053652976347E-01 -6.25746676696792292E-12
 -0.40 -5.87785252300869324E-01 -5.87785252292472971E-01 -8.39635305727171044E-12
 -0.38 -5.62083377861932465E-01 -5.62083377852130431E-01 -9.80203418432523677E-12
 -0.36 -5.35826794989362323E-01 -5.35826794978996435E-01 -1.03658887029567381E-11
 -0.34 -5.09041415760420238E-01 -5.09041415750371110E-01 -1.00491281962433732E-11
 -0.32 -4.81753674110597635E-01 -4.81753674101715088E-01 -8.88254747533068212E-12
 -0.30 -4.53990499746507015E-01 -4.53990499739546596E-01 -6.96041835279714860E-12
 -0.28 -4.25779291569502851E-01 -4.25779291565072437E-01 -4.43141356942788889E-12
 -0.26 -3.97147890636265627E-01 -3.97147890634780398E-01 -1.48522860676791879E-12
 -0.24 -3.68124552683015874E-01 -3.68124552684677739E-01  1.66186508998578120E-12
 -0.22 -3.38737920240508195E-01 -3.38737920245291160E-01  4.78296569017544471E-12
 -0.20 -3.09016994367290909E-01 -3.09016994374947188E-01  7.65627838905658109E-12
 -0.18 -2.78991106029148811E-01 -2.78991106039229012E-01  1.00802005631450697E-11
 -0.16 -2.48689887152968594E-01 -2.48689887164854545E-01  1.18859505571222712E-11
 -0.14 -2.18143241383594033E-01 -2.18143241396542301E-01  1.29482674582348523E-11
 -0.12 -1.87381314572531682E-01 -1.87381314585724379E-01  1.31926969348938883E-11
 -0.10 -1.56434465027631128E-01 -1.56434465040230591E-01  1.25994631394732437E-11
 -0.08 -1.25333233553099652E-01 -1.25333233564303967E-01  1.12043152533658485E-11
 -0.06 -9.41083133094189062E-02 -9.41083133185140475E-02  9.09514130675859178E-12
 -0.04 -6.27905195229070262E-02 -6.27905195293130963E-02  6.40607011881400012E-12
 -0.02 -3.14107590748195038E-02 -3.14107590781280309E-02  3.30852706342810166E-12
  0.00  2.61590137322801776E-16  2.61590137350647382E-16 -2.78456066629438852E-26
```

**Table(4.5)** Legendre関数による最小二乗近似

```
*** OUTPUT  APPROXIMATION OF SIN ***

F(X) = SIN(X*PAI/2)
HAJIME = -1.000   OWARI =  1.000

A( 0)=   0.00000000000000000E+00
A( 1)=   1.57079632666815527E+00
A( 2)=   0.00000000000000000E+00
A( 3)=  -6.45964093710271484E-01
A( 4)=   0.00000000000000000E+00
A( 5)=   7.96925939298492730E-02
A( 6)=   0.00000000000000000E+00
A( 7)=  -4.68163690361363561E-03
A( 8)=   0.00000000000000000E+00
A( 9)=   1.60235228613321548E-04
A(10)=   0.00000000000000000E+00
A(11)=  -3.42525580993897662E-06
```

| X | G(X) | SIN(X*PAI/2) | G(X)-SIN(X*PAI/2) |
|---|---|---|---|
| -1.00 | -9.99999999956922805E-01 | -1.00000000000000000E+00 | 4.30771945891805785E-11 |
| -0.98 | -9.99506560371704655E-01 | -9.99506560365731558E-01 | -5.97309701699799689E-12 |
| -0.96 | -9.98026728445430458E-01 | -9.98026728428271559E-01 | -1.71588993014282210E-11 |
| -0.94 | -9.95561964614534403E-01 | -9.95561964603079996E-01 | -1.14544068674504729E-11 |
| -0.92 | -9.92114701315517072E-01 | -9.92114701314477807E-01 | -1.03926589556380122E-12 |
| -0.90 | -9.87688340587321453E-01 | -9.87688340595137687E-01 | 7.81623377132945052E-12 |
| -0.88 | -9.82287250716069898E-01 | -9.82287250728688666E-01 | 1.26187671423139136E-11 |
| -0.86 | -9.75916761925630219E-01 | -9.75916761938747379E-01 | 1.31171601358559542E-11 |
| -0.84 | -9.68583161118399538E-01 | -9.68583161128631090E-01 | 1.02315517169770942E-11 |
| -0.82 | -9.60293685671603725E-01 | -9.60293685676943023E-01 | 5.33929844781511065E-12 |
| -0.80 | -9.51056516295325741E-01 | -9.51056516295153503E-01 | -1.72237224482785223E-13 |
| -0.78 | -9.40880768959382788E-01 | -9.40880768954225372E-01 | -5.15741616080589438E-12 |
| -0.76 | -9.29776485897076829E-01 | -9.29776485888251375E-01 | -8.82545425628933344E-12 |
| -0.74 | -9.17754625694742948E-01 | -9.17754625683981085E-01 | -1.07618636224771080E-11 |
| -0.72 | -9.04827052476909366E-01 | -9.04827052466019452E-01 | -1.08899139705798120E-11 |
| -0.70 | -8.91006524197767852E-01 | -8.91006524188367746E-01 | -9.40010569383531447E-12 |
| -0.68 | -8.76306680050531153E-01 | -8.76306680043863445E-01 | -6.66770805235472608E-12 |
| -0.66 | -8.60742027007112540E-01 | -8.60742027003943588E-01 | -3.16895121255100776E-12 |
| -0.64 | -8.44327925501421314E-01 | -8.44327925502014992E-01 | 5.93677884630494646E-13 |
| -0.62 | -8.27080574270409458E-01 | -8.27080574274561761E-01 | 4.15230350103712453E-12 |
| -0.60 | -8.09016994367829714E-01 | -8.09016994374947354E-01 | 7.11763981087187858E-12 |
| -0.58 | -7.90155012366482043E-01 | -7.90155012375690288E-01 | 9.20824527739227960E-12 |
| -0.56 | -7.70513242765526712E-01 | -7.70513242775789142E-01 | 1.02624297948494814E-11 |
| -0.54 | -7.50111069620220977E-01 | -7.50111069630459454E-01 | 1.02384767330931936E-11 |
| -0.52 | -7.28968627412208428E-01 | -7.28968627421411414E-01 | 9.20298559581311792E-12 |
| -0.50 | -7.07106781179234520E-01 | -7.07106781186547420E-01 | 7.31290028532782799E-12 |
| -0.48 | -6.84547105923898058E-01 | -6.84547105928688573E-01 | 4.79051520674289577E-12 |
| -0.46 | -6.61311865321753484E-01 | -6.61311865323651757E-01 | 1.89827320529190047E-12 |
| -0.44 | -6.37423989749777112E-01 | -6.37423989748689565E-01 | -1.08754671934718772E-12 |
| -0.42 | -6.12907053656877726E-01 | -6.12907053652976347E-01 | -3.90137921968403134E-12 |
| -0.40 | -5.87785252298781494E-01 | -5.87785252292472971E-01 | -6.30852314831287231E-12 |
| -0.38 | -5.62083377860252184E-01 | -5.62083377852130431E-01 | -8.12175326991848578E-12 |
| -0.36 | -5.35826794988208691E-01 | -5.35826794978996435E-01 | -9.21225595806873798E-12 |
| -0.34 | -5.09041415759886720E-01 | -5.09041415750371110E-01 | -9.51561052175975419E-12 |
| -0.32 | -4.81753674110747265E-01 | -4.81753674101715088E-01 | -9.03217778347453759E-12 |
| -0.30 | -4.53990499747370060E-01 | -4.53990499739546596E-01 | -7.82346409877732185E-12 |
| -0.28 | -4.25779291571076066E-01 | -4.25779291565072437E-01 | -6.00362815017518869E-12 |
| -0.26 | -3.97147890638509360E-01 | -3.97147890634780398E-01 | -3.72896158395974455E-12 |
| -0.24 | -3.68124552685861708E-01 | -3.68124552684677739E-01 | -1.18396958903588256E-12 |
| -0.22 | -3.38737920243858459E-01 | -3.38737920245291160E-01 | 1.43270117991534107E-12 |
| -0.20 | -3.09016994371024104E-01 | -3.09016994374947188E-01 | 3.92308407981545315E-12 |
| -0.18 | -2.78991106033125283E-01 | -2.78991106039229012E-01 | 6.10372863363295437E-12 |
| -0.16 | -2.48689887157036479E-01 | -2.48689887164854545E-01 | 7.81806563932008203E-12 |
| -0.14 | -2.18143241387596012E-01 | -2.18143241396542301E-01 | 8.94628815473197392E-12 |
| -0.12 | -1.87381314576311672E-01 | -1.87381314585724379E-01 | 9.41270672516481000E-12 |
| -0.10 | -1.56434465031040804E-01 | -1.56434465040230591E-01 | 9.18978781960788638E-12 |
| -0.08 | -1.25333233556004744E-01 | -1.25333233564303967E-01 | 8.29922242040481706E-12 |
| -0.06 | -9.41083133117046888E-02 | -9.41083133185140475E-02 | 6.80935863250908824E-12 |
| -0.04 | -6.27905195244830988E-02 | -6.27905195293130963E-02 | 4.82999751305612790E-12 |
| -0.02 | -3.14107590756234692E-02 | -3.14107590781280309E-02 | 2.50456166223100851E-12 |
| 0.00 | 2.61590137329540718E-16 | 2.61590137350647382E-16 | -2.11066637724802392E-26 |

$=\sin(\pi x/2)$ は奇関数であるから，Tableには $x \leqq 0$ の計算値のみを示した。

また，両者の誤差をFig.(4.1)に示す。グラフより，Legendre関数近似では，近似区間の両端付近に誤差をしわ寄せし，中央付近では誤差を小さくして，結果的に二乗ノルムを小さくしていることがわかる。

## 5．結　　語

3節において論じた，不良条件にしたがうべき級数近似の多項式次数増大に伴う精度低下の現象は，4節における数値実験により検証された。しかしながら，この議論のみでは説明しえない数値実験結果も又観測されている。すなわち，Legendre関数近似の場合には，不良条件下の方程

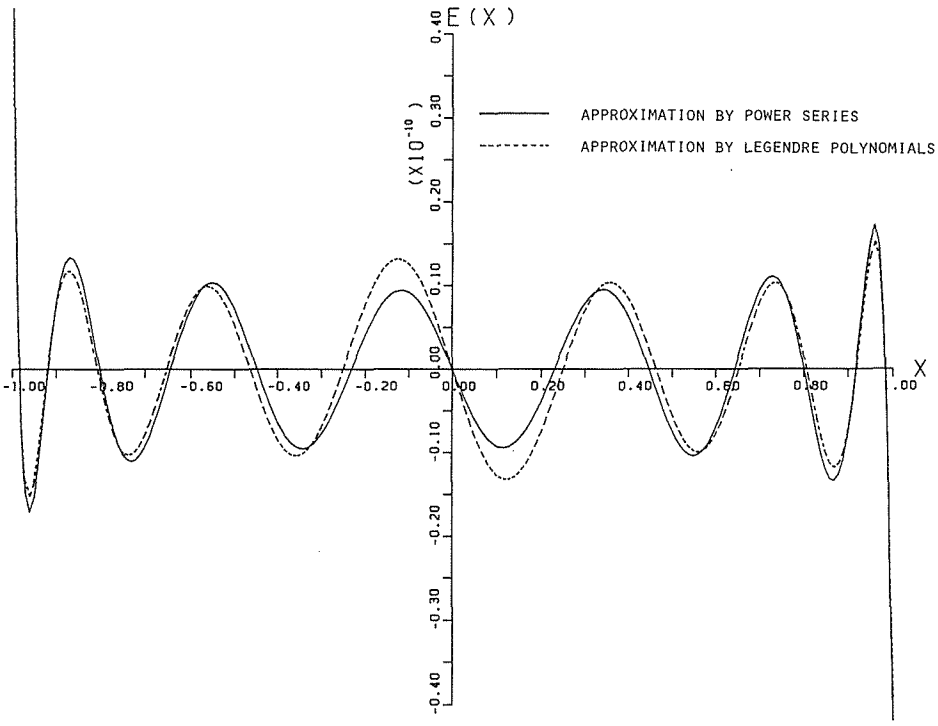


**Fig.(4.1)**　最小二乗近似の誤差曲線：$f(x)=\sin(\pi x/2)$，$[-1, 1]$，$n=11$

式を解くことがないため，ベキ級数近似の場合と同じ精度低下は生じないことが期待されていたにもかかわらず，4節における Table（4．1），（4．2）の $\| G_p - F \|^2$ の値の変動においては精度低下現象が観察されている。量的には微細なものではあり，多項式次数の増大に伴う低下の度合いもきわめて緩慢なものであるため，ベキ級数近似の場合とは別の原因によるものと考える方が自然である。

現在のところ，この Legendre 関数近似の精度低下現象として

i）変数の丸め誤差の蓄積（北大大型計算機センターのPASCAL　実数型変数の有効桁数は，小数点以下約 16 桁である）

ii）自作の数値積分プログラム（Romberg 積分法を使用）の精度が不十分であること

を考えているが，これらの影響の定量的な評価を得るには至っておらず，今後の課題と考えている。

## 参考文献

1）河口万由香：関数近似および実用上の問題に関する研究，北海道大学工学部卒業論文（1985）
2）田辺国士：非線形最小二乗法のアルゴリズム　応用統計学，Vol.9, No.3, pp.119-141 (1981)
3）中川徹，小柳義夫：最小二乗法による実験データの解析，東大出版会（1982）
4）C.L.Lauson and R.J.Hanson : *Solving Least Squares Problems,* Pentice Hall (1974)