



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	粉粒体の形状解析 : その準備と簡単化した離散フーリエ解析について
Author(s)	柴田, 俊春; Shibata, Toshiharu; 吉木, 宣比 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 131, 21-36
Issue Date	1986-05-30
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/41986">https://hdl.handle.net/2115/41986</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	131_21-36.pdf



粉粒体の形状解析  
—その準備と簡単化した離散フーリエ解析について—

柴田 俊春\* 吉木 宣比\* 山口 賢治\*

(昭和 60 年 12 月 27 日受理)

**Shape analysis for particulates**  
**—on its preparation and simplified discrete Fourier analysis—**

Toshiharu SHIBATA, Norihisa YOSHIKI and Kenji YAMAGUCHI

(Received December 27, 1985)

**Abstract**

In algorithms of discrete Fourier methods applied to shape analyses for particulates, we usually choose the transformations, sine and/or cosine, according to the symmetrical nature of functions for its silhouette. These are quite justified. However, there are some problems such as phase angles which do not have the same nature as the other coefficients, and indicate restricted interpolation by the direct inverisions. The present method was newly refined regarding these points and it has the freedom to select a sine or cosine transformation.

At first the method is discussed with some polygonal shapes. And next it is applied to the shape analysis of Taiheiyo-coal char particles which were sampled from the water gas reaction with partial oxidation. In spite of its irregular shapes, informations such as areas and peripheral lengths are related to the sine coefficients.

1. 緒 言

粉粒体形状の定量的な表現とその特徴抽出をフーリエ変換記述子を用いて実施する研究は、画像処理、情報処理の研究と「つかずはなれず」の関係で 1960 年代から幾多の進展を示してきている。Schwarcz-Shane<sup>3)</sup> Ehrlich-Weinberg<sup>7)</sup> Meloy<sup>10)</sup> Beddow<sup>2-5)</sup>らは粒子形状を解析し、粉粒体の物性、粒子—流体運動との相関などを攻究する目的でフーリエ変換の有効性に注目している。また文字、閉曲線を含む図形の変換が Cosgriff<sup>6)</sup>の研究を初めとし、その後 Zahn-Roskies<sup>20)</sup>以来種々の体系化がなされてきている。

さてこれらの研究、および引続く研究の多くは、連続変換、離散変換の差はあるにしても、取扱いは正弦—余弦展開、あるいは位相角付きの余弦展開が用いられている。例外的な扱いとして Ahmed<sup>1)</sup>らはチェビシェフの多項式の導入と関連する離散形の余弦変換を定義し、他の変換法と比較している。この余弦変換の引数は常法と形の異なるものであり、位相角のないことと併せて興味深いものである。この変換は Karhunen-Loeve 変換と同値なものであるとの指摘が Shanmugam<sup>14)</sup>によってなされている。位相角付き余弦展開についてみるとこの角は記述子を複雑にするものであり適切な処理が望まれるかもしれない。この処理と考察は近年 Luerkens<sup>8,9)</sup>らによって報告されたが、記述子に関する内容の複雑化は必ずしもさけられないようである。

\* 応用化学科第 1 講座

本報告では離散形を対象としているが、従来のフーリエ変換法とは異なり、正弦関数および余弦関数両方を使用しても良いことに加えて、そのいずれか片方のみで変換を記述する自由な展開を提案し、解析的閉曲線図形の輪郭記述子への適用を考察する。<sup>10)</sup>このいずれか片方の三角関数使用は、図形の配向性は別として従来法での位相角の付置を必要としないものである。追って述べるが従来法と本法の特徴上の相違点は前者の周期性変域が閉区間であるのに対し、本法のいずれか片方の関数のみの使用を選択した場合には、この変域を開区間で定義することである。この区間定義の変更を補うものとして特異点となった両端での関数値を別に付置するものとする。この新たな开区間における三角関数展開は、开区間であるという欠点を除いて、位相角不要と、逆変換にあっても変換時の使用選点にこだわる必要性は薄く、ほかの個所での輪郭再生でも充分の精度が期待できることなど、フーリエ記述子の本質を損なうことなしに、引続く解析を単純化するものと思われる。

## 2. 二次元閉曲線の一次情報について

フーリエ変換に供する二次元閉曲線の前処理、標本値化などについては計算機向きのデジタル幾何学に基づく手法が強力である<sup>12,17)</sup>。しかしここでは手持ち機器体系上の制約と対象試験図形、粒子形状などを簡単なものから逐次複雑なものへと経験的知見の蓄積により検討内容を充実させるという常套性により古典幾何学的な知識の整理を準備した。従ってこの部分は形状の記述子による取扱いにあって必ずしも本質的な役割をはたすものではない。

以下輪郭形状解析を目標に置き、その選点多角形化、面積、周辺長、重心位置など代表点の算出、代表点から周辺までの距離決定など一次情報について記す。

### i) 選点多角形化などについて

ある(粉粒体)形状の輪郭曲線(2次元投影図形)をフーリエ解析し、その記述子を用いて図形の特徴を検討する目的についてはすでに述べた通りである。通例のように直角座標系に置かれた物体の投影輪郭曲線図形の外縁上から適切な数の選点標本(節点, node)を取出し、これらを順次直線(arc)でつないだ凸多角形を解析の対象とする。一般には複雑な形状を近似させる閉曲線は凸特性を示すとは限らないのは当然であるが、実在粉粒体解析にあって凸特性範疇の研究結果からも有益な情報が得られるとの Beddow<sup>5)</sup>の示唆がある。非凸性形状の取扱いは別の機会にゆずることとする。

さて選点多角形(以下、多角形)は、単に形状データをそのまま記録する目的では、節点座標列記で充分であるが、動径ベクトルのフーリエ記述からの特徴抽出操作、統計処理による分類などを試みる時、いくつかの副変量の導入が必要である。すなわち面積、周辺長、各種代表径などに加えて次の二つの代表点座標値が重要な役割を担っている。

○全頂(節)点座標値の平均値(平均座標)

○重心(中心座標)

節点数が多くなると重心計算の時間が増す(乗除算の増加)ということもあり、平均座標が重心座標の代替となり得るか否かは、興味のあることといえる。ちなみに平均座標は物体、細片の配列、充填状態に関係する静的因子の一つとなり得るかもしれないし、重心は言うまでもなく、運動に関係する動的因子といえるものである。

平均座標の算出は簡単なものである(付録 Prog. 中に準備)。重心の決定には多角形面積もかわるので連鎖的にこれを整理する。

ii) 多角形の面積, 周辺長

多角形の面積は, 図形の直接図積分, 輪郭近似の部分曲(直)線の解析的積分, 計算機向きの境界追跡算法等々があるが, ここでは三角形要素の集合で多角形全体を構成する方法を用いる。この結果を非凸特性図形へ適用することも勿論可能である。

方法は n 個の選点中, ある任意の頂点を基準(添字 1)とし, これから残りの節点に放射状の補助直線を引き, n-2 個の三角形要素を作る。これらの総和は多角形の面積である。また三角形要素の基準点の対辺の長さの和から多角形の周辺長を得る。いま面積, 周辺長をそれぞれ S, L とすると次式を得る。

$$S = \sum_{j=2}^{n-1} \left( l_0^2 \frac{3}{\pi} \left( 1 - \frac{l_k}{l_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right)_{j-1} \quad (\text{Herron の式の変形}) \quad (1)$$

$$L = l_{1,1} + \sum_{j=2}^{n-1} l_{2,j} + l_{3,n-2} \quad (2)$$

上式中の  $l_0, l_k$  はそれぞれ第 2 の添字  $j-1$  がつくものとし, 三角形要素  $\Delta P_1 P_j P_{j+1}$  に関する辺長  $l_1, l_2, l_3$  はそれぞれ次の定義による。

$$l_1 = \overline{P_1 P_j}, \quad l_2 = \overline{P_j P_{j+1}}, \quad l_3 = \overline{P_{j+1} P_1} \quad (3)$$

また  $l_0$  は次の値をとる。

$$l_0 = (l_1 + l_2 + l_3) / 2 \quad (4)$$

多角形の節点添字を反時計廻りにつけるとし, その中の三角形要素の頂点を左から右に向かって調べ, 三角形要素  $\Delta P_1 P_j P_{j+1}$  を得るのは凸特性多角形の場合である。三角形要素  $\Delta P_1 P_{j+1} P_j$  は非凸特性を含む場合であり, 次の関係にある<sup>\*</sup>。負の面積はここで導入される。

$$\Delta P_1 P_{j+1} P_j = -\Delta P_1 P_j P_{j+1} \quad (5)$$

なお周辺長については非凸特性の効果はない。

iii) 多角形の重心位置の決定

三角形  $\Delta P_1 P_j P_{j+1}$  の重心座標  $(x_G, y_G)_{j-1}$  は解析幾何学にあるように三個の頂点座標の平均である。

$$(x_G, y_G)_{j-1} = \left( \frac{x_1 + x_j + x_{j+1}}{3}, \frac{y_1 + y_j + y_{j+1}}{3} \right) \quad (6)$$

頂点添字に逆順があるならこの三角形は負の面積を持つと先に約束した。この時得られる重心

\* 対象図形(多角形)の非凸特性は, 領域 R に在る図形の内部に属する 2 点  $X_1, X_2$  を結ぶ線分上の任意の点  $X$  が R に属さない場合と定義するのが普通である。

$$X = \alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2 \quad (0 < \alpha < 1)$$

しかし本問題の多角形にあつては, ある選点(節点)が上述の非凸特性を有していても面積算定で必ずしも特別な考慮を要しない場合がある。これを仮の非凸特性とし, 真の非凸特性と区別する。真の非凸特性は選点集合  $\{P_j\}$  の座標点  $\{(x_j, y_j)\}$  にあつて次の不等式の成立する場合とする。

$$(x_j - x_1) y_{j+1} + (x_1 y_j - y_1 x_j) > (y_j - y_1) x_{j+1} \quad (\text{ii})$$

は三角形の領域内に存在しないがそのまま偽重心とみなして定義の有効性が保存され、引続く多角形での取扱いが可能である。

さて多角形の重心については、上のような三角形要素の全面積（一部負要素を含むかもしれない）に基づく各要素の面積分率を荷重関数とした三角形要素の重心の平均値と定義できる。なお  $l_0 \sim l_3$  は (3, 4) 式による。

$$(x_G, y_G) = \frac{\sum_{j=2}^{N-1} \left( l^2 \frac{3}{\pi} \left( 1 - \frac{l_k}{l_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right)_{j-1} \left( \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 x_k, \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 y_k \right)_{j-1}}{\sum_{j=2}^{N-1} \left( l^2 \frac{3}{\pi} \left( 1 - \frac{l_k}{l_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right)_{j-1}} \quad (7)$$

上式中右辺分母は先に求めた多角形面積  $S$  である ((1)式)。また分子の  $(x_k, y_k)_{k=1,2,3}$  はそれぞれ点  $P_1, P_j, P_{j+1}$  の座標である。先に指摘したように、この重心座標は多角形の非凸特性が強いと必ずしも多角形の閉領域内に位置するとは限らない。閉領域外に重心があるときここから多角形周辺に引いた動径は解析的でないのは勿論である。このような重心位置の確認は、1つ以上の偽重心（負面積）が表れた場合に必要となる。

#### iv) 基準点(重心)から多角形の各辺にいたる距離について

基準点(重心)から多角形外縁までの距離を表わす動径ベクトル(の大きさ)を導入する。この際、基準点を通るある基線から測った偏角の増加につれて描かれる動径ベクトルの軌跡は、多角形そのものの再現である。この動径ベクトルの大きさは初等代数的に決められる。すなわち、多角形の辺を含む線形一次式中のある1本と上述偏角を勾配とする基準点から引いた半直線一次式との連立方程式を組み、それらの交点座標を決め、これと基準点間の距離を求めることである。本取扱いでは半直線の代わりに全直線を用い、辺を代表する一次式を二本準備し、二つの交点を求め、偏角と対応させた。この求解にあつて偏角増加の幅が小さく、弱い非凸特性であれば問題はないが、そうでないときの解、および順序数が  $n$  を通りすぎた循環時には注意を必要とする。

偏角—動径ベクトルにより多角形を分解する極座標法のプログラム例を *Prog.* に含めた。同譜中には基準点として、重心に加えて選点の平均座標値、および領域内の任意点も選定できるようにした。さらに必要に応じて図形の回転操作も有効である。

### 3. 粒子（輪郭）形状のフーリエ解析

#### i) 正弦係数と余弦係数に含まれる情報について

ある任意の連続一価関数のフーリエ展開に際し、関数の対称性に制限をつけないとき、正弦—余弦展開が必要であるとされてきている。処理しようとする図形の輪郭が偶関数で表示できれば余弦展開が有効であり、粒子輪郭情報が奇関数で書けるなら（例えば輪郭接線）正弦展開がよいというのは多くの書物に述べられている通りである。粒子形状解析にあつても、球形、楕円体状などの回転体、あるいは近いもの、正四角形、菱形などの平面体を対称性の失われない位置におき、余弦展開を行ない情報の得られることも多い。ところでこのような対称図形でも配置を回転移動をして行くとみかけ上余弦係数の内容は変わり、正弦係数が新たにその存在を主張することになる。このような両係数間の情報の遷移は位相角の導入をまたないでもそれらの情報に重複の可能性を示唆するものでもある。

さて関数の偶奇性に注意を払うのに際し、座標軸の平行移動によりその間の互換性があるか否

かは形状解析への適用を考える上で主要な一因子となり得る。べき乗関数  $x^n$  のように  $n$  によって偶奇性そのものが固有な場合と異なり、三角関数 ( $\sin$ ,  $\cos$ ), 矩形波, 三角波などの周期関数にあって, その偶奇性は遷移的性質をもち, みかけ上のものである。このような遷移的要素を新しく提案しようとするフーリエ変換中で調べてみる。

ii) 離散フーリエ変換の改良について

周期性のある離散的な関数に対してのフーリエ変換を考える。この関数が偶対称性をもつものとするれば, 展開式を構成する関数列はよく知られているように  $\{A_k \cos(2\pi kt/(2N))\}$ ,  $k=1, \dots, N-1$  が主要な役割をはたす。この項中  $t$  は勿論離散量であり整数である。

さてこの関数列に注目するとき, 二つのある解釈が可能である。一つは引数  $2\pi kt/(2N)$  にあって基本的な要素  $\pi t/(2N)$  の偶数倍 ( $2k$ ) からかかる偶数列添字とみなせることである。この時これに相補な関係にある奇数列  $\pi t(2k-1)/(2N)$  を作ったとき, その関数列項, 級数和の挙動はどのようなものであり, また偶数列級数和との関連がないのかということに興味をもたれる。もう一つは最終的に内容が変わるものでないが, 整数指標  $k$  への半整数の導入  $0.5, 1, 1.5, \dots$  である。このような周期  $2\pi$  から  $\pi$  への変更, あるいは半整数導入の差は別としてパラメータ的に扱うことが考えられる<sup>1)</sup>

この級数論とは別に“同一の関係”により任意関数は偶関数と奇関数の和として表現出来る。

$$f(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} + \frac{f(t) - f(-t)}{2} \quad (8)$$

この和表現と拡張した級数和の使用により, 従来のフーリエ展開式にかわって次の形が提案できる。

$$f_{\text{oe}}^i(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} A_k \cos\left(\frac{\pi kt}{N}\right) + \sum_{k=1}^{N-1} B_k \sin\left(\frac{\pi kt}{N}\right) + \frac{A_N}{2} \cos(\pi t) \quad t=0, 1, \dots, N-1 \quad (9)$$

$$\equiv f(t) - A_0' \quad (\text{provided with } A_0' = f(0))$$

$$f_{\text{e}}^i(t) = 2 \sum_{k=1}^N A_k \cos\left(\frac{\pi kt}{N}\right) \quad t=1, 2, \dots, N-1 \quad (10)$$

$$f_{\text{o}}^i(t) = 2 \sum_{k=1}^N B_k \sin\left(\frac{\pi kt}{N}\right) \quad t=1, 2, \dots, N-1 \quad (11)$$

上式 (9, 10, 11) 中係数  $A, B$  は次式による。

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} f_{\text{e}}^i(t) \cos\left(\frac{\pi kt}{N}\right) \quad (12)$$

$$B_k = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} f_{\text{o}}^i(t) \sin\left(\frac{\pi kt}{N}\right) \quad (13)$$

$$k=0, 1, 2, \dots, N-1, \quad i=oe, o, e$$

上式の各々は関数  $f_i(t)$  の添字  $i$  を取去りかつ引数  $\pi kt/N$  が  $2\pi kt/N$  と比較して 2 倍密にとつ

ていることを除くと従来の離散形フーリエ変換と同一である。N は標本点数であり  $f_1(t)$  は周期  $2\pi$  をもつものとする。

さて上式はその変数の定義域を通常の間区間  $[0, 2\pi]$  から开区間  $(0, 2\pi)$  に変更することで一般性を失なうことなく添字 tr を省いた形の  $f_1(t)$  間にも次の関係が成立する。

$$f_{oe}(t) = f_e(t) = f_o(t) = f(t) \quad (14)$$

最終的に不要な  $f_1(t)$  の添字 i は従来法でみると o, e は odd, even を, oe はいづれでもないことを意味するものとした。しかしここで注目すべき特徴として  $f_{oe}(t)$  の偶奇性が固定されないのは別として  $f_e(t)$  にあってもこの表現はみかけとは異なり偶関数ではないことである。これと同様  $f_o(t)$  は奇関数でない。容易にわかるよう  $f_o, f_e$  の級数表現のそれぞれを指標 k の偶奇で分割して 2 つの部分和を作り, 偶数指標の k の級数 (偶級数和) をみると  $f_o, f_e$  についてのものは偶(奇)関数であり, 従来法の表現そのものである。

上述の事項は著者らの知る限り従来注目されていない新しい性質であり関数  $f(t)$  の正弦展開, あるいは余弦展開に使用者の選択を許可するものである。ただし関数  $f(t)$  そのものが明らかに偶(奇)関数であるとき, 本展開式にあってもその奇(偶)関数的性質は全体として消え去る。例えば本来通り奇関数である  $f_o(t)$  の展開表現にあっては, その奇数指標級数和は偶関数性を支配するものであるから零になる。ただし  $f_o, f_e$  にあっても偶奇性に関連し関与しない展開係数そのものが常に零であるとは限らない。蛇足であるが変数の定義区間  $(0, 2\pi)$  を無視した  $f_o(0) \neq 0$  の結果を求めることは出来ない。

以上述べてきた変換による展開式は  $f_{oe}(t)$  のように正, 余弦関数を敢て両方使用するというのでなければ, 位相角は不要である。この事実より引続く解析 (逆変換を含めて) は幾分なりとも整理されたものになることが期待される。

#### 4. 数値的検討

##### i) 提案したフーリエ変換 (係数) の性質

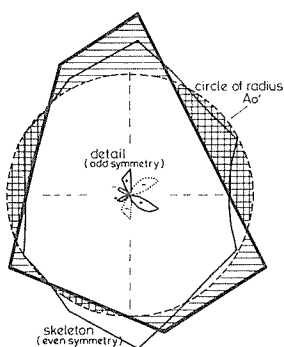


Fig.1 A test pattern -hexagon- -skeleton and detail are drawn from the inversed result. -the hexagon is a sum of the both.

今迄述べてきたフーリエ変換は証明をつけて (付録) その成立をみた。これはまた逆変換による離散データの再現を保証するものでもある。しかしながら常法によるものと本法の個々の変換係数間の関係については詳しい情報を与えるものではなかった。特に偶関数を正弦展開する時の状況が不明である。ここでは任意の試験図形例として凸六角形, および 2 等辺 3 角形について重心からの距離を具体的に解析する。図形は解析的さえあれば当面問題はない。

まず凸六角形であるが, Fig. 1 の形状を考える。その重心などの幾何学的数値は変換結果と共にまとめて Table 1<sup>(5)</sup> に示した。ここで標本点数 N は図形が簡単なこともありさしあたり 40 点とした。表には従来法による値も記してある。数値を比較して明らかなように偶調和数での従来法, 本法の対応は, 後者が丁度半分であることだけを除いて, いうまでもなく完全である。従来法の最初の余弦係数は係数の規格化因子として知られているものである。一方種々の試験図形を本法で解析した結果では最初の余弦係数に加えて, 正弦係数にあっても最初の非零奇係数がこの役割をはたす。すなわち最初

Table I Analytical example for the hexagon<sup>15)</sup>

15:55:40 plot end & start of Fourier analysis  
 (xc,yc)=(-.335618 ,-.509132)  
 area 73.0001  
 peripheral 34.2527  
 points of apices, original 6  
 .... , contracted 6  
 apices used  
 -5, -3.5, 1, -6, 5, -3.5, 0, 6.5, -3, 4.5, -4, 1  
 not contracted  
 15:57:33 Fourier conversion end

k	cos coeff	sine coeff	k	cos coeff	sine coeff
0	9.4868	0	0	4.7434	0
1	.068369	.118384	1	.153715	3.03463
2	-.705453	-.456510	2	.034184	.059192
3	-.033254	.736134	3	.009555	1.22397
4	.055767	.139301	4	-.352726	-.228255
5	.008494	-.057055	5	.482926	.367737
6	-.231101	-.073124	6	-.016627	.368067
7	.064298	-.013713	7	-.053815	.313565
8	.010763	.006177	8	.027883	.069650
9	-.029655	-.125561	9	-.020599	.295938
10	.004594	.038087	10	.004247	-.028527
11	.026109	.042635	11	.051672	.287695
12	.068499	-.000499	12	-.115550	-.036562
13	-.025241	-.027319	13	.096548	.086475
14	-.018961	.004804	14	.032149	-.006856
15	-.017485	.051033	15	.091384	.145616
16	.010351	-.013158	16	.005381	.003088
17	.008312	-.010702	17	.060093	.130828
18	-.019014	-.015800	18	-.014827	-.062780
19	.009882	.007157	19	.151189	.089381
20	.002314	-.000003	20	.002297	.019043
			21	.109752	.075668
			22	.013054	.021317
			23	.085056	.066447
			24	.034249	-.000249
			25	.089254	.099585
			26	-.012620	-.013660
			27	.110875	.062117
			28	-.009480	.002402
			29	.112576	.045716
			30	-.008742	.025516
			31	.076808	.026911
			32	.005175	-.006579
			33	.093112	.027978
			34	.004156	-.005351
			35	.096201	.027282
			36	-.009507	-.007900
			37	.105850	.003115
			38	.004941	.003578
			39	.097700	.004596
			40	.001157	-.000001

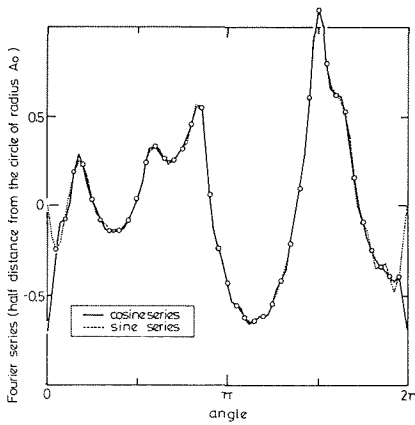
Results by the traditional analysis

Results by the present analysis →

の(非零)正弦係数と余弦係数は比例関係にあることである。

逆変換による6角形での標本点値の復元数値は、 $A_0/2$ の修正をしない( $t=0$ を特異点とする)場合、表示を省略するが完全である。ここでは動径ベクトルの動き(輪郭状態)を強調するため、6角形の重心からの距離からこの相当径( $A_0$ )の長さの分を差引いた値に関しフーリエ変換し、この変換係数を用いて逆変換した際の様子を示す(Fig. 2)。端点を除いて正弦、余弦逆変換値の等価性が明らかである。加えてさらに別に詳しく報告する<sup>11)</sup>が逆変換式(変換級数式)からの補間部分の計算値は実用上十分な精度の期待できることが図より明らかである。この精度はフーリエ変換時の標本点の増加につれ端点以外で指数関数的に改善可能である。

以上は非対称形状の場合であるが、次に対称図形を調べてみる。例として二等辺三角形をとり、その結果をTable IIに記した。頂点、重心などは付記した通りである。なお従来法は重複をさけ



**Fig. 2** Inversed result for the reduced hexagon  
 -two series show same results at the sampling points (o). intermediates have only slight deviations except end regions.

るために省略した。表の結果より容易にわかるように、偶調和数の正弦係数は実質的に零である。これは偶関数では従来法での正弦一余弦展開展開で正弦係数が不要なことに対応している。ところで本法の結果では、正、余弦展開の随意選択で偶関数情報が奇調和数の正弦係数に移行していることである。一方本法での余弦変換で本来不要となるべき奇調和数係数は、計算誤差の範囲で一定値をとっている。この一定性と最終的不要性（省略可能性）は次のように明らかなものである。

$$\sum_{k=1,3}^{N-1} A_k \cos\left(\frac{\pi kt}{N}\right) = A \sum_{k=1}^{[N/2]} \cos\left(\frac{\pi(2k-1)t}{N}\right)$$

(provided with  $A_{2k-1} = \text{const} = A$ )

$$= A \frac{\sin\left(2 \cdot \frac{N}{2} \cdot \frac{\pi t}{N}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi t}{N}\right)} = 0 \quad (\because \sin(\pi) = 0) \quad (15)$$

**Table II** Analytical example for a triangle isoscale

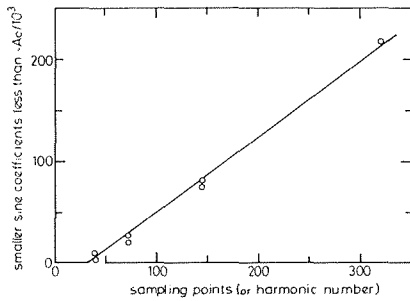
```

12:45:45 plot end & start of Fourier analysis
center of gravity (xc,yc)=( 0 , 0)
area 7.6456
peripheral 16.6491
points of apex, original 3
.... , contracted 3
apex used
4, 0, -2, 2, -2, -2,
not contracted
12:49:23 Fourier conversion end
    
```

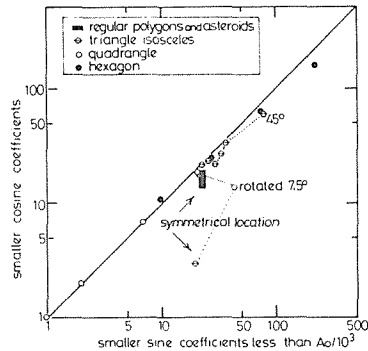
k	cos coeff	sine coeff	k
0	1.88771	0	0
1	.0499988	1.16017	1
2	.0638169	7.30157E-08	2
3	.0500004	.333894	3
4	.273577	2.33948E-07	4
5	.0499996	.588571	5
6	-.225233	-1.80304E-07	6
7	.0499991	.117194	7
8	1.98295E-03	-2.44379E-07	8
9	.0499992	.206657	9
10	-.148994	-9.92417E-07	10
11	.0499997	-.0272139	11
12	.056518	-4.32134E-07	12
13	.049999	.0953591	13
14	-.0272842	-1.055 E-06	14
15	.0499999	-7.97713E-04	15
16	.0874018	2.5332 E-07	16
17	.0499985	.116094	17
18	-.0143405	-1.12057E-06	18
19	.0499994	.0421995	19
20	.0398352	-4.52995E-07	20
21	.0499979	.106744	21
22	-.0492489	-1.50502E-06	22
23	.0499998	.0192844	23
24	6.61381E-03	-1.04904E-06	24

25	.0499988	.0549402	25
26	-.0436841	-1.51396E-06	26
27	.0500004	-.0171003	27
28	.024504	-1.3113 E-06	28
29	.0499991	.0299202	29
30	-.0119892	-2.20537E-06	30
31	.0500012	-.013063	31
32	.0407414	-7.45058E-07	32
33	.0499997	.0428116	33
34	-.010195	-1.57505E-06	34
35	.0499998	2.87325E-03	35
36	.0222338	-8.24034E-07	36
37	.04999988	.0426479	37
38	-.0328309	-3.39672E-06	38
39	.0500008	-.013342	39
40	5.48237E-03	-1.22848E-06	40

正弦展開と余弦展開の互換性については調べて来た通りである。さて形状記述子は単に対象とした形を逆変換で復元可能なことの他に各種の図形特徴の抽出での使用が望まれる。加えて係数には出来れば情報が分散して同じ程度の数値的の大きさをとっているよりはある限られた割合の有効性をもつものと、省略してもさしつかえないものに大別されるのが望ましいと考えられる。す



**Fig. 3** Comparison of two smaller coefficients  
-symmetrical location concentrates informations into sine coefficients-



**Fig. 4** Linear increase of smaller sine coefficients with the sampling points  
-Polygons, triangles, penta-, hexa-gons etc-

なわち正弦係数あるいは余弦係数集合で省略可能な程度の大きさをもつ係数の様子に差異があるか否かである。これへの影響因子は解析対象の図形の形状、標本点数の大きさが考えられよう。*Fig. 3* は正弦、余弦係数中浮動小数点数化した (0.01 以下で小さな数と仮定) ものの個数を調べたものである。直前の余弦係数中、最終的には不要であるが、途中一定値をもつ係数があつたことに対応して、正弦係数に小さなものが数多くみられる。特に対称的配置にあつてこれが顕著である。次いで標本点数の増加 (分解精度向上) 時の小さい正弦係数の個数調査の結果を *Fig. 4* に示した。縦軸は上述と同様小さな係数の目安として浮動小数点化したものである。この結果図形が対称的配置をとらない場合でも正弦係数に小さい値をもつものが多くそれだけ情報の濃縮が予想される。標本点数が多くなると小さい正弦係数の割合もわずかに増加の傾向にある。

係数の大きさの分布については標本点数 320 程度での前記 6 角形の正、余弦係数を 0.5 桁で級分けしその個数をみると *Fig. 5* のようであった。分布形は顕著な最大値をもっているが単峰性ではなく簡単な統計的分布をもっている訳ではないようである。

Fig. 6 は同じく六角形の場合であるが情報が濃縮している正弦係数に関し、骨格成分（奇調和数）がどの程度の標本点数以上で落ちついた状態になるかを示したものである。低調和数成分は

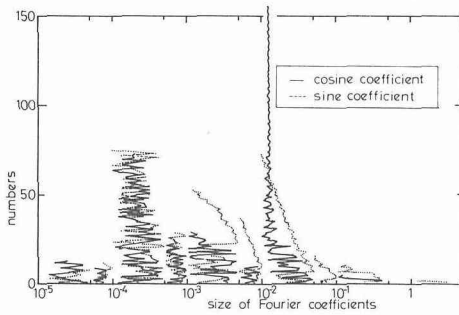


Fig. 5 Distribution of coefficients for the hexagon

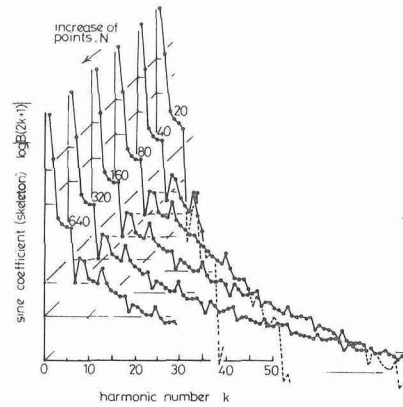


Fig. 6 Spectra of  $B(2k+1)$  vs  $k$  for sampling  $N$

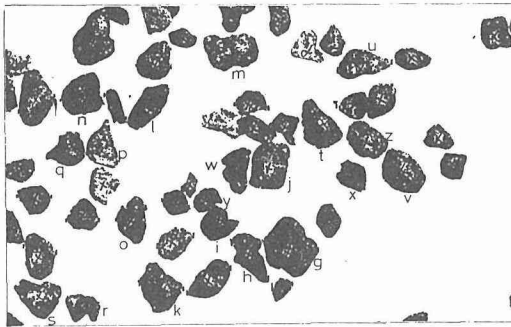


Fig. 7 Char particles (subset)

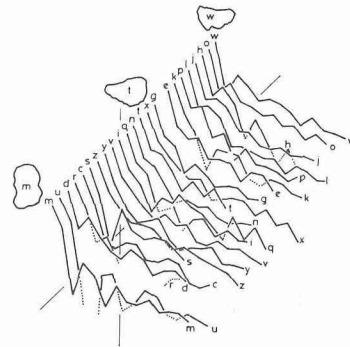


Fig. 8 Char particles,  $B(2k+1)$

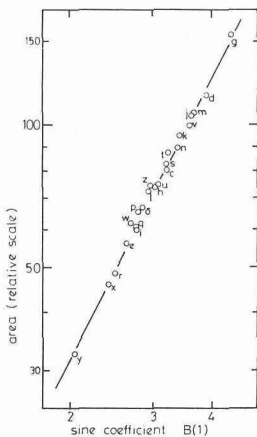


Fig. 9 Relation between area and the sine coefficient (char particles) - confirmation of normalization-

高調和数成分より早く落ちつくのが明らかである。N=40 程度以上であれば個々の係数の内容が実質上 N の影響を受けないとみなして良いものと思われる。微細構造成分（偶調和数）の図示は紙面の都合上省略したが、折線の形は別として標本点数の効果については同様のことが言える。

ii) 実在粒子の取扱い

実在粒子として太平洋炭チャー(# 14-16)の一部未反応残渣物を取りあげた (Fig. 7)。大きさを整えていないので大小、形状の不揃いがある。系統的な解析にはある種の分級が必要と考えられるが、ここでは例示的ということで分級操作を加えていない。

Fig. 8 は前図の粒子など、いくつかの物のフーリエ係数（正弦係数対数値）である。各係数は B(1)で規格化後、仮に B(1)と B(3)の差の大小で並べてある。手前の方、中間部、奥の方で係数の挙動に僅かではあるが、ある特徴が見うけられる。

Fig. 9 は正弦係数  $B(1)$  と粒子の投影面積の関係を示したものである。形状のみかけ上の大きな差異にかかわらず、面積が大きいと相応して  $B(1)$  の大きくなるのが明らかである。しかも両者間には  $\text{area} \propto B(1)^2$  の関係があり、係数  $B(1)$  は形状解析に際して大きさの規格化因子として使用可能なことを示している。

Fig. 10 は Fig. 8 にかえ、粒子輪郭の規格化周辺長と総ての正弦係数の絶対値和の関係に基づき粒子の順序付けをしたものである。対応は必ずしも完全ではないが類似の粒子は近くに集まっている。

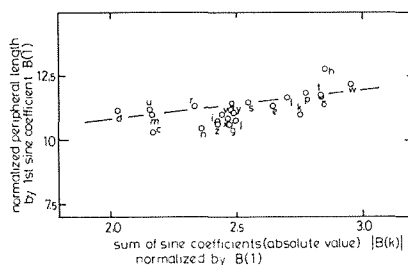


Fig. 10 Ordering of char particles  
-a trial plot-

粒子形態を特徴付ける指標は単に周辺長、面積、係数和に限るものではなく、非常に数多く報告されている。粒子形状の復元は完全に可能であるこのフーリエ記述子については現在のところ利用可能な集積データが僅かであり、今後の蓄積と各種指標の利用による粒子形状解析、粉粒体材料設計について鋭意検討、報告の予定である。

## 5. 結 論

粒子形状解析に使用される離散フーリエ変換法について新しい提案を行った。その内容は従来の被変換関数の偶奇性で三角関数を使い分けるのでなしに、対称性の薄い(無い)被変換関数を扱う場合にも正弦、余弦変換のいずれか一方を任意に選んでもよいし、また両変換を共存させてもよいものである。報告した方法は変換の選択に自由度をもたせたことに加えて、正弦、余弦係数にあつて、従来位相差効果存在のため同列に比較出来なかつた欠点を取り除いたものである。さらに逆変換時のデータ補間についても従来法の不十分さを補っているという特徴がある。本法での数値的、内容的検討はいわゆる離散型低速フーリエ変換を用いて行われたものであるが、高速変換法にあつても複素指数関数部の簡単な修正により容易に内容を振張出来ると考えられる。これによりアルゴリズムの単純化と共に演算速度へのよい効果も期待出来る。

本変換法の適用は多角形状の粒子について行うということで、まずその模擬図形三～六凸角形を用いた。図形はフーリエ解析の結果擬六尖点図形(骨格構造)と二組の三葉体(微細構造)に分離出来る。報告中では六凸角形の場合を詳しく記した。また情報が正弦係数に濃縮して得られる傾向を対称的な配置下の二等辺三角形で確めた。

応用を目的とした実在粒子としては、水性ガス化時に得られた一部未反応物を含む太平洋炭のチャー粒子を対象とした。解析ではその投影面積と正弦係数  $B(1)$  の間の一定な関係を明らかにし、この係数が大きさの規格化因子となり得ることを示した。次いで周辺長(図形輪郭の凹凸度と関連が深い)と正弦係数(絶対値)総和での整理をはかり、粒子分類の手掛かりを示した。

## 参 考 文 献

- 1) Ahmed, N., Natarajan, T. and Rao, K. R.: "Discrete cosine transform", IEEE Trans. Comput., C 23, pp. 90-93 (1974)
- 2) Beddow, J. K. and Philip, G.: "On the use of a Fourier analysis technique for describing the shape of individual particles", Planseeber, 23, pp. 3-14 (1975)
- 3) Beddow, J. K. and Meloy, T. P. edn.: "Advanced Particulate Morphology", CRC Press, Fl (1980)
- 4) Beddow, J. K. edn.: "Particle Characterization in Technology", vols I, II, CRC Press, Fl (1984)
- 5) Beddow, J. K.: "Size, shape and texture analysis", 第1回形の科学国際シンポジウム, (招待講演), (筑波大学), (1985.11)

- 6) Cosgriff, R. L. : "Identification of shape", Ohio State Univ. Res. Found. Columbus Rep. 820-11, ASTIA AD 259792 (1960. 12)
- 7) Ehrlich, R. and Weinberg, B. : "An exact method for characterizing grain shape", J. Sediment. Petrol., 40, pp. 205-212 (1970)
- 8) Luerkens, D. W., Beddow, J. K. and Vetter, A. F. : "Morphological Fourier descriptors", Powder Techn., 31, pp. 209-215 (1982)
- 9) Luerkens, D. W., Beddow, J. K. and Vetter, A. F. : "A generalized method of morphological analysis (the RS) method", Powder Techn., 31, pp. 217-220 (1982)
- 10) Meloy, T. P. : A hypothesis for morphological characterization of particle shape and physicochemical properties", Powder Techn., 16, pp. 233-253 (1977)
- 11) 仲山伸二・柴田俊春・山口賢治 : "離散フーリエ変換法の改良と粒子輪郭形状解析への適用", 第21回応用物理学会北海道支部学術講演会(北海道大学)(1986(s. 61. 1))
- 12) Rosenfeld, A. and Kak, A. C. : "Digital Picture Processing", Academic Press, NY, (1976)
- 13) Schwarcz, H. P. and Shane, K. C. : "Measurement of particle shape by Fourier analysis", Sedimentology, 13, pp. 213-231 (1969)
- 14) Shanmugam, K. S. : "Comments on "Discrete cosine transform"" IEEE Trans. Compt., C 24, p. 759 (1975)
- 15) Shibata, T. and Yamaguchi, K. : "A simplified discrete Fourier transformation and its application for a particle shape analysis", IEEE Trans, Compt., submitting
- 16) 柴田俊春・吉木宣比・山口賢治 : "粒子形状の解析", 化学工学協会米沢大会研究発表講演要旨集, B 112, pp. 89-90, (山形大学)(1985(s. 60. 7))
- 17) 上坂吉則・太原育夫 : "パソコンで学ぶパターン認識と図形処理", 文一総合出版(東京)(1984)
- 18) 山口賢治 : "粉体の粒子形状表示", セラミックス, 19, pp. 962-968 (1984)
- 19) 吉澤正 : "数値解析 II", (岩波講座, 基礎工学), pp. 97-166, 岩波書店, (1968)
- 20) Zahn, C. T. and Roskies, R. Z. : "Fourier descriptors for plane closed curves", IEEE Trans. Compt., C 21, pp. 269-281 (1972)

## 付 録

### 新フーリエ変換法の証明

任意の関数  $f(t)$  が前述のように全区間形の正弦一余弦係数を用いて表現可能であること、次いで同表現式中の正弦級数項と余弦級数項は特異点を除いた残りの領域(点集合)で実は同じ値を与え、従って交換可能であることを証明する。

(正弦一余弦展開表現式の証明)

常法<sup>19)</sup>により先の係数  $A_k$ ,  $B_k$  (12, 13) を逆変換式(9)に代入し, その和を求めたとき, これが標本点  $t = 0, 1, \dots, N$  で  $f^{tr}(t) (=f(t) - A_0)$  に等しくなることを示す。今逆変換式の右辺をかりに  $S$  とおくと次式を得る。

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} A_k \cos\left(\frac{\pi kt}{N}\right) + \sum_{k=1}^{N-1} B_k \sin\left(\frac{\pi kt}{N}\right) + \frac{A_N}{2} \cos(\pi t) \\
 &= \frac{1}{2N} \sum_{t'=0}^{N-1} f^{tr}(t') \cos\left(\frac{\pi kt'}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi kt}{N}\right) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{t'=0}^{N-1} f^{tr}(t') \cos\left(\frac{\pi kt'}{N}\right) \cos\left(\frac{\pi kt}{N}\right) + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{t'=0}^{N-1} f^{tr}(t') \sin\left(\frac{\pi kt'}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi kt}{N}\right) + \frac{1}{2N} \sum_{t'=0}^{N-1} f^{tr}(t') \cos(\pi t') \cos(\pi t) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{t'=0}^{N-1} f^{tr}(t') g(t, t')
 \end{aligned} \tag{A1}$$

(A1)中右辺第3式中の  $g(t, t')$  は三角関数の加法定理

$$\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A-B) \quad (\text{A2})$$

を用いて次のような形をとっている。

$$g(t, t') = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi k(t-t')}{N}\right) + \frac{1}{2} \cos(\pi t') \cos(\pi t) \quad (\text{A3})$$

さて  $g(t, t')$  の内容を変数  $t, t'$  の組み合わせで考える。

$t=t'$  の場合

$$g(t, t') = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} \cos(0) + \frac{1}{2} = N \quad (\because \cos^2(\pi t) = 1) \quad (\text{A4})$$

この結果を最初の  $S$  を求めた式(A1)に代入して

$$S = \frac{1}{N} f^{tr}(t) \cdot N = f^{tr}(t) \quad (\text{A5})$$

となり、 $t=t'$  のとき前掲式(A1)が成立することがわかる。

一方、 $t, t'$  が整数でありかつ相等しくない場合、関数  $g(t, t')$  は恒等的に零になる。それを差  $t-t'$  が偶数の場合、および奇数の場合にかけて証明する。

$t-t' = 2m$  の場合 ( $m$  は非零整数)

$$\begin{aligned} g(t, t')_{t-t'=2m} &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} \cos\left(\frac{2m\pi k}{N}\right) + \frac{1}{2} (\cos(2m\pi) - \sin(\pi t) \sin(\pi t')) \\ &= \sum_{k=1}^N \cos\left(\frac{2m\pi k}{N}\right) \quad \left(\because \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2m\pi) = \cos\left(\frac{2m\pi k}{N}\right)_{k=N}, \sin(\pi t) = 0\right) \\ &= \cos\left(\frac{N+1}{2} \cdot \frac{2m\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{N}{2} \cdot \frac{2m\pi}{N}\right) / \sin\left(\frac{2m\pi}{2N}\right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

上式(A6)が  $t-t' = 2m$  で零になるのは右辺の下線部が零になることによる。なお最終式への変形は次の関係による。

$$\sum_{r=1}^N \cos(rx) = \cos\left(\frac{(N+1)x}{2}\right) \sin\left(\frac{Nx}{2}\right) / \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad (\text{A7})$$

$t-t' = 2m+1$  の場合 ( $m$  は整数)

$$g(t, t')_{t-t'=2m+1} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} \cos\left\{\frac{(2m+1)\pi k}{N}\right\} + \frac{1}{2} \left(\cos\{(2m+1)\pi\} - \sin(\pi t') \sin(\pi t)\right) \quad (\text{A8})$$

上式中次の関係を容易に利用出来るので級数和部分だけが残る。

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos((2m+1)\pi) = 0, \quad \sin(\pi t) = 0$$

さらに上述の余弦級数和の関係を用いて

$$g(t, t')_{t-t'=2m+1} = \cos\left(\frac{N \cdot (2m+1)\pi}{2N}\right) \sin\left(\frac{(N-1) \cdot (2m+1)\pi}{2N}\right) / \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2N}\right) = 0 \quad (\text{A9})$$

を得る。なおこの式の零値も下線部が零であることによる。

以上述べたように  $t \neq t'$  なら、その差(整数)の偶奇によらず  $g(t, t')$  は零になる。従って  $f^{rr}(t)$  は錯綜した表現をとることはない。ただし  $t$  と  $t'$  の差が整数でなく例えば半整数値であるようなときにはこの限りでない。

(正弦級数, 余弦級数互換性の証明)

上で証明したように  $t=t'$  のときの級数和の表現が可能になったので次式が成立する。

$$f^{rr}(t) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} f^{rr}(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} \cos^2\left(\frac{\pi kt}{N}\right) + \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2\left(\frac{\pi kt}{N}\right) + \frac{1}{2} \cos^2(\pi t) \right\} \quad (\text{A10})$$

ところで  $\cos^2(\pi t) = 1$ ,  $\cos^2(\pi t) = \cos^2(\pi kt/N)_{k=N}$ ,  $\sin^2(\pi t) = 0$  であるから  $f^{rr}(t)$  は、次のように簡単化される。

$$f^{rr}(t) = \frac{1}{N} f^{rr}(t) \left\{ \sum_{k=1}^N \cos^2\left(\frac{\pi kt}{N}\right) + \sum_{k=1}^N \sin^2\left(\frac{\pi kt}{N}\right) \right\} \quad (\text{A11})$$

上式は  $t=0$  の時には余弦項のみが残り正弦項は関与しないが、式(A1)の成立は明らかである。

次いで  $t \neq 0$  の場合を考える。この時も級数項を組みかえて二乗和の基本関係式を用いると全体として式の恒等性の成立は明らかであるがここでは各級数について別々にそのかかわりかたを調べる。正弦関数, 余弦関数の二乗値を級数項とする次の関係を引用する。

$$\sum_{k=1}^N \cos^2\left(\frac{\pi kt}{N}\right) = \frac{N}{2} + \frac{\cos\left(\frac{(N+1)\pi t}{N}\right) \sin\left(\frac{N\pi t}{N}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi t}{N}\right)} = \frac{N}{2} \quad (\text{A12})$$

$$\sum_{k=1}^N \sin^2\left(\frac{\pi kt}{N}\right) = \frac{N}{2} - \frac{\cos\left(\frac{(N+1)\pi t}{N}\right) \sin\left(\frac{N\pi t}{N}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi t}{N}\right)} = \frac{N}{2} \quad (\text{A13})$$

この結果は二乗値の正弦級数和と余弦級数和とが等しいことを意味し、従っていずれか片方の和で関数  $f^{rr}(t)$  を表現するとして、級数和を2倍しておけばよいことが明らかである。ただし正弦級数のみの利用で  $t=0$  の場合にも特異性を許さない条件では  $f^{rr}(0) = 0$  となるよう係数  $A'_0$  を調整しておけばよい。なお  $t=0$  を特異点とし、別に扱うのであれば  $f^{rr}(t)$ , あるいは  $A'_0$  の導入は必ずしも必要ではない。  
(証明終)

Prog. Example of the procedures

- all of these are not always required in the flow -

```

0010 'note
0011 ' "" is remarks
0012 ' line numbers with "." are referred
1000 P3=6 :P4=P3 :PO$=".." :P2=6.28319 :TS=9 :N=360/TS :EPS=1E-05 :dim X(P3),Y(P3),Q(P3),F(N),L(P3),A(N),B(N) :
                                cmd cls3 : ' CRT erase
1010 for Z=1 TO 1 step 2 :restore :for I=1 to P3 :read X1,Y1 :X(I)=X1 :Y(I)=Y1 :next I
1020 'for Z=0 to 90 step 15 :restore :SZ=sin(P2/360*Z) :CZ=cos(P2/360*Z)
1030 ' for I=1 to P3 :read X1,Y1 :X(I)=Y1*SZ+X1*CZ :Y(I)=Y1*CZ-X1*SZ :next I :
1040 '
1050 X1=X(I) :Y1=Y(I) :if (X1.0 and Y1.=0) or (X1.0 and Y1.0) then QD=1 :goto 1080 : ' quadrant of start point location
                                k & k1 should be 1 & 2 at qd=1,
                                when qd=2, then k & k1 should be incremented
1070 if (X1.=0 and Y1.0) or (X1.=0 and Y1.0) then QD=2 :goto 1080 else print "the point at zero " :QD=0
1080. INW=1 :print "start from "time$ :input "center of gravity/yes, average/av or any/.." :N$
1090 if N$="yes" then gosub 1110 :goto 1360 else if N$="av" then gosub 1250 :goto 1360
1100 input "xc,yc";XC,YC :gosub 1270 :goto 1360 : ' key-in base point
1110. ' sub center of gravity for polygon
1120 XC=0 :YC=0 :AA=0 :X1=X(1) :Y1=Y(1) :PO$="pos" :LO=(X1-X(2)).2+(Y1-Y(2)).2)..5 :LK=LO :LE=LO
1130 for J=1 to P3-2 :LS=0 :XC=0 :YC=0 :K=1
1140 for I=1 to 3 :on I goto 1190,1180,1170
1170. K=K1 :LK=(X1-X(K1)).2+(Y1-Y(K1)).2)..5 :S3=LK :goto 1200
1180. K=J+1 :K1=K+1 :LK=(X(K)-X(K1)).2+(Y(K)-Y(K1)).2)..5 :S2=LK :LE=LE+LK
1190. L(K)=LK :if K=1 then if J=1 then S1=LK else S1=S3
1200. LS=LS+LK :XC=XG+X(K) :YG=YG+Y(K) :next I :LS=LS/3 :XG=XG/3 :YG=YG/3 :A1=LS*LS :L(1)=LK
1210 for I=1 to 3 :LL=(3-I)*(2-I)*(S1-S2)+S2+(I-1)*(3-I)*(S2-S3)+S3 :A1=A1*(1-LL/2/LS)..5 :next I :J1=J+1 :J2=J+2
1220 if abs(Y(J1)-Y1)+abs(X(J2)-X1).EPS and (X(J1)-X1)*Y(J2)+X1*Y(J1)-Y1*X(J1).(Y(J1)-Y1)*X(J2) then A1=-A1 :PO$="neg"
1230 XC=XG+XG*A1 :YC=YG+YG*A1 :AA=AA+A1 :next J :LE=LE+LK :L(1)=LO :XC=XG/AA :YC=YC/AA :gosub 1270 :return : '
                                aa, le are total area & peripheral length, respectively
1250. ' sub simple average of apex
1260 XC=0 :YC=0 :for J=1 to P3 :XC=XG+X(J) :YC=YG+Y(J) :next J :XC=XG/P3 :YC=YC/P3 :gosub 1270 :return : '
1270. ' sub the coordinate locates ins/out or on silhouette
1280 IS$="out" :if PO$="pos" then IS$="ins" :return else for J=1 to P3 :I1=I-1 :if I1=0 then I1=P3
1290 X1=X(I) :Y1=Y(I)-Y(I1) :XS=X1-X(I1) :XIC=XG-XI :YIC=YC-Y(I) :BYI=abs(YIC) :AXS=abs(XS) :AYS=abs(YS)
:if AXS.EPS or AYS.EPS then 1310 else SL=YS/XS :SG=sgn(SL)
1300 if BYI+(1-sgn(XIC*(XS+XIC))).EPS or YC*SG.SG*(SL*(XS+XIC)+Y(I1)) then 1340
:if BYI.EPS then IS$="on" :goto 1340 else 1330
1310. if abs(XIC)+(1-sgn(YIC*(YC-Y(I1))))).EPS then 1340 else if abs(XIC).EPS then IS$="on" :goto 1340 else 1330
1320 if YC*SG.SG*(SL*(XC-X(I1))+Y(I1)) then return : 'exit of 1270
1330. next I
1340. IS$="ins" :return : 'exit of 1270
                                location of centeroid has been checked
1360. print "to "time$ for pre-treatment such as aa, le and cg"
:input "no print? print/prt else any";NP$ :print "f(t) calc & plot from "time$
1370 print : print" ##### (xc,yc)=",XC,"",YC,"" ##### ;K=(P3-2)*(QD-1)+1
1380 for T=0 to 180 step TS :TO=T/360*P2 :TG=tan(TO) :TY=0 : '
                                if initial parameter is not zero, then tk=1 else tk=0
1390 if NP$="prt" then print using "##### , ##.##### ";T,TO;
1400 '
1410 IP=0 :for I=1 to P3 :I1=I-1 :if I1=0 then I1=P3 : ' solutions for a system of eqs
                                ip, # of soln
1420 X1=X(I) :Y1=Y(I) :X1=X1-X(I1) :if abs(X1).EPS then if T=90 then 1530 else XA=X1 :YA=IG*(XA-XC)*YC :goto 1460
1430 SL=(Y1-Y(I1))/X1 :if TG=SL then 1530 else XA=XG :if SL=0 then YA=Y1 :XA=XG+(YA-YC)/TG :goto 1460
                                else if T=0 then YA=YC :XA=X1+(YA-Y1)/SL :goto 1460
1440 if T..90 then XA=(TG*XG-X1*SL+Y1-YC)/(TG-SL)
1450 YA=SL*(XA-X1)+Y1 :goto 1460 : '
                                1530 is pseudo solution but 1460 is true one?
1460. ' start of solution check
1470 Z1=YA-Y(I) :W1=abs(Z1) :if W1.EPS then Z1=0 :W1=0
1480 Z2=YA-Y(I1) :W2=abs(Z2) :if W2.EPS then Z2=0 :W2=0
1490 Z3=XG-X(I) :W3=abs(Z3) :if W3.EPS then Z3=0 :W3=0
1500 Z4=XG-X(I1) :W4=abs(Z4) :if W4.EPS then Z4=0 :W4=0
1510 if (W1+W3)*(W2+W4)+ZE.EPS then ZE=ZE+1 :goto 1530 else if Z1*Z2.=0 and Z3*Z4.=0 then 1550 : ' pseudo else true...
1520 ' pseudo solution
1530 Q(I)=0 :if I..P3 then print " ";
1540 goto 1600 :

```

```

1550 ' true solution
1560 IP=IP+1 :R=((XA-XC)+(YA-YC).2)..5 :Q(I)=R :if IP=1 then NO=I else OI=I
1570 if O.K and OI.K1 then INV=-INV
1580 if IS$="out" then T5=T :gosub 1700 :T5=T+180 :gosub 1700
1590 if NP$.."prt" then 1600 else print R;
1600. next I :if NP$="prt" then print
1610 K=0 :K1=O1 :V=(K1*(1-INV)+K*(1+INV))/2 :V1=(K*(1-INV)+K1*(1+INV))/2
:if IS$="out" then 1630 else R=Q(V) :T5=T :gosub 1700 :F(T/TS)=R :R=Q(V1) :T5=T5+180 :gosub 1700 :F((T+180)/TS)=R
1630. print :next T :

1650 lprint time$"plot end & start of Fourier analysis " : gosub 1880 :gosub 1720 :lprint time$" end of analysis"
1670 next Z :stop :
,
1700.' sub plot
1710 cmd line(100,50)-(560, 50) :cmd line(100,150)-(560,150) :cmd line(100,50)-(100,150) :cmd line(560, 50)-(560,150)
:cmd pset(100+T5*46/36,150-R*10) :return :'exit of 1700
,
1720.' sub Fourier analysis
1730 for K=0 to N :A(K)=0 :B(K)=0
1740 for T=0 to N-1 :KT=P2/2/N*%K*T :if KT.P2 then KI=KT-P2
1750 if F(T).EPS then A(K)=A(K)+F(T)*cos(KI) :B(K)=B(K)+F(T)*sin(KI)
1760 next T :A(K)=A(K)/N :B(K)=B(K)/N
1770 next K : lprint time$" Fourier conversion end"

1780 lprint "t","f(t)","t","f(t)" :for T=0 to N-1 step 2 :lprint T,F(T),T+1,F(T+1) :next T :lprint :lprint
1810 lprint "k","cos coeff","sine coeff" :for K=0 to N :lprint K,A(K),B(K) :next K
:lprint :lprint :lprint "t",f(t),"cos","sin","inv Fourier"
1840 for T=0 to N-1 :F8=0 :F9=(A(O)+A(N)*cos(P2/2/T))/2 :KI=P2/2/N*%T
:for K=1 to N-1 :F8=F8+B(K)*sin(KI*%K) :F9=F9+A(K)*cos(KI*%K) :next K :lprint T,F(T),F9,F8,F8+F9
1850 next T : lprint :lprint
1860 return :'exit of 1720
,
1880.' sub wright out of characteristic list
1890. lprint
1900 if N$="av" then lprint "averaged center";
1910 '
1920 lprint "(xc,yc)=";"XC;" "YC;"")"
:lprint "area "AA :lprint "peripheral "LE
:lprint "points of apex, original "P4
:lprint ".... ,contracted"P3
:lprint "apex used "
1950 for I=1 to P3 :lprint X(I),Y(I), :next I :lprint :if P3=P4 then lprint "not contracted" else lprint "contracted"
1960 return :'exit of 1890
,
2050 ' data contraction ..... small number epj will be required for comparison
2060 J=1 :'epj=eps?
2070. J1=J+1 :J2=J+2 :A1=abs((Y(J)-Y(J2)))*(X(J)-X(J1))) :A2=abs((X(J)-X(J2)))*(Y(J)-Y(J1)))
:if A1+A2.=EPJ then lprint "narrow crack at x(";J1;") A3=2*abs(A1-A2)/(A1+A2)
2080 if A3.EPJ then 2100:'
2085 for K=J2 to P3 :X(K-1)=X(K) :Y(K-1)=Y(K) :next K :'
2090 P3=P3-1 :J=J+1 :if P3,4 or J.=P3 then return else 2070 :'exit of 2050
2100.'
2110 end
5000 data .....

```