北海道大学工学部研究報告
第129号（昭和61年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 129 (1986)

小標本における線型および2次判別関数の誤判別率について

中西寛子　河口至商
（昭和60年9月30日受理）

On the Error Rates of the Linear and Quadratic Discriminant Functions for Small Sample Sizes

Hiroko NAKANISHI and Michiaki KAWAGUCHI
(Received September 30, 1985)

Abstract

The LDF (linear discriminant function) and the QDF (quadratic discriminant function) are wellknown as the discriminant functions for classifying observations. A comparison between the performance of the LDF and QDF for multivariate normal distributions with unequal covariance matrices has been investigated. When the sample sizes are moderate, the error rates for the QDF are smaller than those for the LDF, and this tendency become clear with increasing differences of covariance matrices between two populations. However, because greater numbers of parameters are to be estimated, for the small sample sizes, we sometimes find cases where the QDF does not have a superior performance compared to the LDF even if the differences of covariance matrices are large.

In this paper, the asymptotic expansions of the error rates for the LDF and QDF are obtained by the "studentization" method for two populations with proportional covariance matrices-the covariance matrix of the second population is a constant multiplier of the covariance matrix of the first one. From these expansions, we compare the expected error rates between two discriminant functions for the sample sizes and several combinations of the covariance matrices.

1. はじめに

観測値がいくつかの母集団のうちどの1つに属していたのかを知るため，一般に，線型判別関数（Linear discriminant function）や2次判別関数（Quadratic discriminant function）が用いられる。両関数の誤判別率の比較が多くの文献に見られる。Marks と Dunn[1] や Wahl と Kronmal[2] は母集団が2個で各母集団が多変量正規分布に従う場合について両関数の比較を行った。分散共分散行列が異なるとき，十分な標本においてはQDFの方がLDFを用いるよりも誤判別率が小さ

情報工学専攻　情報数理工学第一講座

く，その傾向は2母集団間の分散共分散行列の差違が大きくなるほど顕著になることが彼らによって示された。また，Nakanishi と Sato[3] によって正規性が失われた場合でも本傾向が見られることがわかった。しかしながら，QDF を用いる場合，推定すべき未知母数が多いため小標本においては LDF の方が小さい誤判別率を持つことがある。その例が Marks 等によって示されている。

本研究は両関数の誤判別率を標本数に対して推定，比較することを目的としている。推定方法は Hartley[4] と Welch[5] の 'studentization' 法によって得られる誤判別率の漸近展開を用いる。ただし，ここで扱う母集団は2個で多変量正規分布に従い，一方の分散共分散行列が他方のそれに比例するものとする。

2. 判 別 関 数

p 変量観測値 $\boldsymbol{x}$ を母集団 π_1 または π_2 のどちらかに判別することを考える。母集団 π_i は平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}_i$，分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_i$ $(i=1,2)$ を待つ多変量正規分布である。事前に母集団 π_i より n_i 個の観測値 $\boldsymbol{x}_{ij}$ $(i=1,2,\ j=1,\cdots,n_i)$ が得られている。このとき，LDF と QDF は各々，次の様に定義される。

$$L(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{x}-(\bar{\boldsymbol{x}}_1+\bar{\boldsymbol{x}}_2)/2\}'S^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}_1-\bar{\boldsymbol{x}}_2),$$

$$Q=(\boldsymbol{x})=\{\ln(|S_2|/|S_1|)-(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}_1)'S^{-1}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}_1)+(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}_2)S_2^{-1}(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}_2)\}/2,$$

ここで，

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i=\sum_j \boldsymbol{x}_{ij}/n_i,$$

$$S_i=\sum_j(\boldsymbol{x}_{ij}-\bar{\boldsymbol{x}}_i)(\boldsymbol{x}_{ij}-\bar{\boldsymbol{x}}_i)'/(n_i-1)\quad(i=1,2),$$

$$S=\{(n_1-1)S_1(n_2-1)S_2\}/(n_1+n_2-2)。$$

もし $n_1=n_2=n$ ならば $S=(S_1+S_2)/2$ である。LDF を用いた判別法とは，ある与えられた定数 h（判別点と呼ぶ）に対し，$L(\boldsymbol{x})>h$ ならば観測値 $\boldsymbol{x}$ を母集団 π_1 に，$L(\boldsymbol{x})<h$ ならば母集団 π_2 に判別することである。QDF についても同様の方法を用いる。

一般性を失わず次の仮定がおける。

$$\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{\mu}_2=\boldsymbol{\mu}_0=(D,0\cdots,0),\quad (D>0),\ \boldsymbol{\Sigma}_1=\boldsymbol{I}\ ,$$

ここでは，$\boldsymbol{I}$ は単位行列である。また，本研究は以下の仮定のもとで議論を進める。

$$\boldsymbol{\Sigma}_2=\lambda\boldsymbol{\Sigma}_1\ (\lambda>1),\quad n_1=n_2=n。$$

このとき，標本数 n に対し各統計量は各々，$\bar{\boldsymbol{x}}_1\to\boldsymbol{0}$，$\bar{\boldsymbol{x}}_2\to\boldsymbol{\mu}_0$，$S_1\to\boldsymbol{I}$，$S_2\to\lambda\boldsymbol{I}$，つまり，$S\to(1+\lambda)/2\boldsymbol{I}$ に確率収束する。このことより，観測値 $\boldsymbol{x}$ が母集団 π_1 に属する場合，関数 $L(\boldsymbol{x})$ の極限分布は正規分布 $N(D^2/(1+\lambda),\ 4D^2/(1+\lambda)^2)$ になり，母集団 π_2 に属する場合，$N(-D^2/(1+\lambda),\ 4\lambda D^2/(1+\lambda)^2)$ になることがわかる。また，関数 $U(\boldsymbol{x})$ を

$$U(\boldsymbol{x})=\{p\ln\lambda+D^2/(\lambda-1)-2Q(\boldsymbol{x})\}\lambda/(\lambda-1)$$

と定義すると，関数 $U(\boldsymbol{x})$ の極限分布は，観測値 $\boldsymbol{x}$ が母集団 π_1 に属する場合は $\chi_p^2(\alpha^2D^2)$ に，母集団 π_2 に属する場合は $\lambda\chi_p^2(\lambda\alpha^2D^2)$ になることがわかる。ここで，$\alpha=1/(\lambda-1)$，$\chi_p^2(\beta)$ は自由度 p，非心度 β を持つ非心 χ^2 分布を意味する。

任意の定数 c に対し，観測値 $\boldsymbol{x}$ が母集団 π_1 に属する場合の誤判別率は LDF を用いると

$$P_{L1}(c\,;D,\ \lambda)=\mathrm{pr}[L(\boldsymbol{x})<D^2/(1+\lambda)+2cD/(1+\lambda)\,|\,\pi_1]$$

と書け，母集団 π_2 に属する場合は

$$P_{L2}(c\,;D,\ \lambda)=\mathrm{pr}[L(\boldsymbol{x})>-D^2/(1+\lambda)+2\sqrt{\lambda}cD/(1+\lambda)\,|\,\pi_2]$$

と書ける。QDF を用いたときの各々の誤判別率は

$$P_{Q1}(C\,;D,\ \lambda)=\mathrm{pr}[Q(\boldsymbol{x})<\{p\ln\lambda+D^2/(\lambda-1)-C(\lambda-1)/\lambda\}/2\mid\pi_1],$$

$$P_{Q2}(C\,;D,\ \lambda)=\mathrm{pr}[Q(\boldsymbol{x})>\{p\ln\lambda+D^2/(\lambda-1)-C(\lambda-1)/\lambda\}/2\mid\pi_2]$$

と書ける。

本研究の目的は各誤判別率 P_{L1}, P_{L2}, P_{Q1}, P_{Q2} の漸近展開を n^{-1} の位数まで求め，標本数に対する誤判別率を推定することである。Okamoto[6] は $\lambda=1$ のときの P_{L1} と P_{L2} の漸近展開を求め，Han[7] は P_{Q1} と P_{Q2} の漸近展開を λ と $\boldsymbol{\Sigma}_1$ が既知の場合について調べている。さらに，Han[8] は λ が既知で $\boldsymbol{\Sigma}_1$ が未知のとき，または，λ が未知で $\boldsymbol{\Sigma}_1$ が既知のときについても考察している。我々は $\boldsymbol{\Sigma}_1$ と $\boldsymbol{\Sigma}_2$ が未知である場合の仮定に立って研究を進める。

3. LDF における誤判別率の漸近展開

誤判別率 P_{L1} と P_{L2} の漸近展開は各々，定理1および定理2に示したようになる。

定理 1

$$P_{L1}(c\,;D,\ \lambda)=[1+A(d\,;D,\ \lambda)]\Phi(c)+O_2,$$

ここで，$\Phi(c)$は正規分布 $N(0,1)$の分布関数，d は微分作用素 d/dc, O_2 は n^{-1} に関する2乗以上の項を示す。また，

$$A(d\,;D,\ \lambda)=(2nD^2)^{-1}A_1(d\,;D)+\lambda(2nD^2)^{-1}A_2(d\,;D)+(1+\lambda^2)\{4m(\lambda+1)^2\}^{-1}\times A_3(d\,;D),$$

$$A_1(d\,;D)=d^4+p(d^2+Dd),$$

$$A_2(d\,;D)=(d^2-Dd)^2+p(d^2-Dd),$$

$$A_3(d\,;D)=(2d^2-Dd)^2+2(p+1)(3d^2-Dd),$$

ただし，$m=n-1$ である。

定理 2

$$P_{L2}(c\,;D,\ \lambda)=1-[1+B(d\,;D,\ \lambda)]\Phi(c)+O_2,$$

ここで，

$$B(d\,;D,\ \lambda)=(2nD^2)^{-1}B_1(d\,;D)+\lambda(2nD^2)^{-1}B_2(d\,;D)+(1+\lambda^2)\{4m(\lambda+1)^2\}^{-1}$$

$$B_3(d\,;D),$$

$$B_1(d\,;D)=A_2(d\,;-D/\sqrt{\lambda}),$$

$$B_2(d\,;D)=A_1(d\,;-D/\sqrt{\lambda}),$$

$$B_3(d\,;D)=A_3(d\,;-D/\sqrt{\lambda})。$$

証明　これらの定理は Okamoto によって導かれた定理の証明と同様に示すことができる。ここでは定理1のみを証明するが定理2も同じである。

関数

$$W(\boldsymbol{x})=(1+\lambda)D^{-1}\{L(\boldsymbol{x})-D^2/(1+\lambda)\}/2$$

を考える。関数 W の特性関数は $\phi(t)=E\{\exp(itW)\mid\pi_1\}$となりこれは条件付き分布の性質より

$$\phi(t)=E^{\bar{x}_1,\bar{x}_2,S}[E\{exp(itW)\mid\bar{\boldsymbol{x}}_1,\bar{\boldsymbol{x}}_2,\bar{S}\mid\pi_1\}]$$

と書き直すことができる。さらに，

$$\phi(t)=E^{\bar{x}_1,\bar{x}_2,S}\ \Psi(\bar{\boldsymbol{x}}_1,\bar{\boldsymbol{x}}_2,S)$$

とおくと，

$$(1)\quad \Psi(\bar{\boldsymbol{x}}_1,\bar{\boldsymbol{x}}_2,S)=\exp\{it(1+\lambda)D^{-1}\{\hat{\mu}-D^2/(1+\lambda)\}/2-t^2\{(1+\lambda)/2\}^2D^{-2}\hat{\sigma}^2/2]$$

となる。ここで,

$\hat{\mu}=\hat{\mu}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, S)=-(\bar{x}_1+\bar{x}_2)'S^{-1}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)/2,$

$\hat{\sigma}^2=\hat{\sigma}^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, S)=(\bar{x}_1-\bar{x}_2)'S^{-2}(\bar{x}_1-\bar{x}_2),$

である。関数 Ψ のテイラー展開を点 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, S)=(\mathbf{0}, \boldsymbol{\mu}_0, (1+\lambda)/2\boldsymbol{I})$ において考えると次の式が得られる。

$$\Psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, S)=\exp[\bar{x}_1'\partial_1+(\bar{x}_2-\boldsymbol{\mu}_0)'\partial_2+\mathrm{tr}\{S-(1+\lambda)/2\boldsymbol{I}\}\boldsymbol{\partial}]\Psi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma})|_0,$$

ここで,

$$\partial_k=(\partial_{ki})\ (i=1,\cdots,p,\ k=1,\ 2),\ \partial_{ki}=\frac{\partial}{\partial\mu_{ki}},$$

$$\boldsymbol{\partial}=(\partial_{ij})\ (i,\ j=1,\cdots,p),\ \partial_{ij}=\partial_{ji}=(1+\delta_{ij})/2\frac{\partial}{\partial\sigma_{ij}}\ (i\leqq j),$$

μ_{ki} はベクトル $\boldsymbol{\mu}_k(k=1,2)$ の σ_{ij} は対称行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の要素である。δ_{ij} はクロネッカーデルタで $|_0$ は点 $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\mu}_0, (1+\lambda)/2\boldsymbol{I})$ での値を示す。結局,

(2) $\phi(t)=\Theta\Psi(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma})|_0$

が得られる。ここで, Θ は微分作用素で

$$\Theta=E^{\bar{x}_1, \bar{x}_2, S}\exp[\bar{x}_1'\partial_1+(\bar{x}_2-\boldsymbol{\mu}_0)'\partial_2+\mathrm{tr}\{S-(1+\lambda)/2\boldsymbol{I}\}\boldsymbol{\partial}]$$

となる。$\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $(n-1)S_1$, $(n-1)S_2$ が独立に $N(\mathbf{0}, n^{-1}\boldsymbol{I})$, $N(\boldsymbol{\mu}_0, n^{-1}\lambda\boldsymbol{I})$, $W_p(n-1, \boldsymbol{I})$, $W_p(n-1, \lambda\boldsymbol{I})$ に従う。ただし, $W_p(n, \boldsymbol{\Sigma})$ は自由度 n, 分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ を持つウィッシャート分布である。各分布に対して積率母関数を用いると,

$$\begin{aligned}(3)\quad \Theta&=\exp[(2n)^{-1}\partial_1'\partial_1+\lambda(2n)^{-1}\partial_1'\partial_2-(1+\lambda)/2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial})-(n-1)\ln|\boldsymbol{I}-(n-1)^{-1}\boldsymbol{\partial}|/2\\&\quad-(n-1)\ln|\boldsymbol{I}-\lambda(n-1)^{-1}\boldsymbol{\partial}|/2]\\&=1+(2n)^{-1}\partial_1'\partial_1+\lambda(2n)^{-1}\partial_2'\partial_2+(n-1)^{-1}(1+\lambda^2)/4\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\partial}^2)+O_2\end{aligned}$$

となり, (1), (2), (3)より関数 $\phi(t)$ は次の様に表現できる。

$$\phi(t)=\sum_{r=0}^{4}a_r(-it)^r\exp(-t^2/2)+O_2$$

フーリエ変換を用いると定理 1 が導かれる。

4. QDF における誤判別率の漸近展開

誤判別率 P_{Q1} と P_{Q2} の漸近展開は定理 3, 定理 4 によって与えられる。

定理 3

$$P_{Q1}(c\ ;\ D,\ \lambda)=1-[G_p(c)+\sum_{i=0}^{4}A_iG_{p+2i}(c)]+O_2,$$

ここで, $G_p(x)$ は非心 χ^2 分布 $\chi_p^2(\alpha^2D^2)$ の分布関数である。また,

$$\begin{aligned}A_0&=[n^{-1}p+\lambda n^{-1}p+m^{-1}\{4\alpha(\alpha+1)+(p+1)\}D^2]\alpha(\alpha+1)d\\&\quad+[n^{-1}2\alpha^2D^2+\lambda n^{-1}2\alpha^2D^2+m^{-1}\{(\alpha^2D^2-p)^2+(\alpha(\alpha+1)D^2-p)^2\}^2](\alpha+1)^2d^2,\\A_1&=-[n^{-1}p(\alpha+1)^2+\lambda n^{-1}p\alpha^2+m^{-1}\{4\alpha^2(\alpha+1)(3\alpha+2)D^2+p(p+1)\}]d\\&\quad+[n^{-1}(-4\alpha^2(\alpha+1)D^2)+\lambda n^{-1}(-4\alpha^3D^2)+m^{-1}2\{(\alpha+1)(\alpha^2D^2-p)(p-2\alpha^2D^2)+\alpha\\&\quad(\alpha(\alpha+1)D^2-p)(p-2\alpha(\alpha+1)D^2)\}](\alpha+1)d^2,\\A_2&=m^{-1}\{4(\alpha+1)(2\alpha+1)-(p+1)\}\alpha^2D^2d\\&\quad+[n^{-1}2\alpha^2(\alpha+1)^2D^2+\lambda n^{-1}2\alpha^4D^2+m^{-1}[(\alpha+1)^2\{2p+(p-2\alpha^2D^2)^2+2(\alpha^2D^2-p)\alpha^2\\&\quad D^2\}+\alpha^2\{2p+(p-2\alpha(\alpha+1)D^2)^2+2\alpha(\alpha+1)(\alpha(\alpha+1)D^2-p)D^2\}]]d^2,\end{aligned}$$

$A_3 = m^{-1}2\{(\alpha+1)^2(2+p-2\alpha^2D^2)+\alpha^2(2+p-2\alpha(\alpha+1)D^2)\}\alpha^2D^2d^2,$

$A_4 = m^{-1}\{(\alpha+1)^2+\alpha^2\}\alpha^4D^4d^2$。

定理 4

$$P_{Q2}(c\,;D,\ \lambda)=H_p(c/\lambda)+\sum_{i=0}^{4}B_iH_{p+2i}(c/\lambda)+O_2,$$

ここで，$H_p(x)$は非心χ^2分布$\chi^2_p(\lambda\alpha^2D^2)$の分布関数である。また，

$$B_0=[n^{-1}p+\lambda n^{-1}p+m^{-1}\{4\alpha(\alpha+1)+(p+1)\}D^2\}\alpha^2d$$
$$+[n^{-1}2\alpha^2D^2+\lambda n^{-1}2\alpha^2D^2+m^{-1}\{\alpha^2D^2-p)^2+(\alpha(\alpha+1)D^2-p)^2\}]\alpha^2d^2,$$

$$B_1=-[n^{-1}p\alpha(\alpha+1)+n^{-1}p\alpha^2+m^{-1}\{4\alpha^2(\alpha+1)\ (3\alpha+1)D^2+p(p+1)\}]d$$
$$+[n^{-1}(-4\alpha^2(\alpha+1)D^2)+\lambda n^{-1}(-4\alpha^3D^2)+m^{-1}2\{(\alpha+1)\ (\alpha^2D^2-p)\ (p-2\alpha^2D^2)+\alpha$$
$$(\alpha(\alpha+1)D^2-p)\ (p-2\alpha(\alpha+1)D^2)\}]\alpha d^2,$$

$$B_2=m^{-1}\{4\alpha(2\alpha+1)-(p+1)\}\alpha(\alpha+1)D^2d$$
$$+[n^{-1}2\alpha^2(\alpha+1)^2D^2+\lambda n^{-1}2\alpha^4D^2+m^{-1}[(\alpha+1)^2\{2p+(p-2\alpha^2D^2)^2+2(\alpha^2D^2-p)\alpha^2$$
$$D^2\}+\alpha^2\{2p+(p-2\alpha(\alpha+1)D^2)^2+2\alpha(\alpha+1)\ (\alpha(\alpha+1)D^2-p)D^2\}]]d^2,$$

$$B_3=m^{-1}2\{(\alpha+1)^2(2+p-2\alpha^2D^2)+\alpha^2(2+p-2\alpha(\alpha+1)D^2)\}\alpha(\alpha+1)D^2d^2,$$

$$B_4=m^{-1}\{(\alpha+1)^2+\alpha^2\}\alpha^2(\alpha+1)^2D^4d^2$$

証明　Hanの研究を参照することによってこれらの定理が導かれた。ここでは定理3のみを証明する。

関数Uの特性関数

$$\phi(\mathrm{t})=E^{\bar{x}_1,\bar{x}_2,S_1,S_2}[E\{\exp(itU)|\bar{\boldsymbol{x}}_1,\bar{\boldsymbol{x}}_2,\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2|\pi_1\}]$$

を次の様に書き直す。

$$\phi(t)=E^{\bar{x}_2,\bar{x}_1,S_1,S_2}\Psi(\bar{\boldsymbol{x}}_1,\bar{\boldsymbol{x}}_2,\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2)。$$

このとき，

(4)　$\Psi(\bar{\boldsymbol{x}}_1,\bar{\boldsymbol{x}}_2,\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2)$

$$=\exp[it\lambda/(\lambda-1)\{p\ln\lambda+D^2/(\lambda-1)-\ln(|S_2|/|S_1|)$$
$$-\sum_{j=1}^{p}\frac{h_{1j}\ h_{2j}}{h_{1j}-h_{2j}}(\bar{x}_{1j}-\bar{x}_{2j})^2\}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}\ln(1-2\,it\frac{\lambda(h_{1j}-h_{2j})}{\lambda-1})$$
$$-\sum_{j=1}^{p}\frac{\lambda it(h_{1j}-h_{2j})/\lambda-1)}{1-2\,it\lambda(h_{1j}-h_{2j})/(\lambda-1)}\left(\frac{h_{1j}\bar{x}_{1j}-h_{2j}\bar{x}_{2j}}{h_{1j}-h_{2j}}\right)^2],$$

ここで，$\bar{x}_{kj}(k=1,\ 2,\ j=1,\ \cdots,\ p)$はベクトル$\bar{\boldsymbol{x}}_k$の要素で$h_{kj}$は$S_k^{-1}$の固有値である。大きな$n$に対して$\boldsymbol{M}'\boldsymbol{S}_k^{-1}\boldsymbol{M}\fallingdotseq\boldsymbol{H}_k(k=1,2)$を満たす$p\times p$直交行列$\boldsymbol{M}$が存在すると仮定する。ただし，$\boldsymbol{H}_k$は$h_{kj}$の対角行列である。

関数Ψの展開は次の式で表される。

$\Psi(\bar{\boldsymbol{x}}_1,\bar{\boldsymbol{x}}_2,\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2)$

$$=\exp[\bar{\boldsymbol{x}}_1'\boldsymbol{\partial}_1+(\bar{\boldsymbol{x}}_2-\boldsymbol{\mu}_p)'\boldsymbol{\partial}_2+\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{I})\boldsymbol{\partial}^1+\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_2-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{\partial}^2]\,\Psi(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\Sigma}_1,\boldsymbol{\Sigma}_2)|_0,$$

ここで，

$$\boldsymbol{\partial}^k=(\partial^k_{ij})\ \ (i,j=1,\cdots,p,\ \ k=1,2),\ \ \partial^k_{ij}=\partial^k_{ji}=(1+\delta_{ij})/2\frac{\partial}{\partial\sigma_{kij}}\ \ (i\leqq j),$$

σ_{kij}は対称行列$\boldsymbol{\Sigma}_k(k=1,2)$の要素で$|_0$は点$(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\mu}_0,\boldsymbol{I},\lambda\boldsymbol{I})$での値を示す。結局，

(5)　$\phi(t)=\Theta\Psi(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\Sigma}_1,\boldsymbol{\Sigma}_2)|_0$

が得られる。ここで,

(6) $\Theta=E^{\bar{x}_1,\bar{x}_2,S_1,S_2}\exp[\bar{x}_1'\partial_1+(\bar{x}_2-\mu_0)'\partial_2+\mathrm{tr}(S_1-I)\partial^1+\mathrm{tr}(S_2-\lambda I)\partial^2]$

$$=1+(2n)^{-1}\partial_1'\partial_1+\lambda(2n)^{-1}\partial_2'\partial_2+(n-1)^{-1}\mathrm{tr}(\partial^{12})+(n-1)^{-1}\lambda^2\mathrm{tr}(\partial^{22})+O_2$$

となる。(4), (5), (6)より次の表現

$$\phi(t)=\sum_{r=0}^{2}\{a_r(-it)^r+b_r(-it)^r/(1-2it)+c_r(-it)^r/(1-2it)^2+d_r(-it)^r/(1-2it)^3$$
$$+e_r(-it)^r/(1-2it)^4\}\{(1-2it)^{-p/2}+\exp(\alpha^2D^2it/(1-2it))\}+O_2$$

が得られ, フーリエ変換を用いると定理3が導かれる。

5. 数値例とまとめ

変数 p, D^2, λ に適当な値を入れて計算した結果を Table 1-a と Table 1-b に示した。ただし,

Table 1-a. The principal term and coefficients of n^{-1} and m^{-1} for LDF.

p	D^2	λ	principal term P_{L1}	principal term P_{L2}	coefficient of n^{-1} P_{L1}	coefficient of n^{-1} P_{L2}	coefficient of m^{-1} P_{L1}	coefficient of m^{-1} P_{L2}
1	1	2	0.3085	0.3618	0.0660	0.0248	0.0	0.0
		3		0.3864	0.0880	0.0184	0.0	0.0
		4		0.4013	0.1100	0.0151	0.0	0.0
	2	2	0.2398	0.3085	0.0824	0.0330	0.0	0.0
		3		0.3416	0.1099	0.0250	0.0	0.0
		4		0.3618	0.1373	0.0207	0.0	0.0
	3	2	0.1932	0.2702	0.0890	0.0380	0.0	0.0
		3		0.3085	0.1187	0.0293	0.0	0.0
		4		0.3325	0.1484	0.0246	0.0	0.0
	4	2	0.1587	0.2398	0.0907	0.0412	0.0	0.0
		3		0.2819	0.1210	0.0325	0.0	0.0
		4		0.3085	0.1512	0.0275	0.0	0.0
2	1	2	0.3085	0.3618	0.1540	0.3561	0.0489	0.0368
		3		0.3864	0.0880	0.4603	0.0550	0.0345
		4		0.4013	0.0220	0.5468	0.0599	0.0329
	2	2	0.2398	0.3085	0.1373	0.2531	0.0610	0.0489
		3		0.3416	0.1099	0.3247	0.0687	0.0468
		4		0.3618	0.0824	0.3851	0.0747	0.0451
	3	2	0.1932	0.2702	0.1286	0.2068	0.0660	0.0563
		3		0.3085	0.1187	0.2641	0.0742	0.0550
		4		0.3325	0.1088	0.3129	0.0807	0.0535
	4	2	0.1587	0.2398	0.1210	0.1785	0.0672	0.0610
		3		0.2819	0.1210	0.2275	0.0756	0.0609
		4		0.3085	0.1210	0.2696	0.0823	0.0599
4	1	2	0.3085	0.3618	0.3301	1.0186	0.1467	0.1104
		3		0.3864	0.0880	1.3440	0.1650	0.1036
		4		0.4013	−0.1540	1.6101	0.1796	0.0986
	2	2	0.2398	0.3085	0.2472	0.6931	0.1831	0.1467
		3		0.3416	0.1099	0.9241	0.2060	0.1405
		4		0.3618	−0.0275	1.1138	0.2241	0.1352
	3	2	0.1932	0.2702	0.2078	0.5443	0.1979	0.1688
		3		0.3085	0.1187	0.7335	0.2226	0.1650
		4		0.3325	0.0297	0.8897	0.2422	0.1604
	4	2	0.1587	0.2398	0.1815	0.4531	0.2016	0.1831
		3		0.2819	0.1210	0.6174	0.2269	0.1828
		4		0.3085	0.0605	0.7536	0.2468	0.1796
8	1	2	0.3085	0.3618	0.6821	2.3436	0.3423	0.2576
		3		0.3864	0.0880	3.1114	0.3851	0.2416
		4		0.4013	−0.5061	3.7368	0.4190	0.2301
	2	2	0.2398	0.3085	0.4669	1.5733	0.4272	0.3423
		3		0.3416	0.1099	2.1228	0.4806	0.3278
		4		0.3618	−0.2472	2.5714	0.5229	0.3154
	3	2	0.1932	0.2702	0.3661	1.2194	0.4617	0.3938
		3		0.3085	0.1187	1.6723	0.5194	0.3851
		4		0.3325	−0.1286	2.0431	0.5651	0.3744
	4	2	0.1587	0.2398	0.3025	1.0024	0.4705	0.4272
		3		0.2819	0.1210	1.3973	0.5293	0.4265
		4		0.3085	−0.0605	1.7218	0.5759	0.4190

Table 1-b. The principal term and coefficients of n^{-1} and m^{-1} for QDF.

			principal term		coefficient of n^{-1}		coefficient of m^{-1}	
p	D^2	λ	P_{Q1}	P_{Q2}	P_{Q1}	P_{Q2}	P_{Q1}	P_{Q2}
1	1	2	0.2027	0.4517	0.0912	0.0776	3.5748	−1.7867
		3	0.1675	0.4720	0.2819	0.0137	0.7725	−0.2642
		4	0.1512	0.4588	0.2493	0.0468	0.4066	−0.1417
	2	2	0.1824	0.3597	0.0106	0.1021	4.9755	−2.3372
		3	0.1495	0.4083	0.1761	0.0235	1.1391	−0.3678
		4	0.1352	0.4156	0.2188	0.0224	0.5471	−0.1440
	3	2	0.1621	0.2988	0.0320	0.0812	5.9031	−2.7248
		3	0.1361	0.3552	0.1092	0.0425	1.3409	−0.3968
		4	0.1229	0.3760	0.1786	0.0208	0.6544	−0.1519
	4	2	0.1437	0.2540	0.0479	0.0682	6.4651	−2.9673
		3	0.1247	0.3116	0.0784	0.0516	1.4672	−0.3944
		4	0.1130	0.3404	0.1440	0.0255	0.7260	−0.1506
2	1	2	0.2052	0.4036	0.4178	0.1356	3.4545	−1.6005
		3	0.1657	0.3765	0.3686	0.1416	1.0116	−0.4494
		4	0.1406	0.3409	0.2970	0.1354	0.7597	−0.4045
	2	2	0.1791	0.3318	0.2528	0.1372	4.7920	−2.1286
		3	0.1465	0.3342	0.3126	0.1042	1.2326	−0.4149
		4	0.1269	0.3133	0.2797	0.1054	0.7897	−0.3209
	3	2	0.1576	0.2796	0.1958	0.1244	5.5777	−2.4294
		3	0.1314	0.2971	0.2595	0.0915	1.3821	−0.3927
		4	0.1154	0.2877	0.2564	0.0880	0.8204	−0.2641
	4	2	0.1392	0.2395	0.1680	0.1111	6.0512	−2.6129
		3	0.1189	0.2650	0.2190	0.0856	1.4756	−0.3672
		4	0.1056	0.2642	0.2326	0.0775	0.8433	−0.2205
4	1	2	0.1957	0.3400	0.6739	0.3384	3.7426	−1.8885
		3	0.1406	0.2719	0.4451	0.2555	1.8725	−1.1556
		4	0.1062	0.2196	0.3305	0.1892	1.5882	−1.0205
	2	2	0.1688	0.2884	0.5130	0.2646	4.7090	−2.0838
		3	0.1255	0.2458	0.4043	0.2096	1.8389	−0.9341
		4	0.0972	0.2039	0.3125	0.1658	1.4891	−0.8618
	3	2	0.1476	0.2474	0.4101	0.2256	5.2563	−2.1899
		3	0.1128	0.2223	0.3632	0.1793	1.8079	−0.7707
		4	0.0892	0.1893	0.2935	0.1473	1.4044	−0.7304
	4	2	0.1299	0.2143	0.3420	0.1971	5.5626	−2.2387
		3	0.1020	0.2013	0.3257	0.1578	1.7710	−0.6422
		4	0.0821	0.1757	0.2745	0.1324	1.3293	−0.6200
8	1	2	0.1675	0.2619	0.8891	0.5877	5.6419	−3.6872
		3	0.0954	0.1649	0.4715	0.3078	3.7111	−2.6328
		4	0.0587	0.1090	0.2954	0.1811	2.8082	−1.9190
	2	2	0.1452	0.2279	0.7482	0.4677	5.7266	−3.1449
		3	0.0863	0.1509	0.4344	0.2707	3.3799	−2.2316
		4	0.0544	0.1020	0.2788	0.1661	2.5951	−1.7122
	3	2	0.1272	0.1991	0.6333	0.3911	5.7091	−2.7616
		3	0.0784	0.1381	0.3992	0.2405	3.0910	−1.8966
		4	0.0504	0.0953	0.2628	0.1527	2.4016	−1.5279
	4	2	0.1121	0.1748	0.5423	0.3357	5.6180	−2.4631
		3	0.0713	0.1265	0.3664	0.2153	2.8357	−1.6143
		4	0.0468	0.0891	0.2475	0.1408	2.2252	−1.3633

判別点 c は0とした。すなわち，誤判別率 P_{L1} に対して $c=-D/2$, P_{L2} に対して $c=D/(2\sqrt{\lambda})$, P_{Q1} および P_{Q2} に対して $c=\lambda\{p\ln\lambda+D^2/(\lambda-1)\}/(\lambda-1)$である。Table 1から次のことがわかる。

1) P_{Q1} と P_{Q2} の主項の平均は常に P_{L1} と P_{L2} のそれよりも小さい。

2) 多くの場合, P_{Q1} と P_{Q2} に対する n^{-1} と m^{-1} の係数の合計は P_{L1} と P_{L2} に対するものよりも大きい。

従って，$P_L=(P_{L1}+P_{L2})/2$, $P_Q=(P_{Q1}+P_{Q2})/2$ とおくと，$P_L=P_Q$ となる値 N が変数 p, D^2, λ に対するいくつかの組み合わせにおいて存在する。これは標本数 n が値 N よりも小さいときはたとえ分散共分散行列が異なっていても LDF を用いた方が良いことを意味する。Table 2 は Table 1-a と Table 1-b を比較し値 N を推定したものである。値 N が10よりも小さい場合は推定誤差が大きくなると思われるので N が10以上のみを示した。

Table 2. The expected sample size N such that $P_L = P_Q$

p	D^2	λ	N	p	D^2	λ	N
1	1	2	117.5	2	2	2	69.4
		3	13.3		3	2	116.2
	2	2	426.2			3	12.4
		3	36.6		4	2	169.6
		4	10.4			3	17.4
	3	2	1314.6	4	1	2	10.6
		3	91.9		2	2	24.5
		4	20.7		3	2	38.8
	4	2	4918.9		4	2	53.5
		3	245.4	8	3	2	12.5
		4	42.0		4	2	17.6
2	1	2	30.4				

Table 2 より変量 p が増すにつれ値 N が減少する傾向がわかる。この傾向は変量が多くなるほど LDF と QDF の主項の平均の差が大きくなるために生じたのであって変量 p と値 N の関係を直接説明していない。LDF と QDF の主項の平均の差を一定にして値 N を比較すると，変量 p が増すほど値 N が大きくなることがわかる。例として $p=1$, $D^2=1$, $\lambda=3$ と $p=4$, $D^2=4$, $\lambda=2$ について示す。前者の主項の平均の差は約 0.028$(=\{(0.3085+0.3865)-(0.1675+0.4720)\}/2)$ で後者は約 0.027$(=\{(0.1587+0.2398)-(0.1299+0.2143)\}/2)$ であり，値 N は各々，13.3 と 53.5 である。つまり，標本数が 40 程度の場合，前者では QDF を用いた方がよいが後者では LDF を用いることが望ましく変量が多い場合に QDF を用いるにはやはり多くの標本が必要であることを示している。

母集団の関係において変数 λ (>1) が小さいならば当然 LDF が良い。λ が大きいとき，一般に，QDF を用いるべきであると言われているが，十分な標本が得られないときは LDF を用いた方が良い場合がある。本研究ではたとえ変数 λ が大きくとも変量 p や変数 D^2 が大きい場合は標本数を考慮して LDF と QDF の使用を決定すべきであることを明示した。

参 考 文 献

1) Marks, S. and Dunn, O. J.: J. Amer. Statist. Assoc., **69** (1974), p. 555～559
2) Wahl, P. W. and Kronmal, R. A.: Biometrics, **33** (1977), p. 479～484
3) Nakanishi, H. and Sato, Y.: Commun. Statist. -Theor. Meth., **14** (1985), 5, p. 1181～1200
4) Hartley, H. O.: J. Roy. Statist. Soc. Suppl., **5** (1938), p. 80～88
5) Welch, B. L.: Biometrika, **34** (1947), p. 28～35
6) Okamoto, M.: Ann. Math. Statist., **34** (1963), p. 1286～1301
7) Han, C. P.: Ann. Math. Statist., **40** (1969), p. 979～985
8) Han, C. P.: Ann. Inst. Statist. Math., **26** (1974), p. 127～133