



Title	簡単な渦モデルによる大気拡散の計算機シミュレーション
Author(s)	石崎, 健二; Ishizaki, Kenji
Citation	北海道大學工学部研究報告, 130, 137-144
Issue Date	1986-03-25
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41971">https://hdl.handle.net/2115/41971</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	130_137-144.pdf



## 簡単な渦モデルによる大気拡散の計算機シミュレーション

石崎 健二\*

(昭和60年11月20日受理)

### A Computer Simulation of Atmospheric Dispersion based on a Simple Eddy Model

Kenji ISHIZAKI

(Received November 20, 1985)

#### Abstract

The overall dispersion of a center of a smoke plume from a chimney is studied based on a simple eddy model. This model enables us to obtain an analytical form of Lagrangian correlation of velocity fluctuation of a smoke puff. Then a dispersion equation of a puff center is obtained.

Defining the scalelength of the eddies contributing to the velocity fluctuation, we show how the scalelength is related to parameters describing the eddy motion. For the case of the observation of finite sampling duration, we assume that the mathematical expressions for the correlation function and the scalelength obtained by ensemble averaging are valid provided that the parameters in the expressions are assigned proper values for the observation. This assumption is tested against the dispersion obtained by means of a computer simulation based on the eddy model. The results show that employing the assumption in dealing with thirty puffs emitted we can predict the dispersion of puff centers and the scalelength with an accuracy less than about 20% and 10% respectively.

#### 1. はじめに

地表から数百メートルまでの大気は大気境界層とよばれている。そこでは地表と大気との間での摩擦が大気の流れ——風——を支配する一つの要因となっている。特に大気の成層状態が不安定で、垂直方向にある程度以上の風速勾配がある場合には、ランダム性の卓越した乱れが発達するといわれている。このような乱れはさまざまな大きさの空間スケールの乱れから構成されているという立場からみると、スケールの大きさにより乱れの拡散への寄与のしかたがちがってくる。

例えば、Gifford<sup>1)</sup>のように煙突から出た煙の拡散を二つの側面に分けて考えれば、次のようになる。第一の側面は、その時々煙流の拡がり幅が煙突から遠い所ほど大きくなる現象である。これにはおもに煙流の幅よりも小さい空間スケールの乱れが寄与する。これよりも大きい空間スケールの乱れは、その時々により煙流を上下左右に揺り動かす作用をする。もし、煙の拡がりの

---

\* 工業力学第二講座

大きさをその時々瞬間的なそれではなく、ある時間で平均されたそれ（平均化時間の長さだけ露出された写真が示す煙流に相当）で評価する場合には、この揺らぎによってもたらされる「平均化された煙流」の拡がり、煙の拡散の第二の側面となる。

本報告では、この第二の側面を扱った。煙の揺らぎ運動と、それを支配する乱れの空間スケールの関係を調べ、前者の観測から後者を推定できるようにするのが目的である。まず乱れについて簡単な渦モデルを導入し、観測される一連の煙が全体として乱れの統計的性質を十分反映していることを前提にして、揺らぎ運動と乱れのスケールを結びつける関係式を得た。しかし、実際に得られる限られた平均時間での観測結果にこの前提を期待することは難しい。そこで、いくつかの仮定をおいて、少ないサンプリングに対しても有効であるように関係式を修正した。計算機による拡散シミュレーションは修正の妥当性を調べるためにおこなったものである。

## 2. 拡散モデル

### 2.1 拡散モデルの概要

煙突から出ている煙流は常に一つながりになっているとは限らない。煙突出口からある程度はなれたところから煙流がちぎれて煙塊を形づくる場合を考える。いったんちぎれた煙塊が、その後、併合、分裂、消滅することがない限り、それを粒子として扱うことができる。そして、煙流の揺らぎの大きさは Taylor<sup>2)</sup> の考え方に従えば、次のように個々の煙塊の運動と関連づけられる。

ある煙塊（添字  $i$  で表わす）の横方向の位置を  $Y_i(t)$  と表わす（風下方向に  $X$  軸をとる）。 $t$  はその煙塊が煙突を出た時を基準にしてはかった時間で、浮遊時間という。同じ浮遊時間をもつ煙塊について物理量を平均することを —— で表わせば、

$$\overline{y^2}(t_0+T) = 2 \int_0^T \sqrt{\overline{v^2}(t_0+t')} \int_0^{t'} \sqrt{\overline{v^2}(t_0+t'-\tau)} r(\tau) d\tau dt' \quad (1)$$

となる。ここで  $t_0$  はおそくともこの時までにはどの煙塊もできあがるという浮遊時間（定数）、そして

$$y_i(t_0+T) = Y_i(t_0+T) - Y_i(t_0) - \overline{Y}(t_0+T) \quad (2)$$

$$v_i(t_0+T) = \frac{dy_i}{dt} \quad (3)$$

$$r(\tau) = \frac{\overline{v(t_0+T) v(t_0+T-\tau)}}{\sqrt{\overline{v^2}(t_0+T)} \sqrt{\overline{v^2}(t_0+T-\tau)}} \quad (4)$$

である。

(1)式の右辺に乱れの空間スケールを反映させるために、煙塊は平均流に対してゆるやかな弧をえがいて運動する傾向があるという観測結果<sup>3)</sup>に注目し、簡単な拡散モデルを考える。曲率半径が煙塊の運動を支配する乱れの空間スケールの目安になると考えられるからである。

曲率半径（＝回転半径） $L$ 、回転角速度  $\omega$ 、回転軸の傾き  $(\alpha, \beta)$  をもって煙塊が運動しているとすれば、その速度の  $y$  成分  $v$  は、初期位置を  $\theta$  で示せば（図1参照）

$$v(t) = \omega L [-\cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\omega t + \theta) + \cos \beta \cdot \cos(\omega t + \theta)] \quad (5)$$

となる。次々と生成される煙塊についての  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega$ ,  $\theta$  の値は確率的に与えられるとして, それらの確率密度関数を次のように仮定する。

$$P_1(\alpha) = \sin \alpha \quad (6)$$

$$P_2(\beta) = \frac{1}{2\pi} \quad (7)$$

$$P_3(|\omega|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\omega - m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (8)$$

$$P_4(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad (9)$$

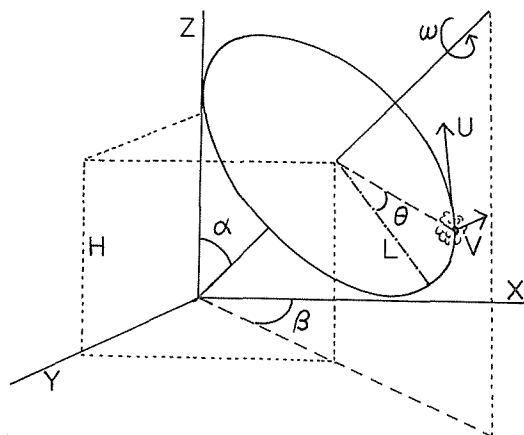


図1 煙塊の揺らぎ運動を表わすパラメータ

(5)~(9)式を(4)式の右辺に代入し, 無限個の煙塊について平均操作をした結果を  $R(\tau)$  とおけば

$$R(\tau) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\tau^2\right) \cos(m\tau) \quad (10)$$

を得る。但し, 煙塊の回転周速度  $U (= \omega L)$  は  $\omega$  と相関がないものとして計算した。一方, (5)式の両辺を二乗し,  $\omega L = U$  において(6)~(9)式を代入し, 無限個の煙塊について平均操作をした結果を  $[v^2]$  とおけば,  $[v^2]$  は浮遊時間によらず一定値となり

$$[v^2] = \frac{1}{3} [U^2] \quad (11)$$

となる。

結局, このモデルでは煙塊を無限個観測できる場合には(1)式は

$$[y^2(t_0 + T)] = 2 [v^2] \int_0^T \int_0^{t'} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\tau^2\right) \cos(m\tau) d\tau dt' \quad (12)$$

となる。なお, (10), (11)式は煙塊の揺らぎ運動の  $y$  方向のみではなく,  $x, z$  方向についても成り立つ (揺らぎは等方, 均質である)。

$[v^2]$  が観測でわかっているならば(12)式を用いて  $(\sigma, m)$  のさまざまな組について  $[y^2]$  を計算することができるので, その中から観測された  $[y^2]$  と一致する場合をさがすことにより,  $m, \sigma$  のそれぞれの値を求めることができる。

一方,

$$[U^2] = [(\omega L)^2] = [\omega^2] [L^2] \quad (13)$$

であるから, (11)式により

$$\sqrt{[L^2]} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{[v^2]}{[\omega^2]}} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{[v^2]}}{am} \quad (14)$$

但し

$$a = \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{m}\right)^2} \quad (15)$$

となる。したがって, 上述のようにして  $m, \sigma$  の値が得られれば, 乱れの空間スケールに結びつく  $\sqrt{[L^2]}$  を求めることができるわけである。

さて、次に有限個の煙塊が観測される場合にも上述のモデルによって乱れの空間スケール（さし当っては煙塊の回転半径の平均値）を推定する方法を考える。

まず、煙塊の運動の仕方が(6)~(9)式で与えられるように分布している煙塊の母集団から、ある仕方で抽出された  $N$  個の煙塊から成る一つの試料を考える。実際に観測される一連の煙塊は、このような試料に相当しているとみなすわけである。

試料平均を  $\bar{\omega}$  で表わし

$$m_o = \overline{|\omega|} \tag{16}$$

$$\sigma_o = \sqrt{(\overline{|\omega|} - m_o)^2} \tag{17}$$

とにおいて、(4)式の  $r(\tau)$  を次式で近似する。

$$r_o(\tau) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_o^2 \tau^2\right) \cos(m_o \tau) \tag{18}$$

また、 $\sqrt{L^2}$  の近似量として次のような  $L_o$  を(14)式と類似な形で考える。

$$L_o = \sqrt{3} \frac{\sqrt{(\overline{v^2})_M}}{a_o m_o} \tag{19}$$

但し

$$a_o = \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_o}{m_o}\right)^2} \tag{20}$$

ここで、添字 M は浮遊時間について平均することを示す。以上により、 $\overline{y^2}$  と  $\overline{v^2}$  が浮遊時間の関数として観測から得られれば、無限個の煙塊の場合と同様の手順により、 $m_o$ ,  $\sigma_o$ , したがって  $L_o$  を求めることができる。

### 2.2 拡散式の無次元表示

乱れに関するパラメータを推定するために煙流の揺らぎ幅を調べる場合、

$$m \sqrt{\frac{[y^2]}{[v^2]}} = Y_* \tag{21}$$

とにおいて<sup>4)</sup>(12)式を無次元表示して、その特徴をつかんでおくと見通しがよくなる。

$m\tau = \xi$ ,  $\sqrt{3} \sigma/m = k$ ,  $mT = T_*$  とおけば、(12)式は

$$Y_*^2(T_*) = 2 \int_0^{T_*} \int_0^{t'} \exp\left(-\frac{1}{6}(k\xi)^2\right) \cos \xi d\xi dt' \tag{22}$$

となる。但し、 $t_0 = 0$  とした。  $0.1 < k < 1.0$  の  $k$  について  $Y_*^2$  の様子を示したのが図2である。この図でさし当って注目すべきことは次の二つである。

第一は、 $k < 0.6$  の場合、 $Y_*^2$  は極大値

$$(Y_*^2)_{\max} = m^2 \frac{[y^2]_{\max}}{[v^2]} \doteq 4.1 \tag{23}$$

をもつことである。有限個の煙塊に対しては(23)式と類似の形

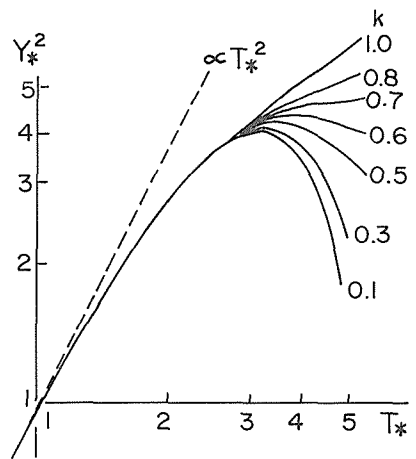


図2  $Y_*^2$  と  $T_*$  の関係。無次元パラメータ  $k$  への依存性を示す。

$$m_o = \sqrt{4.1} \sqrt{\frac{(v^2)_M}{(y^2)_{\max}}} \quad (24)$$

で  $m_o$  を近似的に求めることにすれば、これを(19)式に代入すると

$$L_o = 0.86 a_o \sqrt{(y^2)_{\max}} \quad (25)$$

となる。 $(y^2)_{\max}$  が観測された場合には  $a_o = 1$  と仮定することにより、(25)式により  $L_o$  を推定することができる。

図2で注目すべき第二の点は、 $T_* (=mT) < 1$  で

$$Y_*^2 = \text{const} \cdot T_*^2 \quad (26)$$

となっていることである。この式は

$$[y^2] = \text{const} \cdot [v^2] T^2 \quad (27)$$

と書けるから、 $T_* < 1$  の範囲では  $[y^2]$  は  $m$  によらないということである。したがって(12)式を用いて  $m$  を推定するには、 $T_* = mT > 1$ 、すなわち  $1/m$  より大きい  $T$  についての観測が必要となる。

### 2.3 検討事項

(1)  $r(x)$  を  $r_o(x)$  で近似することの有効性：計算機の中で拡散モデルに従って  $N$  個の煙塊を放出する。これにより  $\overline{y^2}$ 、 $\overline{v^2}$  が直接  $T$  の関数として得られ、さらに、 $m_o$ 、 $\sigma_o$  も得られる。一方、(1)式に(18)式を代入して、すでに得られている  $\overline{v^2}$ 、 $m_o$ 、 $\sigma_o$  を用いて  $\overline{y^2}$  を計算し、直接求められた  $\overline{y^2}$  と比較する。

(2)  $\sqrt{\overline{L^2}}$  を(19)式で定義される  $L_o$  で近似することの有効性： $m_o$ 、 $\sigma_o$ 、 $(\overline{v^2})_M$ 、 $\overline{L^2}$  は検討事項(1)で得られ、 $L_o$  は(19)式から求まるので両者を比較する。

(3)  $\sqrt{\overline{L^2}}$  を  $(y^2)_{\max}$  のみから推定する(25)式の有効性：両者を直接比較する。

(4)  $\overline{y^2}$  を風下距離の関数として扱う方法：拡散モデルでは  $\overline{y^2}$  は浮遊時間  $T$  の関数として計算されるが、実際には

$$x(\text{風下距離}) = W(\text{平均水平風速}) \times T \quad (28)$$

で定義される  $x$  の関数として観測、整理される。そこで、計算機の中で  $\overline{y^2}$  を直接  $x$  の関数として求めておき、(1)式で計算した  $\overline{y^2}$  を(28)式により  $x$  の関数に表現し直したものと比較する。

### 3. シミュレーションの方法

$N$  個の煙塊は、拡散モデルの母集団から「ある仕方」で抽出されると前章で述べた。実際の煙を観測してみると、次々と生成される煙塊はその前後の煙塊と全く無関係に運動しているようには見えない。二点写真法<sup>9)</sup>で調べてみると、確かにある種の傾向が見られた<sup>3)</sup>。以下のシミュレーションでは、各種パラメータは上述の観測例を念頭において設定した。

まず、座標系は煙突出口を原点とし、 $x$  軸を風下方向、 $z$  軸を高さ方向、 $y$  軸をそれらに垂直にとる直角座標とする。煙塊は煙が煙突を出た瞬間に形成され、平均風速 8.8 m/s の平均流に乗って流される。追跡時間は  $T = 120$  s までとする。観測時間(平均化時間)は 3 分間を想定し、一連の煙塊は 30 個から成るとする。それぞれの煙塊には浮力ははたらかないものとし、平均流に相対

的な弧をえがくためのパラメータは次のような時系列として与える。

① 回転軸の傾き  $\alpha$  : 密度関数(6)式に従って  $N$  個任意抽出したあと、4 個目毎に極小値が現われる三角関数様の形に配列する。

② 回転軸の傾き  $\beta$  : 較差 0.6723 の等差数列とする。

③ 初期位置  $\theta$  :  $0 \sim \pi/2$  の範囲から任意抽出して、抽出順に並べる。但し、⑤で  $H$  が負になった場合は初期高さ  $z(0) = 0$  になるように修正する。

④ 回転半径  $L$  :  $30 \sim 100$  m の範囲から任意抽出して、抽出順に並べる。

⑤ 回転中心の高さ  $H$  :  $H_i = |L_i \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \theta_i|$  で与える。同一符号が続く個数は 1 ~ 20 個の範囲から任意抽出して、抽出順に並べる。

⑥ 回転角速度  $\omega$  : 密度関数(8)式に  $m = 0.033$  rad/s,  $\sigma = 0.0046$  rad/s を代入し、任意抽出して抽出順に並べる。但し、回転周速度  $U_i (= \omega_i L_i)$  が 3 m/s 以上になった時には抽出し直す ( $U$  と  $\omega$  には相関がないとしているモデルと若干異なる)。符号は、隣り合った煙塊の回転中心の  $y$  座標が異符号の時には  $\omega$  も異符号にする。そうでない時は任意に与える。

#### 4. 結 果

30 個の煙塊をとばすのを 1 run とし、10 run から得た結果を示す。1 run につき煙流の揺らぎは  $y, z$  の 2 成分が得られる。同じ浮遊時間をもつ煙塊の平均位置からの揺らぎという点では  $x$  成分も評価できるので、1 run につき 3 成分で 3 個、10 run で 30 個のデータとなる。

煙塊の散らばりの run によるちがいの様子は図 3 に示してある ( $x, y, z$ , 各成分とも  $\bar{y}^2$  で表わしてある)。 $\bar{y}^2$  の極大値  $(\bar{y}^2)_{\max}$  についてみてみると、その大きさは  $2500 \sim 4800$   $\text{m}^2/\text{s}^2$ 、平均的には  $3700$   $\text{m}^2/\text{s}^2$  程度となっている。無限個とばした場合を調べてみると  $(\bar{y}^2)_{\max}$  は  $4300$   $\text{m}^2/\text{s}^2$  程度になるものと予想され、これに比べて小さめになることが多くになっている。この理由は、煙塊の個数が少ない時には平均位置が  $x$  軸からはなれることにある。無限個の時にはこの分も揺らぎとして評価されるからである。

##### 4.1 $r(\tau)$ を $r_0(\tau)$ で近似すること

図 4 は図 3 に示した例について(1)式で計算した結果とくらべたものである (但し、(1)式の  $r(\tau)$  は(18)式の  $r_0(\tau)$  で置きかえた)。どの例についても  $T < 30$  s では両者はよく一致している。このことは  $T = 30$  s が  $T_* (= m_0 T) \doteq 1$  に相当していることから、(27)式から予想されることである。 $\bar{y}^2$  はもっぱら  $\bar{v}^2(T)$  に支配されるから

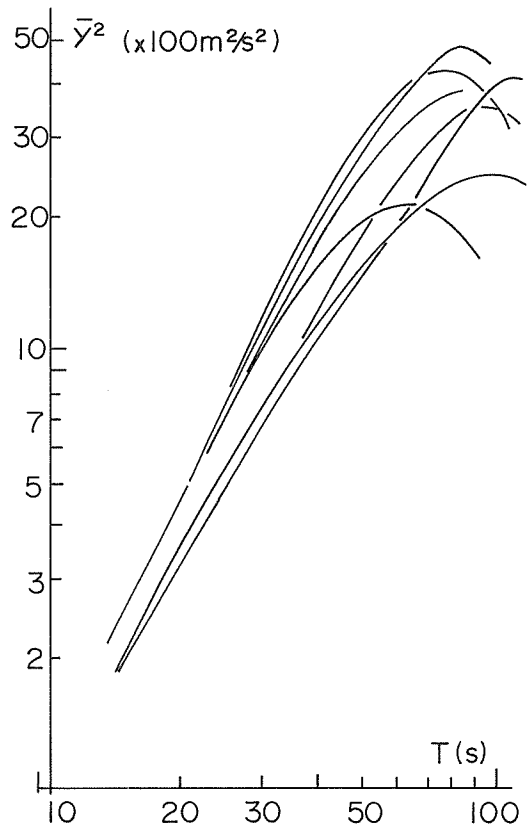


図 3  $\bar{y}^2$  の  $T$  による変化。run によるちがいを示す。  
(煙塊の個数が 30 の場合)

例についても  $T < 30$  s では両者はよく一致している。このことは  $T = 30$  s が  $T_* (= m_0 T) \doteq 1$  に相当していることから、(27)式から予想されることである。 $\bar{y}^2$  はもっぱら  $\bar{v}^2(T)$  に支配されるから

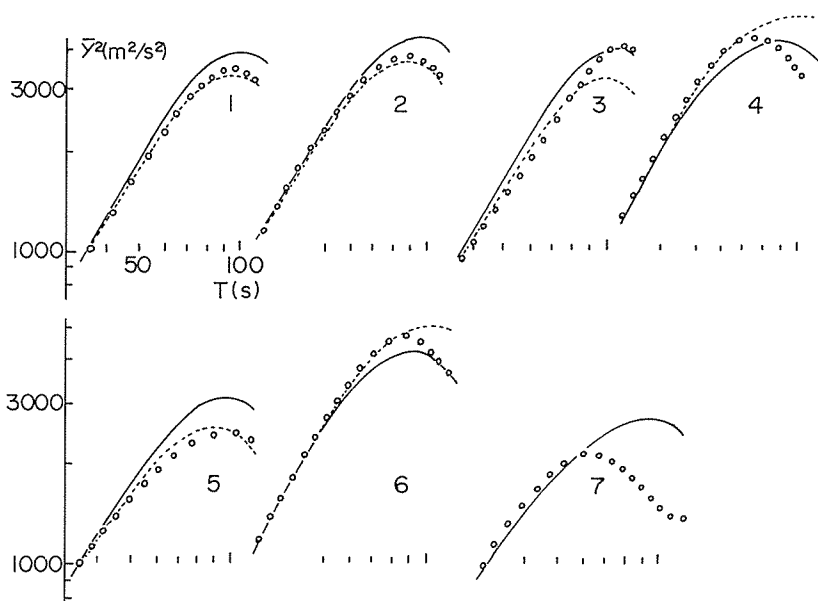


図4  $\overline{y^2}$  の予測値 (実線) と実際 (○印) の比較。点線は  $m_0$  を変えて計算した場合。番号は run を区別するためのもの。

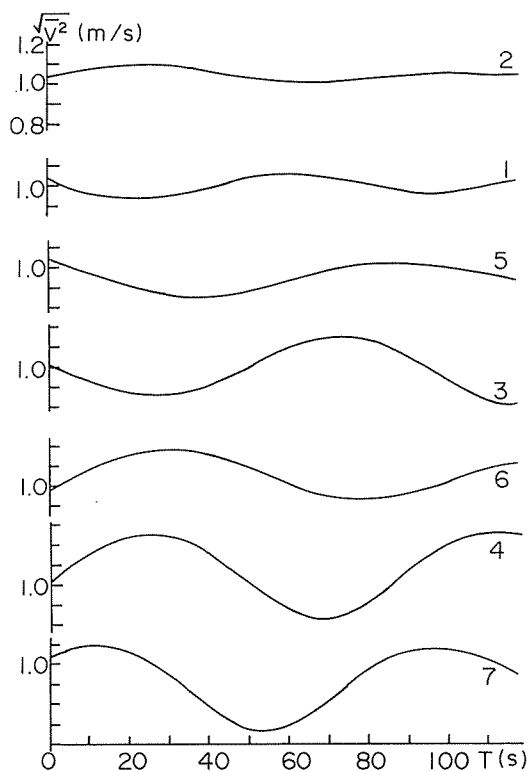


図5  $\sqrt{y^2}$  の  $T$  による変化。番号は run を表わし、図4に対応する。

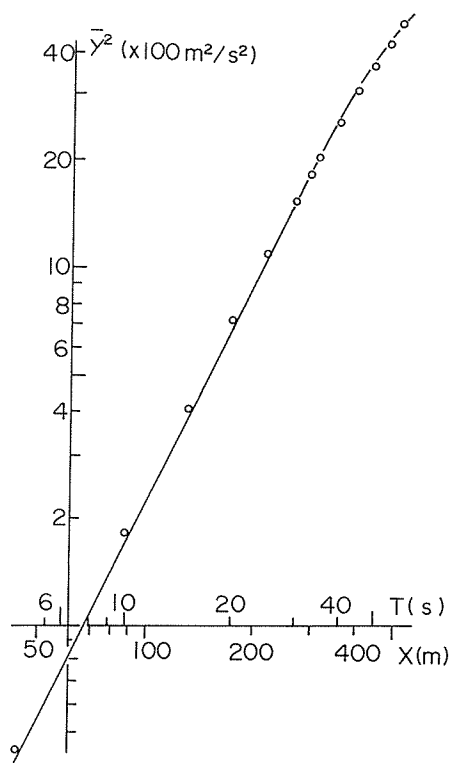


図6  $y$  を  $T$  (実線) または  $x$  (○印) で整理して得た  $y^2$  の比較。

である。

回転角速度  $m_0$  は run によってはあまり異ならず  $0.0325 \pm 0.0005$  rad/s の範囲である。後に述べる  $m_0$  の  $\overline{y^2}$  への感度を考慮すると図 4 に示されている run の間での差は、もっぱら  $\overline{v^2}(T)$  のちがいでよっていると見える。図 4 の各例における  $\sqrt{\overline{v^2}(T)}$  の様子が図 5 に示されている。 $\overline{v^2}$  の  $T$  による変化が小さい場合には  $\overline{y^2}$  は平均的な振舞いをし、 $\overline{v^2}$  が  $T$  とともに減少する場合は  $\overline{y^2}$  が小さめになる、というように全体としてある傾向があることがわかる。図 4 の例 7 は  $(\overline{y^2})_{\max}$  の現われが早く他の例とかなりちがった様子を示しているが、 $\overline{v^2}$  の値は小さめで変動も大きい。このような例は、30 run に 1 run 程度出現するようで、その run ではたまたま渦の分布に非等方向性が強く生じたことの反映である。この場合も含めて言えることは、 $(\overline{y^2})_{\max}$  が現われるまでに限れば、(18)式により  $r(\tau)$  を  $r_0(\tau)$  で近似しても  $\overline{y^2}$  は 20%以内の精度で予測できるということである。

ついでに、煙塊の散らばりへの  $m_0$  の感度を調べることもかねて、 $\overline{y^2}$  に見合った  $m_0$  を推定してみた。図 4 の点線は  $\overline{y^2}$  をよりよく表現するように  $m_0$  だけを変えて計算したものである。このことから、 $\overline{v^2}$  と  $\overline{y^2}$  とから  $m_0$  を推定すれば、10%程度の誤差が生じることがわかった。

#### 4.2 $\sqrt{L^2}$ を $L_0$ で近似すること

$\sqrt{L^2}$  を(19)式で定義される  $L_0$  で近似する場合、その近似を支配する要因は二つある。一つは(13)式が煙塊が 30 個の場合にどうかということ。10 run について調べてみると 1%以内の正確さで(13)式の関係が成り立っており問題はない。もう一つは(11)式である。係数の分母の値を調べてみると、2.6~3.7 になっており、平均すれば 3.16 である。したがって、 $L_0$  は  $\sqrt{L^2}$  にくらべて数%以内の差が生じ、平均すれば約 2.5%小さめに計算されることになる。

$\sqrt{L^2}$  を(25)式で定義される  $L_0$  で近似する場合はどうか。10 run の中では  $\sqrt{(\overline{y^2})_{\max}}$  は 50~69 m で、平均値は 60.8 m である。(25)式で  $L_0$  を求めると 43~59 m、平均値に対しては 52.8 m となる。一方、 $\sqrt{L^2}$  は 53.6~56.6 m で平均値は 54.8 m である。したがって、 $L_0$  は run によって  $\sqrt{L^2}$  にくらべて 20%以内の差が生じ、平均的には約 4%小さめに計算されることになる。

#### 4.3 $\overline{y^2}$ を風下距離の関数として扱う方法

一つの run について、煙塊のばらつきを風下距離 ( $x$ ) の関数として整理したものと、浮遊時間 ( $T$ ) で整理したものを得た。結果は図 6 に示されているが、一つの図の上で両者を比較するために、横軸 ( $x, T$ ) を(28)式の関係にしたがって目盛っている。両者の差は 5%以下となっている。

実際の観測では  $\overline{y^2}$  を  $x$  の関数として得る方が容易である。その場合でも、(28)式にしたがって  $x$  を  $T$  に変換すれば、 $T$  の関数として得られるであろう結果が 5%程度の精度で推定できる、ということである。

#### 謝 辞

計算は北大大型計算機センターでおこなった。

#### 参考文献

- 1) Gifford, F. : Adv. in Geoph., 6 (1959), p. 117~137
- 2) Taylor, G. I. : Proc. London Math. Soc., A20 (1921), p. 196~212
- 3) 石崎健二 : 天気, 30 (1983), p.595~602
- 4) Frenkiel, F. N. : Adv. in Appl. Mech., 3 (1953), p. 61~107
- 5) 石崎健二 : 北大工学部研究報告, (1978) 88, p. 139~146