北海道大学工学部研究報告
第129号（昭和61年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 129 (1986)

多項確率変数の一元配置および多元配置問題の一般化された dispersion による分析について

種市信裕　佐藤義治　河口至商

（昭和60年9月30日受理）

On One-Way and Multi-Way Layout Analysis for the Multinomial Variate by the Generalized Dispersion Function

Nobuhiro TANEICHI, Yoshiharu SATO and Michiaki KAWAGUCHI

(Received September 30, 1985)

Abstract

Generalized dispersion based on the positively homogeneous function of the first order, which includes α-entropy by Havrda and Charvát are treated. The test statistics for the multinomial variate in one-way layout are shown and their asymptotic distribution are found. These results are then extended to the multi-way layout analysis.

1. はじめに

カテゴリカルデータの"ちらばり"を測る尺度（dispersion）をもとにして，予測値からの誤差や，分布の同一性を検定する方法として，dispersion 分析[3]が知られている。Shannon エントロピーに基づいて，dispersion を定義すると，多項確率変数の一元配置問題における検定は，従来の丈度比検定となり，また Gini-index[2]を用いると Light, R. J. -Margolin, B. H. による CATANOVA -統計量[6]の検定となる。

本研究では，より一般化された dispersion を用いて，多項確率変数の一元配置における検定統計量および，その漸近分布を求め，さらに多元配置に拡張した。

2. dispersion とその分解

離散確率変数 Y が値 j ($j=1, \cdots, s$) を持つ確率を

$$\boldsymbol{P}(Y=j)=p_j>0\ (j=1, \cdots, s)\ ;\ \sum_{j=1}^{s} p_j=1 とする。$$

これらの確率 $\boldsymbol{P}=(p_1,\cdots,p_s)$ に対して，次の性質を持つ dispersion 関数 D を与える。

(a)　$0 \leqq \boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}) < \infty$

(b)　$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p})=0 \quad (p_j=1,\ 1 \leqq {}^{\exists}j \leqq s)$

ここでは，関数 $\boldsymbol{D}$ は $\boldsymbol{p}$ に関して，連続，狭義の concave で

情報工学専攻　情報数理工学第一講座

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p})=\sum_{i=1}^{s}p_i\,\varDelta(i,\ \boldsymbol{p})\ (0\leqq\varDelta(i,\ \boldsymbol{p})\leqq\infty) \tag{2.1}$$

と言う形で書けることを仮定する。また，$\boldsymbol{p}=(p_1,\cdots,p_s)$ と，$\boldsymbol{q}=(q_1,\cdots,q_s)$ に対して

(c)　$0\leqq\boldsymbol{D}'(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})<\infty$

(d)　$\boldsymbol{D}'(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=0 \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}$

を満たす関数（疑距離(divevgence)）として

$$\boldsymbol{D}'(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q})=\sum_{j=1}^{s}p_j\{\varDelta(j,\ \boldsymbol{q})-\varDelta(j,\ \boldsymbol{p})\} \tag{2.2}$$

を与える。（ただし，$\boldsymbol{D}'$ は $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ に関して対称ではない。）さらに

$$\boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q})=\sum_{j=1}^{s}p_j\varDelta(j,\ \boldsymbol{q})$$

とおくと

$$\boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q})=\boldsymbol{D}'(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q})+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p})>0 \tag{2.3}$$

となる。

表1. K個の母集団および全母集団の確率分布

	Y_1	Y_2	Y_3	……	Y_k	Y^*
	λ_1	λ_2	λ_3	……	λ_k	
1	P_{11}	P_{12}	P_{13}	……	P_{1k}	P_1^*
2	P_{21}	P_{22}	P_{23}	……	P_{2k}	P_1^*
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
S	P_{s1}	P_{s2}	P_{s3}	……	P_{sk}	P_s^*

s個のカテゴリーからなる離散確率変数 $\boldsymbol{Y}=(y_1,\cdots,y_s)$ に関して，先験確率 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ を持つk個の母集団の分布が表1のように与えられており，全母集団についての確率分布が

$$p_i^*=\lambda_1 p_{i1}+\cdots+\lambda_k p_{ik}\quad(i=1,\cdots,s) \tag{2.4}$$

と与えられているものとする。すると，(2. 1), (2. 2), (2. 3), (2.4)式より

$$\begin{aligned}\underbrace{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}^*)}_{(\mathbf{TD})}&=\sum_{i=1}^{s}p_i^*\varDelta(i,\ \boldsymbol{p})=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j p_{ij}\varDelta(i,\ \boldsymbol{p}^*)\\&=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{s}\lambda_j p_{ij}[\varDelta(i,\ \boldsymbol{p}^*)-\varDelta(i,\ \boldsymbol{p}_j)]+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{s}\lambda_j p_{ij}\varDelta(i,\ \boldsymbol{p}_j)\\&=\underbrace{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\boldsymbol{D}'(\boldsymbol{p}_j,\ \boldsymbol{p}^*)}_{(\mathbf{BD})}+\underbrace{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_j)}_{(\mathbf{WD})}>0\end{aligned}$$

となり，全反応度数のdispersion（**TD**）と，グループ内のdispersion（**WD**）の差は，(2.2)式のグループ間の divergence（**BD**）で表現される。

3. 大標本における多項確率変数の一元配置における検定

表2. 一元配置における観測値

		Group 1	2	3	……	k	Total
Category	A_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	……	n_{1k}	$n_{1.}$
	A_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	……	n_{2k}	$n_{2.}$
	A_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	……	n_{3k}	$n_{3.}$
	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
	A_s	n_{s1}	n_{s2}	n_{s3}	……	n_{sk}	$n_{s.}$
Total		$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.3}$		$n_{.k}$	$n_{..}$

今，k個のグループに対して，s個のカテゴリーに反応したデータが表2のように観測されている時，それぞれのグループにおける反応$(n_{1j},\cdots,n_{sj})$ $(j=1,\cdots,k)$ は，次のような多項法則に従うとする。

$$\boldsymbol{P}\{(n_{1j},\cdots,n_{sj})\}=\frac{n_{.j}!}{n_{1j}!\cdots n_{sj}!}\prod_{i=1}^{s}(p_{ij})^{n_{ij}} \tag{3.1}$$

ここで　$\sum_{j=1}^{s}p_{ij}=1$，$p_{ij}>0$ $(i=1,\cdots,s,j=1,\cdots,k)$

各グループ間は独立に分布するとすれば，全体では次のような確率構造を持つ。

$$p\{(n_{11},\cdots,n_{s1},\ n_{12},\ \cdots,n_{s2},\cdots,n_{1k},\ \cdots;n_{sk})\}=\prod_{j=1}^{k}\left[\frac{n_{.j}!}{n_{1j}!\cdots n_{sj}!}\prod_{i=1}^{s}(p_{ij})^{n_{ij}}\right] \tag{3.2}$$

それぞれのグループの先験確率を$\lambda_j(j=1,\cdots,k)$ とし，名多項分布の確率ベクトルを $\boldsymbol{p}_j=(p_{1j},\cdots,p_{sj})$ $(j=1,\cdots,k)$ とおき，各カテゴリーの全反応度数$(n_{1.},\cdots,n_{s.})$は生起確率

$$\boldsymbol{p}^*=\lambda_1\boldsymbol{p}_1+\lambda_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{p}_k=(\boldsymbol{p}_1^*,\ \boldsymbol{p}_2^*,\cdots,\boldsymbol{p}_s^*) \tag{3.3}$$

を持つ多項法則に従うとする。

各グループの生起確率$p_{ij}(i=1,\cdots,s,\ j=1,\cdots,k)$を$(n_{ij}/n_{.j})$，各グループの先験確率$\lambda_j(j=1,\cdots,k)$を$(n_{.j}/n_{..})$とそれぞれ推定する。それぞれのグループの分布が同一であるという帰無仮設は$p_{i1}=p_{i2}=\cdots=p_{ik}=\tilde{p}_i(i=1,\cdots,s)$ であり，それを$\mathbf{H}_0$とする。$\tilde{\boldsymbol{p}}=(\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_s)$ とすると以下の定理が成り立つ。ただし次を仮定する。

(☆) $n_{i.}\longrightarrow\infty$ の時　$n_{i.}/n_{..}\xrightarrow{P}\lambda_i(i=1,\cdots,s)$　　ただし$\xrightarrow{P}$ は確率収束

定理1；帰無仮説$\mathbf{H}_0$のもとで(☆)ならば，$n_{..}$**TD**と$n_{..}$**BD**は，漸近的に独立に分布する。
(証明はAPPENDIX－1)

系　1，帰無仮説$\mathbf{H}_0$のもとで(☆)ならば，漸近的に
(1)$\mathbf{Corr}(n_{..}\mathbf{WD},\ n_{..}\mathbf{BD})>0$，　(2)$\mathbf{Corr}(n_{..}\mathbf{TD},\ n_{..}\mathbf{WD})<0$
(証明はAPPENDIX－2)

定理2；dispersion関数が，正の一次同次関数の条件[4)]

$$\boldsymbol{D}(a\boldsymbol{p})=a\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}),\ a>0 \tag{3.4}$$

を満たし，帰無仮説$\mathbf{H}_0$のもとで(☆)ならば，漸近的に

$$n_{..}\frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{TD}}\xrightarrow{L}\frac{1}{\boldsymbol{D}(\tilde{p})}\sum_{i=1}^{s}\eta_i\chi^2_{(k-1)} \tag{3.5}$$

ただし，$\eta_i(i=1,\cdots,s-1)$は行列

$$\boldsymbol{\Phi}=\left[-\frac{1}{2}\tilde{p}_i^{\frac{1}{2}}\tilde{p}_j^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})}{\partial\tilde{p}_i\partial\tilde{p}_j};\quad 1\leqq i\leqq s,\quad 1\leqq j\leqq s\right] \tag{3.6}$$

の固有値($\boldsymbol{\Phi}$のrankは$s-1$)，$\chi^2_{(k-1)}$は互いに独立な自由度$k-1$のχ^2－分布

$\xrightarrow{L}$ は分布としての収束

(証明はAPPENDIX－3)

dispersionとして，$\alpha=1$の時，極限関数として，shannonエントロピー，$\alpha=2$の時，Gini-indexであるHavrda-Charvátのα－エントロピー[5)]

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p})=\begin{cases}\left(1-\sum_{j=1}^{s}p_i^{\alpha}\right)/(\alpha-1) & (\alpha\neq1)\\ \sum_{i=1}^{s}p_i\log_e p_i & (\alpha=1)\end{cases} \tag{3.7}$$

を用いた場合

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{p})=\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{s}p_i-\dfrac{\sum_{i=1}^{s}p_i^{\alpha}}{\left(\sum_{i=1}^{s}p_i\right)^{\alpha-1}}\right)/(\alpha-1) & (\alpha\neq1)\\ -\sum_{i=1}^{s}p_i\log p_i+\left(\sum_{i=1}^{s}p_i\right)\log\left(\sum_{i=1}^{s}p_i\right) & (\alpha=1)\end{cases} \tag{3.8}$$

とするならば，一次同次関数の条件(3．4)を満たす。これを定理2に適用すると次が得られる。

系2；(3．7)式で与えられるようなα―エントロピーをdispersionとして与えた時，帰無仮説H_0のもとで(☆)ならば漸近的に

$$n_{..}\frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{TD}}\xrightarrow{L}\frac{1}{\boldsymbol{H}(\tilde{\boldsymbol{p}})}\sum_{i=1}^{s-1}\varphi_i\chi^2_{(k-1)} \tag{3.9}$$

ただし，$\varphi_i(i=1,\cdots,s-1)$は行列

$$\boldsymbol{\Psi}=\left[-\frac{1}{2}\alpha\left\{\tilde{p}_i^{\frac{1}{2}}\tilde{p}_j^{\frac{1}{2}}\left(\tilde{p}_i^{\alpha-1}+\tilde{p}_i^{\alpha-1}-\sum_{k=1}^{s}\tilde{p}_k^{\alpha}-\delta_{ij}\tilde{p}_j^{\alpha-2}\right)\right\}\right] \tag{3.10}$$

の固有値($\boldsymbol{\Psi}$のrankは$s-1$)

系2において，$\alpha=1$の時$n_{..}\mathbf{BD}$は尤度比となり，$\alpha=2$の時$n_{..}(\mathbf{BD}/\mathbf{TD})$は，Light,R.J.とMargolin,B.H.によるCATANOVA統計量となる[8)]。

4．多元配置への一般化

r個の水準を持つ要因A_1と，s個の水準を持つ要因A_2があって，A_1のi 番目の水準と，A_2のj番目の水準がk 個のカテゴリーに反応する確率ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{p}_{ij}=(p_{ij1},\cdots,p_{ijk})$ $(i=1,\cdots,r,\ j=1,\cdots,s)$とする。さらにそれぞれの先験確率を，$\lambda_{ij}(i=1,\cdots,r,\ j=1,\cdots,s)$，要因$A_1$のi番目の水準の母集団全体の先験確率を$\lambda_{i.}=\sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}$，要因$A_2$のj番目の水準の母集団全体の先験確率を$\lambda_{.j}=\sum_{i=1}^{r}\lambda_{ij}$，要因$A_1$のi番目の水準の母集団全体の確率ベクトルを$\boldsymbol{p}_{i.}=\sum_{j=1}^{s}(\lambda_{ij}/\lambda_{i.})\boldsymbol{p}_{ij}$，要因$A_2$のj番目の水準の母集団全体の確率ベクトルを$\boldsymbol{p}_{.j}=\sum_{i=1}^{r}(\lambda_{ij}/\lambda_{.j})\boldsymbol{p}_{ij}$，母集団全体の確率ベクトルを

$\boldsymbol{p}_{..}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}\boldsymbol{p}_{ij}$とすると，母集団全体のdispersion $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_{..})$は次のように分解できる。

$$\underbrace{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_{..})}_{(\mathbf{TD})}=\underbrace{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_{ij})}_{(\mathbf{WD})}+\underbrace{\left[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_{..})-\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_{ij})\right]}_{(\mathbf{BD}(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2))}. \tag{4.1}$$

ただし

$$\mathbf{BD}(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2)=\underbrace{\left[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_{..})-\sum_{i=1}^{r}\lambda_{i.}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_{i.})\right]}_{(\mathbf{BD}(\mathbf{A}_1))}+\underbrace{\left[\sum_{i=1}^{r}\lambda_{i.}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_{i.})-\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_{ij})\right]}_{(\mathbf{BD}(\mathbf{A}_2|\mathbf{A}_1))}$$

ここで**WD**は母集団内のdispersion，$\mathbf{BD}(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2)$は要因$\mathbf{A}_1$による影響を除いた時の要因$A_2$による母集団間のdispersionであり，$A_1$が水準 i の場合の$A_2$による水準間のdispersion

$$\mathbf{BD}(\mathbf{A}_2|\mathbf{A}_1=i)=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_{i.})-\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{i.}}\right)\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_{ij}) \tag{4.2}$$

を用いて

$$\mathbf{BD}(\mathbf{A}_2|\mathbf{A}_1)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_{i.}\mathbf{BD}(\mathbf{A}_2|\mathbf{A}_1=i) \tag{4.3}$$

と書ける。さらに，A_1が水準 i とした時の全体のdispersionは

$$\mathbf{TD}(\mathbf{A}_1=i)=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_{i.}) \tag{4.4}$$

となり，A_1の影響を除いた全体のdispersionは

$$\mathbf{TD}(\mathbf{A}_2)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_{i.}\mathbf{TD}(\mathbf{A}_1=i)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_{i.}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p}_{i.}) \tag{4.5}$$

となる。

表3. 二元配置における観測値

A_1	A_2	Y 1	2	3	……	k	Total
1	1	n_{111}	n_{112}	n_{113}	……	n_{11k}	$n_{11.}$
1	2	n_{121}	n_{122}	n_{123}	……	n_{12k}	$n_{12.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
1	s	n_{1s1}	n_{1s2}	n_{1s3}	……	n_{1sk}	$n_{1s.}$
Total		$n_{1\cdot 1}$	$n_{1\cdot 2}$	$n_{1\cdot 3}$	……	$n_{1\cdot k}$	$n_{1..}$

⋮

A_1	A_2	Y 1	2	3	……	k	Total
r	1	n_{r11}	n_{r12}	n_{r13}	……	n_{r1k}	$n_{r1.}$
r	2	n_{r21}	n_{r21}	n_{r23}	……	n_{r2k}	$n_{r2.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
r	s	n_{rs1}	n_{rs2}	n_{rs3}	……	n_{rsk}	$n_{rs.}$
Total		$n_{r\cdot 1}$	$n_{r\cdot 2}$	$n_{r\cdot 3}$	……	$n_{r\cdot k}$	$n_{r..}$

今，表３のように，要因$A_1=1,\cdots,s$, $A_2=1,\cdots,r$ごとにk個のカテゴリーに反応した観測値が与えられている時，A_1の i 番目の要因($1\leqq i\leqq s$)と，A_2の j 番目の要因($1\leqq j\leqq r$)に属する観測値が l 番目($1\leqq l\leqq k$)のカテゴリーに反応する確率を$p_{ijl}=(n_{ijl}/n_{ij.})$($1\leqq l\leqq k$)，$\boldsymbol{p}_{ij}=(p_{ij1},\cdots,p_{ijk})$，先験確率を$\lambda_{ij}=(n_{ij.}/n_{...})$と推定する。さらに各要因$A_1$, A_2ごとのすべての分

布が等しいと言う帰無仮説は，$\boldsymbol{p}_{11}=\boldsymbol{p}_{12}=\cdots=\boldsymbol{p}_{rs}=\tilde{\boldsymbol{p}}$で，これを$\mathbf{H}_{02}$とする，また$\mathrm{A}_1$の要因を固定した時に$\mathrm{A}_2$の要因によるすべての分布が等しいと言う帰無仮説は，$\boldsymbol{p}_{i1}=\boldsymbol{p}_{i2}=\cdots=\boldsymbol{p}_{is}=\tilde{\tilde{\boldsymbol{p}}}^{[i]}$ $(i=1,\cdots,r)$，$\tilde{\tilde{\boldsymbol{p}}}^{[i]}=(\tilde{\tilde{p}}_1^{[i]},\cdots,\tilde{\tilde{p}}_k^{[i]})$で,これを$\mathbf{H}_{03}$とする。そうすると以下の定理が成り立つ。ただし次を仮定する。

(☆☆)$n_{ij.}\longrightarrow\infty$ の時 $(n_{ij.}/n_{...})\xrightarrow{\ P\ }\lambda_{ij}$ $(i=1,\cdots,r\ ;\ j=1,\cdots,s)$

定理 3；帰無仮説$\mathbf{H}_{02}$のもとで，(☆☆)ならば，$n_{...}\mathbf{TD}$と$n_{...}\mathbf{BD}(\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2)$は漸近的に独立に分布し，さらにdispersion $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p})$が(3．4)で示される正の一次同次性の条件を満たすならば漸近的に

$$n_{...}\frac{\mathbf{BD}(\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2)}{\mathbf{TD}}\xrightarrow{\ L\ }\frac{1}{\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})}\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i\chi^2_{(rs-1)} \qquad (4.6)$$

ただし，$\eta_i(i=1,\cdots,k-1)$ は行列

$$\boldsymbol{\Phi}_2=\left[-\frac{1}{2}\tilde{p}_i^{\frac{1}{2}}\tilde{p}_j^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})}{\partial\tilde{p}_i\,\partial\tilde{p}_j};\ 1\leqq i\leqq k,\ \ 1\leqq j\leqq k\right] \qquad (4.7)$$

の固有値($\boldsymbol{\Phi}_2$のrankは$k-1$)

(証明はAPPENDIX－4)

定理 4；帰無仮説$\mathbf{H}_{03}$のもとで，(☆☆)ならば，$\sum_{i=1}^{r}\lambda_{i.}\,\mathbf{BD}(\mathrm{A}_2|\mathrm{A}_1=i)$と$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\mathbf{TD}(\mathrm{A}_1=i)$は漸近的に独立に分布し，さらにdispersion $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{p})$が(3．4)で示される正の一次同次性の条件を満たすならば漸近的に

$$n_{...}\frac{\sum_{i=1}^{r}\lambda_{i.}\,\mathbf{BD}(\mathrm{A}_2|\mathrm{A}_1=i)}{\sum_{i=1}^{r}\lambda_{i.}\,\mathbf{TD}(\mathrm{A}_1=i)}\xrightarrow{\ L\ }\frac{1}{\sum_{i=1}^{r}\lambda_{i.}\,\boldsymbol{D}(\tilde{\tilde{\boldsymbol{p}}}^{[i]})}\sum_{i=1}^{r}\left\{\sum_{l=1}^{k-1}\lambda_l^{(i)}\chi^2_{(s-1)}\right\} \qquad (4.8)$$

ただし$\lambda_l^{(i)}(i=1,\cdots,r,\ \ l=1,\cdots,k-1)$は行列

$$\boldsymbol{\Psi}_2^{(i)}=\left[-\frac{1}{2}\tilde{\tilde{p}}_l^{[i]\frac{1}{2}}\tilde{\tilde{p}}_m^{[i]\frac{1}{2}}\frac{\partial^2\boldsymbol{D}(\tilde{\tilde{\boldsymbol{p}}}^{[i]})}{\partial\tilde{\tilde{p}}_l^{[i]}\,\partial\tilde{\tilde{p}}_m^{[i]}}\ ;\ 1\leqq l\leqq k,\ \ 1\leqq m\leqq k\right]\ (i=1,\cdots,r) \qquad (4.9)$$

の固有値($\boldsymbol{\Psi}_2^{(i)}$のrankはそれぞれ$k-1$)

(証明はAPPENDIX－5)

定理 3 および定理 4 はAnderson, R. J. とLandis, J. R.[1] の結果の一般化となっている。

参 考 文 献

1) Anderson, R. J. and Landis, J. R.: Comm. Stat., **A9** (11) (1980), pp. 1191～1206.
2) Gini, C.: Universitā di Cagliari III, Parte II (1912).
3) Habermann, S. J.: Encyclopedia of statistical Science (1982), John Wiley, New York.
4) Habermann, S. J.: J. Amer. Statist. Assoc., **77** (1982), pp. 568～580.
5) Havrda, J. and Charvát, F.: Kybernetka, **33** (1967), pp. 30～35.
6) Light, R. J. and Margoline, B. H.: J. Amer. Statist. Assoc., **66** (1971), pp. 955～964.
7) Rao, C. R. and Mitra, S. K.: Generalized Inverse of Matrices and its Application, 1 st ed, (1971), John Willey, New York.
8) 種市信裕，佐藤義治：第 53 回日本統計学会講演報告集 (1985) pp. 15～16.

APPENDIX 1　（定理１の証明）

（3.1），（3.2）より

$$\boldsymbol{n}^t=(n_{11},\cdots,n_{s1},\ n_{12},\cdots,n_{s2},\cdots,n_{1k},\cdots,n_{sk}) \tag{A1.1}$$

とすると

$$\boldsymbol{n}\xrightarrow{\mathrm{L}}\mathrm{N}_{sk}(\boldsymbol{\mu},\Sigma)\ \text{ as }\ n_{..}\longrightarrow\infty \tag{A1.2}$$

ただし

$$\boldsymbol{\mu}^t=\mathrm{E}(\boldsymbol{n}^t)=(n_{.1}p_{11},\cdots,n_{.1}p_{s1},\cdots,n_{.k}p_{1k},\cdots,n_{.k}p_{sk}) \tag{A1.3}$$

$$\Sigma=\mathbf{Cov}(\boldsymbol{n})=\Sigma_1\oplus\Sigma_2\oplus\cdots\oplus\Sigma_k\quad(\oplus\text{は直和}) \tag{A1.4}$$

$$\Sigma_j=\langle n_{.j}(p_{ij}\delta_{il}-p_{ij}p_{lj}):\ 1\leqq i\leqq s,\ 1\leqq l\leqq s\rangle\ (j=1,\cdots,) \tag{A1.5}$$

$(\delta_{il};$ クロネッカー$-\delta)$

TD，WDを$\tilde{\boldsymbol{p}}$の回りでテイラー展開してやると，帰無仮説$\mathbf{H}_0$のもとでは

$$\mathrm{TD}\xrightarrow{\mathrm{P}}\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})+[\nabla\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})]^t(\hat{\boldsymbol{p}}^*-\tilde{\boldsymbol{p}})+\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{p}}^*-\tilde{\boldsymbol{p}})^t[\nabla^2\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})](\hat{\boldsymbol{p}}^*-\tilde{\boldsymbol{p}}) \tag{A1.6}$$

$$\mathrm{WD}\xrightarrow{\mathrm{P}}\sum_{i=1}^k\lambda_i\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})+\sum_{i=1}^k\lambda_i[\nabla\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})]^t(\hat{\boldsymbol{p}}_i-\tilde{\boldsymbol{p}})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k\lambda_i(\hat{\boldsymbol{p}}_i-\tilde{\boldsymbol{p}})^t[\nabla^2\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})](\hat{\boldsymbol{p}}_i-\tilde{\boldsymbol{p}}) \tag{A1.7}$$

すると　BD＝TD－WD

$$\xrightarrow{\mathrm{P}}\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{p}}^*-\tilde{\boldsymbol{p}})^t[\nabla^2\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})](\hat{\boldsymbol{p}}^*-\tilde{\boldsymbol{p}})-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k\lambda_i(\hat{\boldsymbol{p}}_i-\tilde{\boldsymbol{p}})^t[\nabla^2\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})](\hat{\boldsymbol{p}}_i-\tilde{\boldsymbol{p}}) \tag{A1.8}$$

ただし，$\hat{\boldsymbol{p}}^*=(\hat{p}_1^*,\cdots,\hat{p}_s^*)$と，$\hat{\boldsymbol{p}}_i=(\hat{p}_{1i},\cdots,\hat{p}_{si})$は観測値による推定量

$$\nabla\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})=\left\langle\frac{\partial\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})}{\partial\tilde{p}_i};\ 1\leqq i\leqq s\right\rangle,\ \ \nabla^2\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})=\left\langle\frac{\partial^2\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})}{\partial\tilde{p}_i\partial\tilde{p}_j};\ 1\leqq i\leqq s,\ 1\leqq j\leqq s\right\rangle$$

$$n'_{ji}=n_{ji}-n_{.j}\tilde{p}_j(\ j=1,\cdots,k,\ \ j=1,\cdots,s\ ) \tag{A1.9}$$

としてやると，

$$\boldsymbol{n}'^t=(n'_{11},\cdots,n'_{1s},\cdots,n'_{k1},\cdots,n'_{ks}) \tag{A1.10}$$

は，(A1.1)から(A1.5)より，帰無仮説$\mathbf{H}_0$のもとで

$$\boldsymbol{n}'\xrightarrow{\mathrm{L}}\mathrm{N}_{sk}(\mathbf{O},\ \Sigma_0) \tag{A1.11}$$

ただし，

$$\Sigma_0=\boldsymbol{M}_k\otimes\boldsymbol{V}_0\qquad(\otimes\text{はクロネッカー積}) \tag{A1.12}$$

ここで，

$$\boldsymbol{M}_k=\boldsymbol{diag}(n_{.1},n_{.2},\cdots,n_{.k})$$

$$\boldsymbol{V}_0=\langle\tilde{p}_i\delta_{ij}-\tilde{p}_i\tilde{p}_j:\ 1\leqq i\leqq s,\ 1\leqq j\leqq s\rangle$$

さてここで，以下のように行列，ベクトルを定義する。

$$\boldsymbol{b}=\nabla\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}}),$$

$$\boldsymbol{U}_1=\langle c_i=1\ ;\ 1\leqq i\leqq k\rangle\quad(k\times1)$$

$$\boldsymbol{U}_k=\langle d_{ij}=1\ ;\ 1\leqq i\leqq k,\ 1\leqq j\leqq k\rangle\quad(k\times k)$$

$$\boldsymbol{A}^-=-\nabla^2\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}})$$

すると，$n_{..}$TDと，$n_{..}$BDは(A1.6)，(A1.8)より次のように書ける。

$$n_{..}\mathrm{TD}\xrightarrow{\mathrm{P}}\alpha+\underline{\underline{(\boldsymbol{U}_1\otimes\boldsymbol{b})^t}}_{(\boldsymbol{S}^t)}\boldsymbol{n}'^t+\boldsymbol{n}'^t\underline{\underline{\left[\boldsymbol{U}_k\otimes\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{n_{..}}\boldsymbol{A}^-\right)\right]}}_{(\boldsymbol{R})}\boldsymbol{n}' \tag{A1.13}$$

$$n_{..}\mathrm{BD}\xrightarrow{\mathrm{P}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{n}'^t\left[\left(\frac{1}{n_{..}}\right)\boldsymbol{U}_k\otimes\boldsymbol{A}^-\right]\boldsymbol{n}'^t+\frac{1}{2}\boldsymbol{n}'^t\left[\boldsymbol{M}_k^{-1}\otimes\boldsymbol{A}^-\right]\boldsymbol{n}'$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{n}'^t\underline{\underline{\left[\left(\boldsymbol{M}_k^{-1}-\frac{1}{n_{..}}\boldsymbol{U}_k\right)\otimes\boldsymbol{A}^-\right]}}_{(\boldsymbol{T})}\boldsymbol{n}' \tag{A1.14}$$

一般に$\boldsymbol{Q}_1=\alpha+2\boldsymbol{S}^t\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}^t\boldsymbol{R}\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{Y}^t\boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Y}\sim\mathrm{N}(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\nu})$(ただし$\boldsymbol{\nu}$は特異行列)の時, $\boldsymbol{Q}_1$と$\boldsymbol{Q}_2$が独立に分布するための必要十分条件は, $\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{T}\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{0}$, かつ$\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{T}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{S}=0$である[7]。
ところが

$$\Sigma_0\boldsymbol{R}\Sigma_0\boldsymbol{T}\Sigma_0=[\boldsymbol{M}_k\otimes\boldsymbol{V}_0]\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{..}}\boldsymbol{U}_k\otimes\boldsymbol{A}^-\right)\right][\boldsymbol{M}_k\otimes\boldsymbol{V}_0]\left[-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{M}_k^{-1}-\frac{1}{n_{..}}\boldsymbol{U}_k\right)\otimes\boldsymbol{A}^-\right][\boldsymbol{M}_k\otimes\boldsymbol{V}_0]$$

$$=\boldsymbol{0}_{(sk\times sk)} \tag{A1.15}$$

$(\because(1/n_{..})\boldsymbol{U}_k\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{U}_k=\boldsymbol{0})$

$$\Sigma_0\boldsymbol{T}\Sigma_0\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{M}_k\otimes\boldsymbol{V}_0]\left[\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{M}_k^{-1}-\frac{1}{n_{..}}\boldsymbol{U}_k\right)\otimes\boldsymbol{A}^-\right][\boldsymbol{M}_k\otimes\boldsymbol{V}_0]\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{U}_1\otimes\boldsymbol{b})\right]$$

$$=\boldsymbol{0}_{(sk\times 1)}$$

$(\because(1/n_{..})\boldsymbol{U}_k\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{U}_1)$

APPENDIX 2 (系1の証明)

$n_{..}\mathrm{TD}=n_{..}\mathrm{WD}+n_{..}\mathrm{BD}$, また, 定理1より, $\mathrm{Cov}(n_{..}\mathrm{TD},\ n_{..}\mathrm{BD})=0$
故に,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(n_{..}\mathrm{TD},\ n_{..}\mathrm{WD})&=\mathrm{Cov}(n_{..}\mathrm{TD},\ n_{..}\mathrm{TD}-n_{..}\mathrm{BD})\\&=\mathrm{Cov}(n_{..}\mathrm{TD},\ n_{..}\mathrm{TD})-\mathrm{Cov}(n_{..}\mathrm{TD},\ n_{..}\mathrm{BD})\\&=\mathrm{Var}(n_{..}\mathrm{TD})>0\end{aligned}$$

同様に, $\mathrm{Cov}(n_{..}\mathrm{BD},\ n_{..}\mathrm{WD})=-\mathrm{Var}(n_{..}\mathrm{BD})<0$

APPENDIX 3 (定理2の証明)

(A1.11), (A1.12), (A1.14)式より, $n_{..}\mathrm{BD}$の漸近分布は,

$$n_{..}\mathrm{BD}\xrightarrow{\mathrm{L}}\sum_{i=1}^{sk}\lambda_i\chi_i^2 \tag{A3.1}$$

ただし, χ_i^2は互いに独立な自由度1のχ^2－分布, $\lambda_i(i=1,\cdots,sk)$は行列

$$\frac{1}{2}\left[\left\{\boldsymbol{M}_k^{-1}-\frac{1}{n_{..}}\boldsymbol{U}_k\right\}\otimes\boldsymbol{A}^-\right]\Sigma_0=\left[\boldsymbol{I}_k-\frac{1}{n_{..}}\boldsymbol{U}_k\boldsymbol{M}_k\right]\otimes\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{V}_0 \tag{A3.2}$$

$(\boldsymbol{I}_k;(k\times k)$単位行列)

の固有値。

ここでλ_iをλ_{lm}とおいて $\lambda_{lm}=\xi_l\eta_m(l=1,\cdots,k,\ m=1,\cdots,s)$, ただし, ξ_lは

$[I_k-(1/n..)U_kM_k]$ の l 番目に大きい固有値，η_m は $(1/2)A^-V_0$ の m 番目に小さい固有値とできる。ところが，$[I_k-(1/n..)U_kM_k]$ は，$(k-1)$ 個の固有値1と，1個の固有値0を持つ。((参考文献4)のpp. 538参照)

一方 $(1/2)A^-V_0=-(1/2)\nabla^2D(\tilde{p})V_0$ の固有値は，

$$Q=\left\langle \tilde{p}_i^{\frac{1}{2}}\delta_{ij};\ 1\leqq i\leqq s,\ 1\leqq j\leqq s\right\rangle,\quad T=\langle \delta_{ij}-\tilde{p}_i^{\frac{1}{2}}\tilde{p}_j^{\frac{1}{2}};\ 1\leqq i\leqq s,\ 1\leqq j\leqq s\rangle$$

とおくと，$-(1/2)Q^{\frac{1}{2}}\nabla^2D(\tilde{p})Q^{\frac{1}{2}}T$ の固有値と等しくなる。ところが，$D(p)$ は一次同次の条件を満たす関数であるから，$\Delta(i,\ \tilde{p})=\partial D(\tilde{p})/\partial\tilde{p}_i$，$D(\tilde{p})=\sum_{i=1}^{s}\tilde{p}_i\Delta(i,\ \tilde{p})$ を満たす。故に

$$\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial D(\tilde{p})}{\partial\tilde{p}_i}\right)\tilde{p}_i=D(\tilde{p}) \tag{A3.3}$$

(A3. 3)式を $\tilde{p}_i(1\leqq i\leqq s)$ で微分すると

$$\nabla^2D(\tilde{p})\cdot\tilde{p}=0 \tag{A3.4}$$

(A3. 4)式より

$$\Phi=\langle -(1/2)\tilde{p}_i^{\frac{1}{2}}\tilde{p}_j^{\frac{1}{2}}\ \nabla^2D(\tilde{p});\ 1\leqq i\leqq s,\ 1\leqq j\leqq s\rangle \tag{A3.5}$$

とすると，$\Phi=-(1/2)Q^{\frac{1}{2}}\nabla^2D(\tilde{p})Q^{\frac{1}{2}}T$ となり，Φ の固有値は，$(1/2)A^-V_0$ の固有値と等しくなる。さらに(A3. 4)式より，Φ の rank は $s-1$ 以下となる。故に固有値 $\eta_s=0$ とできる。故に $n..\mathrm{BD}\xrightarrow{\mathrm{L}}\sum_{i=1}^{s-1}\eta_i\chi^2_{(k-1)}$，最後に帰無仮説 H_0 のもとでは，$\hat{p}^*\xrightarrow{\mathrm{P}}\tilde{p}$ 故に $\mathrm{TD}\xrightarrow{\mathrm{P}}D(\tilde{p})$。

APPENDIX 4　(定理3の証明)

帰無仮説 H_{02} のもとで，テイラーの定理により，

$$\mathrm{BD}\xrightarrow{\mathrm{P}}\frac{1}{2}(\hat{p}..-\tilde{p})^t[\nabla^2D(\tilde{p})](\hat{p}..-\tilde{p})-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\hat{p}_{ij}-\tilde{p})^t[\nabla^2D(\tilde{p})](\hat{p}_{ij}-\tilde{p}) \tag{A4.1}$$

ただし $\hat{p}..$，$\hat{p}_{ij}$ は，$p..$ および，p_{ij} の観測値による推定量である。

$n'_{ijl}=n_{ijl}-n_{ij.}\tilde{p}_l\ (l=1,\cdots,k)$ として $n'^t=(n'_{111},\ n'_{112},\cdots,n'_{11k};\ n'_{121},\cdots,n'_{12k};\ \cdots;\ n'_{rs1},\cdots,n'_{rsk})$ とすると，

$$n...\mathrm{BD}(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2)\xrightarrow{\mathrm{P}}-\frac{1}{2}n'^t\left[U_{rs}\otimes\left(\frac{1}{n...}\right)A^-\right]n'+\frac{1}{2}n'^t\left[M_{rs}^{-1}\otimes A^-\right]n'$$

$$=\frac{1}{2}n'^t\left[\left(M_{rs}^{-1}-\frac{1}{n...}U_{rs}\right)\otimes A^-\right]n' \tag{A4.2}$$

ところが

$$n'\xrightarrow{\mathrm{L}}\mathrm{N}_{rsk}(0,\ \textstyle\sum_0) \tag{A4.3}$$

ただし

$$\textstyle\sum_0=M_{rs}\otimes V_0,\quad V_0=\langle\tilde{p}_i\delta_{ij}-\tilde{p}_i\tilde{p}_j:\ 1\leqq i\leqq k,\ 1\leqq j\leqq k\rangle$$

$$A^-=\left\langle-\frac{\partial^2D(\tilde{p})}{\partial\tilde{p}_i\partial\tilde{p}_j}:\ 1\leqq i\leqq k,\ 1\leqq j\leqq k\right\rangle,\ M_{rs}=\boldsymbol{diag}(n_{11.},\ n_{12.},\cdots,n_{21.},\ n_{22.},\cdots,n_{rs.})$$

$$U_{rs}=\langle a_{ij}=1:\ 1\leqq i\leqq rs,\ 1\leqq j\leqq rs\rangle$$

故に

$$n...\mathrm{BD}(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2)\xrightarrow{\mathrm{L}}\sum_{i=1}^{rsk}\lambda_i\chi_1^2 \tag{A4.4}$$

ここでλ_i ($i=1,\cdots,rsk$) は行列

$$\underbrace{\left(I_{rs}-\frac{1}{n_{\dots}}U_{rs}M_{rs}\right)}_{①}\otimes\underbrace{A^{-}V_0}_{②} \tag{A4.5}$$

の固有値であるが，①の固有値は，$\lambda_1=\cdots=\lambda_{rs-1}=1$，$\lambda_{rs}=0$，②の固有値は，$D(\tilde{p})$ の一次同次性の仮定より，$\nu_1,\cdots,\nu_{k-1}\neq 0$，$\nu_k=0$，あとはAPDENDIX 3と同様に証明できる。

$n_{\dots}$TDと$n_{\dots}$BD$(A_1,\ A_2)$の独立性は，APPENDIX 1とほぼ同様に証明できる。

APPENDIX 5　（定理4の証明）

帰無仮説H_{03}のもとで

$$\mathrm{BD}(A_2\,|\,A_1=i)\xrightarrow{\mathrm{P}}\frac{1}{2}(\hat{p}_{i.}-\tilde{\tilde{p}}^{[i]})^t[\nabla^2 D(\tilde{\tilde{p}}^{[i]})](\hat{p}_{i.}-\tilde{\tilde{p}}^{[i]})$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{i.}}\right)(\hat{p}_{ij}-\tilde{\tilde{p}}^{[i]})^t[\nabla^2 D(\tilde{\tilde{p}}^{[i]})](\hat{p}_{ij}-\tilde{\tilde{p}}^{[i]}) \tag{A5.1}$$

ただし，$\hat{p}_{i.}$，$\hat{p}_{ij}$はそれぞれ$p_{i.}$およびp_{ij}の観測値による推定量

$n'_{ijl}=n_{ijl}-n_{ij.}\tilde{\tilde{p}}_l^{[i]}$ ($l=1,\cdots,k$) として，$n'^t_{(i)}=(n_{i11},\ n_{i12},\cdots,n_{i1k};\ \cdots;\ n_{is1},\cdots,n_{isk})$ ($i=1,\cdots,r$) とすると

$$n_{\dots}\sum_{i=1}^{r}\lambda_{i.}\mathrm{BD}(A_2\,|\,A_1=i)\xrightarrow{\mathrm{P}}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}n'^t_{(i)}\left[U_s\otimes\frac{1}{n_{i..}}A^{-(i)}\right]n'_{(i)}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}n'^t_{(i)}[M^{-1}_{s(i)}\otimes A^{-(i)}]n'_{(i)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}n'^t_{(i)}\left[\underbrace{\left\{M^{-1}_{s(i)}-\frac{1}{n_{i..}}U_s\right\}}_{③}\otimes A^{-(i)}\right]n'_{(i)} \tag{A5.2}$$

ここで

$$A^{-(i)}=\left\langle\frac{\partial^2 D(\tilde{\tilde{p}}^{[i]})}{\partial\tilde{\tilde{p}}_l^{[i]}\partial\tilde{\tilde{p}}_m^{[i]}};\ 1\leqq l\leqq k,\ 1\leqq m\leqq k\right\rangle\ (i=1,\cdots,r)$$

$$M_{s(i)}=\mathrm{diag}(n_{i1.},\cdots,n_{is.})\ (i=1,\cdots,r)$$

$$U_s=\langle a_{ij}=1;\ 1\leqq i\leqq s,\ 1\leqq j\leqq s\rangle$$

ところが，帰無仮説H_{03}のもとで

$$n'\xrightarrow{\mathrm{L}}\mathrm{N}_{sk}(0,\ \Sigma_i) \tag{A5.3}$$

ただし

$$\Sigma_i=\mathrm{diag}(n_{i1.},\cdots,n_{is.})\otimes V_0,\quad V_0=[\tilde{\tilde{p}}_l^{[i]}\delta_{lm}-\tilde{\tilde{p}}_l^{[i]}\tilde{\tilde{p}}_m^{[i]};\ 1\leqq l\leqq k,\ 1\leqq m\leqq k]$$

さらに，$n'^t_A=(n'^t_{(1)},\ n'^t_{(2)},\cdots,n'^t_{(r)})$は

$$n'_A\xrightarrow{\mathrm{L}}\mathrm{N}_{rsk}(0,\ \Sigma_A);\ \Sigma_A=\Sigma_1\oplus\cdots\oplus\Sigma_r \tag{A5.4}$$

(A5.2)，(A5.3) また，③の固有値は$\nu_1=\cdots=\nu_{s-1}=1$，$\nu_s=0$であることから

$$n_{\dots}\left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_{i.}\mathrm{BD}(A_2\,|\,A_1=i)\right)\xrightarrow{\mathrm{L}}\sum_{i=1}^{r}\left\{\sum_{l=1}^{k-1}\lambda_l^{(i)}\chi^2_{(s-1)}\right\}$$

ただし$\lambda_l^{(i)}$は(4.9)で与えられる行列の固有値で，dispersion関数の一次同次性より(4.9)の行列のrankは$k-1$

$\left(n_{\cdots}\sum_{i=1}^{r}\lambda_{i\cdot}\mathbf{TD}(\mathbf{A}_1=i)\right.$ と $n_{\cdots}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\mathbf{BD}(\mathbf{A}_2|\mathbf{A}_1=i)$ の独立性の証明)

帰無仮説$\mathbf{H}_{03}$のもとでは

$$n_{\cdots}\sum_{i=1}^{r}\lambda_{i\cdot}\mathbf{TD}(\mathbf{A}_1=i)\xrightarrow{\mathrm{P}}\alpha+2\underbrace{[\boldsymbol{b}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{b}^{(r)}]}_{④}\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}'_{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{n}'_{(r)}\end{bmatrix}+[\boldsymbol{n}'^{t}_{(1)},\cdots,\boldsymbol{n}'^{t}_{(r)}]\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}^{(1)} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \boldsymbol{\beta}^{(r)}\end{bmatrix}}_{⑤}\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}'_{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{n}'_{(r)}\end{bmatrix}\tag{A5.5}$$

ただし

$$\boldsymbol{B}^{(i)}=[\partial\boldsymbol{D}(\tilde{\boldsymbol{p}}^{[i]})/\partial\tilde{\boldsymbol{p}}_l^{[i]};\ 1\leqq l\leqq k]\ (i=1,\cdots,r)$$
$$\boldsymbol{U}_1=[a_m=1\ ;\ 1\leqq m\leqq s]$$
$$\boldsymbol{b}^{(i)}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{U}_1\otimes\boldsymbol{B}^{(i)}]^t\ (i=1,\cdots,r)$$
$$\boldsymbol{\beta}^{(i)}=-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{U}_s\otimes\frac{1}{n_{i\cdot\cdot}}\boldsymbol{A}^{-(i)}\right]\ (i=1,\cdots,r)$$

(A5.2)より

$$n_{\cdots}\sum_{i=1}^{r}\lambda_{i\cdot}\mathbf{BD}(\mathbf{A}_2|\mathbf{A}_1=i)\xrightarrow{\mathrm{P}}[\boldsymbol{n}'^{t}_{(1)},\cdots,\boldsymbol{n}'^{t}_{(r)}]\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{(1)} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \boldsymbol{\alpha}^{(r)}\end{bmatrix}}_{⑥}\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}'_{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{n}_{(r)}\end{bmatrix}\tag{A5.6}$$

ただし

$$\boldsymbol{\alpha}^{(i)}=\frac{1}{2}\left[\left\{\boldsymbol{M}_s^{-1}-\frac{1}{n_{i\cdot\cdot}}\boldsymbol{U}_s\right\}\otimes\boldsymbol{A}^{-(i)}\right]\ (i=1,\cdots,r)\tag{A5.7}$$

今④を$\boldsymbol{b}_A^t$，⑤を$\boldsymbol{\beta}_A$，⑥を$\boldsymbol{\alpha}_A$とすると，独立性を示すには，(A5. 6)より

(i) $\sum_A\boldsymbol{\beta}_A\sum_A\boldsymbol{\alpha}_A\sum_A=\boldsymbol{0}_{(sk\times sk)}$ かつ (ii) $\sum_A\boldsymbol{\alpha}_A\sum_A\boldsymbol{b}_A=\boldsymbol{0}_{(sk\times1)}$ を示せばよい

$$\text{(i)}\ \boldsymbol{\beta}_A\sum_A\boldsymbol{\alpha}_A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}^{(1)}\sum_1\boldsymbol{\alpha}^{(1)} & & \boldsymbol{0}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{\beta}^{(r)}\sum_r\boldsymbol{\alpha}^{(r)}\end{bmatrix}(rsk\times rsk)$$

ところが

$$\boldsymbol{\beta}^{(i)}\sum_i\boldsymbol{\alpha}^{(i)}=-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{U}_s\otimes\frac{1}{n_{i\cdot\cdot}}\boldsymbol{A}^{-(i)}\right][\boldsymbol{M}_s\otimes\sum_i]\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\boldsymbol{M}_s^{-1}-\frac{1}{n_{i\cdot\cdot}}\boldsymbol{U}_s\right)\otimes\boldsymbol{A}^{-(i)}\right\}\right]$$
$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n_{i\cdot\cdot}}\left\{\boldsymbol{U}_s-\frac{1}{n_{i\cdot\cdot}}\boldsymbol{U}_s\boldsymbol{M}_s\boldsymbol{U}_s\right\}\right]\otimes[\boldsymbol{A}^{-(i)}\sum_i\boldsymbol{A}^{-(i)}]$$
$$=\boldsymbol{0}_{sk\times sk}\quad(i=1,\cdots,r)$$

$$(\because\quad\boldsymbol{U}_s-(1/n_{i\cdot\cdot})\boldsymbol{U}_s\boldsymbol{M}_s\boldsymbol{U}_s=\boldsymbol{0}_{s\times s})$$

$$\text{(ii)}\ \sum_A\boldsymbol{\alpha}_A\sum_A\boldsymbol{b}_A=\begin{bmatrix}\sum_1\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\sum_1\boldsymbol{b}^{(1)}\\ \vdots\\ \sum_r\boldsymbol{\alpha}^{(r)}\sum_r\boldsymbol{b}^{(r)}\end{bmatrix}(rsk\times1)$$

ここで

$$\textstyle\sum_i \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \sum_i \boldsymbol{b}^{(i)} = \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{M}_s\left(\boldsymbol{U}_1 - \frac{1}{n_{i..}}\boldsymbol{U}_s \boldsymbol{M}_s \boldsymbol{U}_1\right)\right] \otimes \left[\sum_i \boldsymbol{A}^{-(i)} \sum_i \boldsymbol{B}^{(i)}\right]$$

$(i = 1, \cdots, r)$

$$= \boldsymbol{0}_{sk\times 1}$$

$$(\because \quad \boldsymbol{U}_1 - (1/n_{i..})\boldsymbol{U}_s \boldsymbol{M}_s \boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{0}_{s\times 1})$$