



Title	一般化されたシャノンの標本化定理 : 標本点を不等間隔にした補間公式
Author(s)	八重樫, 光俊; Yaegashi, Mitsutoshi; 長島, 知正 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 133, 47-58
Issue Date	1986-10-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42010
Type	departmental bulletin paper
File Information	133_47-58.pdf



一般化されたシャノンの標本化定理

—— 標本点を不等間隔にした補間公式 ——

八重樫 光俊* 長島 知正** 五十嵐 悟*

(昭和61年 6月30日受理)

A Generalization of Shannon's Sampling Theorem

Mitsutoshi YAEGASHI, Tomomasa NAGASHIMA and Satoru IGARASHI

(Received June 30, 1986)

Abstract

Shannon's sampling theorem is a well known fundamental theorem in relation to discretizing continuous quantities in signal processings. However, the condition to be satisfied by the theorem is much too strong for practical purposes, e.g. sampling intervals must be constant.

In this paper, we propose a new sampling formula which has a condition of not necessarily constant sampling intervals by employing an infinite product as a sampling function. Several examples of numerical calculation are presented.

1. 序 論

一般にシステムの動特性は連続時間の場合には微分方程式で、また離散時間の場合には差分方程式で記述される。従来、これら二つの型の力学系の性質は夫々が独立に調べられていることが多く、デジタル計算機を内部に組み込んだシステムを取り扱うことが必須とされる今日においても、それらの対応関係に関しては明確にいえることが乏しい現状にある。

ところで、連続時間の力学系の解と離散時間の力学系の解との原理的な対応関係を議論するために、標本化定理は重要な手掛りを与えてくれるものと考えられる。連続関数の標本化に関しては、一つの基本的な主張がシャノン標本化定理として、古くから情報理論や信号処理論で知られている。しかし同時にシャノンの定理は標本点が等間隔であることや対象が狭い意味での周期関数でなければならないという制約があることも周知のことである。ここでは整関数に対する各種の補間公式を統一的に導くための一つの基本定理を与え、それに基づいて、実用的な補間式(内挿公式)を構成するという立場からシャノンの標本化定理を拡張することを考える。すなわち、サンプリング間隔一定という制約を緩めると共に、対象となる関数のクラスを拡げること考える。そのために、本論文では標本化関数に無限乗積を選び、標本化展開の成り立つ十分条件を導出した。

* 精密工学科 精密機器学第二講座

** 室蘭工業大学

2. 標本化定理の拡張について

2.1 整関数に対する標本化定理の一般論

整関数に対して可能な標本化定理の一般論として次の定理が成り立つ。

[定理 1]

$f(z)$, $g(z)$ は整関数 ($z \in \mathbb{C}$) とする。 $g(z)$ は z_n に $(m_n + 1)$ 位の零点を持ち, $|z_n| \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ とする。 $(n, m_n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

このとき, $\{z_l\}_{l=0}^{k_n}$ のみを内部に含むジョルダン閉曲線 C_n の列 $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ が, 次の条件 i) ~ iv) を満たすように取れるとする。 $(k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

- | | | |
|--|---|-------|
| <ul style="list-style-type: none"> i) C_n は C_{n+1} の内部に含まれる。 ii) $R_n \equiv \min z (z \in C_n), R_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$. iii) C_n の長さを L_n とし, $L_n \equiv O(R_n)$. iv) ある定数 $K > 0$ と $\epsilon > 0$ に対し,
 $f(z) \leq K(1 + z ^\epsilon)^{-1} \cdot g(z)$ on $z \in \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. | } | (C-1) |
|--|---|-------|

このとき,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_n} \sum_{j=0}^s \frac{f_n^{(j)}}{j!} \frac{H_n^{(s-j)}}{(s-j)!} (z - z_n)^{s - m_n - 1} \cdot g(z) \quad (\text{F-1})$$

が成り立つ。ただし

$$f_n^{(j)} \equiv \left. \frac{d^j}{dz^j} f(z) \right|_{z=z_n}, \quad H_n^{(k)} \equiv \left. \frac{d^k}{dz^k} \frac{(z - z_n)^{m_n + 1}}{g(z)} \right|_{z=z_n}$$

である。

証明は紙面の都合で省略するが, 以下の方法で行える。すなわち, 複素関数論における $z \in \mathbb{C}$ での有理型関数の部分分数展開を考える。その際, 具体的に展開を構成するためのコーシーの方法に準じた方法で級数の収束を証明できる。

定理 1 は $g(z)$ を適当に選べば, 既知の補間式のほとんど全てを含み, 標本化定理が成り立つための一般的な十分条件を示していると考えられる。

また, この定理は留数計算を行えば $g(z)$ に応じて色々な補間式が得られることを示している。しかし, 展開が成り立つ $f(z)$ のクラスは閉曲線 C_n 上における標本化関数 $g(z)$ の大きさに依存するために, 展開式として使えるかどうかをチェックすることが難しく, 実用的ではない。

実用的な条件に近づける一つの方法として, 標本化関数 $g(z)$ の大きさを全複素平面上で零点を持たないような関数に置き換えることが考えられる。

2.2 標本化関数として無限乗積を用いた場合の展開式

定理 1 はシャノンの標本化定理が特殊な標本化定理の一つにすぎないものであることを示唆するが, ここでは, シャノンの標本化定理を拡張するために $g(z)$ に無限乗積を採った標本化展開を考える。無限乗積に関するワイエルストラスの定理によれば, 勝手な零点の列(発散列)を与えてもそれに対応する整関数を構成できるので, 定理 1 より, その整関数を標本化関数とする展開が考えられる。標本化関数として無限乗積を用いた場合, 零点の分布と乗積の大きさは結び付いているため, 標本化展開の成り立つ関数の条件が標本点の数列の性質によって表せる可能性があるが, 本論文では先ずその一段階として乗積の大きさを評価して, 展開の条件を求めることにする。ここでは, 無限乗積の一例として次の形のものを選ぶ。

$$\Phi(z) = z \prod_{l=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{a_l^2} \right); \quad a_l = l + \frac{\alpha}{l} \quad (-1 < \alpha \leq 2; l=1, 2, \dots).$$

この乗積の形は $\sin z$ を含むが、一般には狭い意味での周期関数ではない。

この関数を標本化関数とした場合、次の定理が成り立つ。

[定理 2]

整関数 $\Phi(z)$ を次のように定義する。

$$\Phi(z) = z \prod_{l=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{a_l^2} \right)$$

ただし、 $-1 < \alpha \leq 2$ として、

$$a_l = \begin{cases} l + \alpha/l & (l = \pm 1, \pm 2, \dots) \\ 0 & (l = 0). \end{cases}$$

このとき、正定数 K_0, K, ε と定数 $\beta (< 1)$ がとれて、

$$|\Phi(b_l)| \geq K_0 (b_l = (a_l + a_{l+1})/2; l = 0, 1, \dots) \quad (\text{C-2-1})$$

が成り立ち、かつ、整関数 $f(z)$ が、

$$|f(z)| \leq K(1 + |\pi z|^\beta) e^{\pi(1-\varepsilon)|\text{Im}z|} \quad (\text{C-2-2})$$

を満たすならば、

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^n \frac{f(a_m)}{\Phi'(a_m)} \frac{\Phi(z)}{z - a_m} \quad (\text{F-2})$$

証明：

C_n を、各辺が実軸または虚軸に直交し半径 b_n の円に外接する正方形の周とする。 z は C_n 内部の点とする。(必要な記号等を図 1 に示した。ここで、 $\xi = x + iy = re^{i\theta}$ とする。)

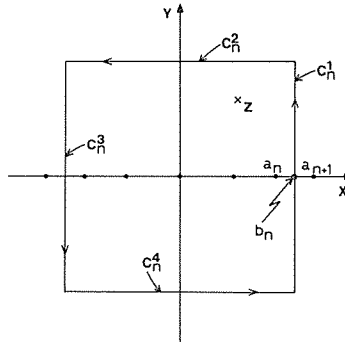


図 1 積分路 C_n (ただし $C_n = \bigcup_{j=1}^4 C_n^j$)

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)\Phi(\xi)} d\xi \quad (1)$$

を考える。コーシーの積分定理より、上式は C_n 内の留数として表され、

$$I_n(z) = \sum_{\{\text{C}_n \text{ 内の極}\}} \text{Res} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)\Phi(\xi)} \quad (2)$$

となる。ここで C_n 内には $\xi = z$ と $\xi = a_l$ ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$) にそれぞれ 1 位の極があることに注意して、それらの留数を求めると次のようになる。

$$\text{Res}_{\xi=z} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)\Phi(\xi)} = \frac{f(z)}{\Phi(z)} \quad (3)$$

$$\operatorname{Res}_{\zeta=a_l} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\Phi(\zeta)} = \frac{1}{\Phi'(a_l)} \frac{f(a_l)}{a_l-z} \quad (l=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n). \quad (4)$$

従って,

$$I_n(z) = \frac{f(z)}{\Phi(z)} + \sum_{l=-n}^n \frac{1}{\Phi'(a_l)} \frac{f(a_l)}{a_l-z}. \quad (5)$$

よって, $|I_n(z)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ならば (F-2) が得られる。以下, $|I_n(z)|$ を評価する。

$$\begin{aligned} |I_n(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\Phi(\zeta)} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^4 \int_{C_m} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)\Phi(\zeta)} \right| |d\zeta| \end{aligned} \quad (6)$$

(6)を $0 < |\arg \zeta| < \pi$ で成り立つ次の式 (証明は 2. 3 参照)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Psi(\zeta)|}{r} = \pi |\sin \theta|; \quad \Psi(\zeta) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta^2}{a_i^2} \right) \quad (r=|\zeta|, \theta = \arg \zeta) \quad (7)$$

を用いて変形する。(7)より,

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Psi(\zeta)|}{\pi |y|} = 1. \quad (8)$$

これは,

$$\forall \hat{\varepsilon} > 0, \exists \hat{C}_1; |y| > \hat{C}_1 \Rightarrow \left| \frac{\ln |\Psi(\zeta)|}{\pi |y|} - 1 \right| < \hat{\varepsilon}$$

ということであるから,

$$|\Psi(\zeta)| > e^{\pi(1-\hat{\varepsilon})|y|} \quad (|y| > \hat{C}_1). \quad (9)$$

従って, $|\operatorname{Im} \zeta| > \hat{C}_1$ の領域では,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\zeta)}{\Phi(\zeta)} \frac{1}{\zeta-z} \right| &= \left| \frac{f(\zeta)}{\Psi(\zeta)} \frac{1}{\zeta(\zeta-z)} \right| \\ &\leq \left| \frac{K(1+\pi^\beta |\zeta|^\beta) e^{\pi(1-\varepsilon)|y|}}{e^{\pi(1-\hat{\varepsilon})|y|}} \frac{1}{\zeta(\zeta-z)} \right| \\ &= K \frac{1+\pi^\beta |\zeta|^\beta}{|\zeta(\zeta-z)|} e^{\pi(-\varepsilon+\hat{\varepsilon})|y|}. \end{aligned} \quad (10)$$

$\hat{\varepsilon}$ は $\varepsilon - \hat{\varepsilon} > 0$ ととることができるので,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \hat{\varepsilon} > 0 \quad (11)$$

とおいて,

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\Phi(\zeta)} \frac{1}{\zeta-z} \right| \leq K \frac{1+\pi^\beta |\zeta|^\beta}{|\zeta(\zeta-z)|} e^{-\varepsilon_1 \pi |y|}. \quad (12)$$

(12)は, $b_\mu > \hat{C}_1$ を満たす最小の, 0 または正の整数を μ とすると $\forall n \geq \mu$ に対して $\zeta = \pm b_n + iy$ ($0 \leq |y| \leq \hat{C}_1$) の部分を除いた C_n 上で成り立つ。 $\zeta = \pm b_n + iy$ ($0 \leq |y| \leq \hat{C}_1$) の場合には次のような評価を行なう。 $\Psi(\zeta)$ の定義式から,

$$|\Psi(x+iy)| \geq |\Psi(x)| \quad (x, y \in \mathbf{R}) \quad (13)$$

であることは容易に計算できるので,

$$|\Psi(\pm b_n + iy)| \geq |\Psi(\pm b_n)| = |\Psi(b_n)|. \quad (14)$$

(14), $|\pm b_n + iy| \geq |b_n|$, および (C-2-1) から,

$$|\Phi(\pm b_n + iy)| \geq |\Phi(b_n)| \geq K_0. \quad (15)$$

従って,

$$\left| \frac{f(\xi)}{\phi(\xi)} \frac{1}{\xi-z} \right|_{\xi=\pm b_n+iy} \leq \frac{K\{1+\pi^\beta|\xi|^\beta\}e^{\pi(1-\varepsilon)|y|}}{K_0} \frac{1}{|\xi-z|}.$$

$|y| \leq \hat{C}_1$ より, $e^{\pi(1-\varepsilon)|y|}$ は上限が存在し, これを \hat{C}_2 とすると,

$$\left| \frac{f(\xi)}{\phi(\xi)} \frac{1}{\xi-z} \right|_{\xi=\pm b_n+iy} \leq \frac{K\hat{C}_2\{1+\pi^\beta|\xi|^\beta\}}{K_0} \frac{1}{|\xi-z|}. \quad (16)$$

このようにして, $\xi = \pm b_n + iy$ ($0 \leq |y| \leq \hat{C}_1$) の場合の評価式を得ることができた。

ここで $J_n^m(z)$ を次のように定義する。

$$J_n^m(z) = \int_{c_n^\pi} K \frac{1+\pi^\beta|\xi|^\beta}{|\xi(\xi-z)|} e^{-\varepsilon_1\pi|y|} |d\xi| \quad (m=2, 4; n=\mu, \mu+1, \dots) \quad (17)$$

$$J_n^m(z) = \int_{c_n^\pi} P(\xi) |d\xi| \quad (m=1, 3; n=\mu, \mu+1, \dots). \quad (18)$$

ただし, $P(\xi)$ は次式で定義する。

$$P(\xi) = \begin{cases} \frac{K\hat{C}_2}{K_0} \frac{1+\pi^\beta|\xi|^\beta}{|\xi-z|} & (0 \leq |y| \leq \hat{C}_1) \\ K \frac{1+\pi^\beta|\xi|^\beta}{|\xi(\xi-z)|} e^{-\varepsilon_1\pi|y|} & (|y| > \hat{C}_1). \end{cases}$$

$J_n^m(z) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) (付録参照) が成り立つので,

$$\begin{aligned} |I_n(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^4 J_n^m(z) \quad (n \geq \mu) \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (19)$$

がいえる。従って (F-2) が成り立つ。

2.3 複素平面上での無限乗積の評価

この節では(7)を証明する。証明には次の基本乗積の漸近評価に関する定理を用いる。

[定理]

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\lambda(n)} \right) e^{-z/\lambda(n)}; \quad \lambda(n) = n^{1/\rho} l(n) \quad (1 \leq \rho \leq 2). \quad (20)$$

ただし, $l(n)$ は次式を満たすものとする。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n l'(n)}{l(n)} = 0. \quad (21)$$

このとき, $\nu(t)$ を $\lambda(n)$ の逆関数とすれば $r \rightarrow \infty$ で次の評価式を得る。

$$\begin{aligned} \ln F(z) &= -z^2 \int_{\lambda(1)}^{\infty} \frac{\nu(t) dt}{t^2(t+z)} + \left\{ C_0 + \frac{1}{\lambda(1)} \right\} z - \frac{3}{2} \ln \{z + \lambda(1)\} + \ln \lambda(1) \\ &\quad + C + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (r \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (22)$$

ただし $|\arg z| \leq \pi - \eta$ ($\eta > 0$)。また, C, C_0 は次式で定義される。

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_1^n \ln \lambda(x) dx - \sum_{k=1}^n \ln \lambda(k) + \frac{1}{2} \ln \lambda(n) \right\} \quad (23)$$

$$C_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_1^n \frac{dx}{\lambda(x)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda(k)} \right\}. \quad (24)$$

この定理はイブグラフォフがスチルチェス積分を使って証明したものである。証明は参考文献1)に載っているが、この証明を追うと導かれた漸近式に間違いがあり、ここにあげた定理はそれを訂正したものである。この定理を使って以下で(7)を証明する。

[命題]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Psi(z)|}{r} = \pi |\sin \theta| \quad (0 < |\theta| < \pi; r = |z|, \theta = \arg z) \quad (25)$$

証明：

$\Psi(z)$ はその零点 a_l が $\sum_{l=1}^{\infty} (1/a_l) = +\infty$, $\sum_{l=1}^{\infty} (1/a_l^2) < +\infty$ なので、

$$\Psi(z) = \prod_{l=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_l}\right) e^{z/a_l} \cdot \prod_{l=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{a_l}\right) e^{-z/a_l} \quad (26)$$

という二つの基本乗積の積に分解される。 a_l は上の定理の十分条件を満たすので、この基本乗積に定理を応用して $|\Psi(z)|$ の漸近評価を求める。 $\alpha = 0$ の場合は $\nu(t) = t$ となり容易に計算できるので以下では $\alpha \neq 0$ の場合を計算する。(22)の積分項を、

$$I = \int_{\lambda(1)}^{\infty} \frac{\nu(t) dt}{t^2(t+z)} \quad (27)$$

とおく。 $t = n + \alpha/n$ の逆関数は、

$$\nu_1(t) = (t + \sqrt{t^2 - 4\alpha})/2 \quad (28-1)$$

$$\nu_2(t) = (t - \sqrt{t^2 - 4\alpha})/2 \quad (28-2)$$

の二つがある。 $-1 < \alpha \leq 1 (\alpha \neq 0)$ のときは $\sqrt{|\alpha|} \leq 1$ より $\nu(t) = \nu_1(t)$ となり、

$$I = \int_{\lambda(1)}^{\infty} \frac{\nu_1(t) dt}{t^2(t+z)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\lambda(1)}^b \frac{dt}{t(t+z)} + \frac{1}{2} \int_{\lambda(1)}^b \frac{\sqrt{t^2 - 4\alpha}}{t^2(t+z)} dt \right\} \quad (29)$$

となる。 $1 \leq \alpha \leq 2$ のときは定理の導出まで逆のぼって考え、

$$I = \int_{\lambda(1)}^{2\sqrt{\alpha}} \frac{\nu_2(t) dt}{t^2(t+z)} + \int_{2\sqrt{\alpha}}^{\infty} \frac{\nu_1(t) dt}{t^2(t+z)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\lambda(1)}^b \frac{dt}{t(t+z)} + \frac{1}{2} \int_{2\sqrt{\alpha}}^b \frac{\sqrt{t^2 - 4\alpha}}{t^2(t+z)} dt \right\} - \frac{1}{2} \int_{\lambda(1)}^{2\sqrt{\alpha}} \frac{\sqrt{t^2 - 4\alpha}}{t^2(t+z)} dt \quad (30)$$

となる。従って I を求めるには、

$$I_1 = \int_{\lambda(1)}^b \frac{dt}{t(t+z)}, \quad I_2 = \int_a^b \frac{\sqrt{t^2 - 4\alpha}}{t^2(t+z)} dt \quad (31-1, 31-2)$$

とおき、 $I_1|_{b \rightarrow \infty}$, $I_2|_{a=2\sqrt{\alpha}}^{b \rightarrow \infty}$, $I_2|_{a=\lambda(1)}^{b=2\sqrt{\alpha}}$, $I_2|_{a=\lambda(1)}^{b \rightarrow \infty}$ を求めればよい。これらの積分は有理関数の積分であり、積分が解析的に求まるかどうかは高次の多項式が因数分解できるかどうかにかかっている。本論文では数式処理言語 REDUCE3. 2 を使って計算した。以下で結果をまとめる。各積分は $z = x + iy$ とすると、

$$I_1|_{b \rightarrow \infty} = \tilde{I}_{11} + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \left[-\ln \lambda(1) + \frac{1}{2} \ln \{(x + \lambda(1))^2 + y^2\} - x \tilde{I}_{11} \right]. \quad (32-1)$$

ただし、

$$\tilde{I}_{11} = \frac{1}{|y|} \left\{ \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\lambda(1) + x}{|y|} \right\}. \quad (32-2)$$

$$I_2 = \int_a^b \frac{\sqrt{t^2 - 4\alpha} dt}{t\{(t+x)^2 + y^2\}} + (x - iy) \int_a^b \frac{\sqrt{t^2 - 4\alpha} dt}{t^2\{(t+x)^2 + y^2\}} = I_{21} + (x - iy) I_{22} \quad (33)$$

とおくと、

i) I_{21} の計算

$\sqrt{t^2-4\alpha} = u-t$ において置換積分すると、各積分区間は次のようになる。

イ) $\alpha \geq 1$ のとき $t: 2\sqrt{\alpha} \rightarrow \infty$ が $u: 2\sqrt{\alpha} \rightarrow \infty$ となる。もう一項は、
 $t: \lambda(1) \rightarrow 2\sqrt{\alpha}$ が $u: 2\alpha \rightarrow 2\sqrt{\alpha}$ になる。

ロ) $-1 < \alpha \leq 1$ ($\alpha \neq 0$) のとき $t: \lambda(1) \rightarrow \infty$ が $u: 2 \rightarrow \infty$ となる。

u についての積分区間を $[a', b']$ とすると、 $x \neq 0$ のとき、

$$I_{21} = \int_{a'}^{b'} \frac{2(u^2-4\alpha)^2}{(u^2+4\alpha)(u^2+p_1u+q_1)(u^2+p_2u+q_2)} du. \quad (34)$$

ただし、

$$p_1 = 2x + \sqrt{2} \sqrt{x^2 - y^2 - 4\alpha + \sqrt{(x^2 + y^2 + 4\alpha)^2 - 16\alpha x^2}} \quad (35-1)$$

$$p_2 = 2x - \sqrt{2} \sqrt{x^2 - y^2 - 4\alpha + \sqrt{(x^2 + y^2 + 4\alpha)^2 - 16\alpha x^2}} \quad (35-2)$$

$$q_1 = 4\alpha p_1 / p_2$$

$$q_2 = 4\alpha p_2 / p_1$$

(34)の被積分関数を部分分数に分解して、

$$I_{21} = 2 \int_{a'}^{b'} \left(\frac{A_1 u + B_1}{u^2 + 4\alpha} + \frac{C_1 u + D_1}{u^2 + p_1 u + q_1} + \frac{E_1 u + F_1}{u^2 + p_2 u + q_2} \right) du \quad (36)$$

とおく。この $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ を p_1 で表すと次のようになる。

$$A_1 = 0 \quad (37-1)$$

$$B_1 = -4\alpha / (x^2 + y^2) \quad (37-2)$$

$$C_1 = \{ -(x^2 + y^2 + 4\alpha)p_1^4 + 8x(x^2 + y^2 + 4\alpha)p_1^3 - 16x^2(x^2 + y^2 + 6\alpha)p_1^2 + 128\alpha x^3 p_1 \} / \Delta_1 \quad (37-3)$$

$$D_1 = \{ -(x^2 + y^2 + 4\alpha)p_1^5 + 8x(x^2 + y^2 + 2\alpha)p_1^4 - 16x^2(x^2 + y^2)p_1^3 - 32\alpha x(x^2 + y^2 + 4\alpha)p_1^2 + 64\alpha x^2(x^2 + y^2 + 4\alpha)p_1 \} / (2\Delta_1) \quad (37-4)$$

$$E_1 = -C_1 \quad (37-5)$$

$$F_1 = \{ -(x^2 + y^2 + 4\alpha)p_1^5 + 4x(3x^2 + 3y^2 + 16\alpha)p_1^4 - 48x^2(x^2 + y^2 + 8\alpha)p_1^3 + 32x(2x^4 + 2x^2 y^2 + 33\alpha x^2 + \alpha y^2 + 4\alpha^2)p_1^2 - 64\alpha x^2(19x^2 + 3y^2 + 12\alpha)p_1 + 256\alpha x^3(x^2 + y^2 + 4\alpha) \} / \Delta_1. \quad (37-6)$$

ただし、

$$\Delta_1 = (x^2 + y^2)(p_1^5 - 10x p_1^4 + 32x^2 p_1^3 - 32x^3 p_1^2 - 64\alpha x^2 p_1 + 128\alpha x^3). \quad (37-7)$$

よって、 $\mu_j = \sqrt{4q_j - p_j^2}$ ($j=1, 2$) とおくと、

イ) $\alpha > 0$ のとき

$$I_{21} \Big|_{a'=2}^{b'=\infty} = \frac{B_1}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) - C_1 \ln \frac{4+2p_1+q_1}{4+2p_2+q_2} + \frac{2(2D_1 - C_1 p_1)}{\mu_1} \\ \times \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{4+p_1}{\mu_1} \right) + \frac{2(2F_1 + C_1 p_2)}{\mu_2} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{4+p_2}{\mu_2} \right)$$

$$I_{21} \Big|_{a'=2\sqrt{\alpha}}^{b'=\infty} = \frac{B_1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\pi}{4} - C_1 \ln \frac{4\alpha + 2\sqrt{\alpha} p_1 + q_1}{4\alpha + 2\sqrt{\alpha} p_2 + q_2} + \frac{2(2D_1 - C_1 p_1)}{\mu_1} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{4\sqrt{\alpha} + p_1}{\mu_1} \right) \\ + \frac{2(2F_1 + C_1 p_2)}{\mu_2} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{4\sqrt{\alpha} + p_2}{\mu_2} \right)$$

$$I_{21} \Big|_{\substack{b'=2\sqrt{\alpha} \\ a'=2\alpha}} = \frac{B_1}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} \sqrt{\alpha} \right) + C_1 \left(\ln \frac{4\alpha + 2\sqrt{\alpha} p_1 + q_1}{4\alpha + 2\sqrt{\alpha} p_2 + q_2} - \ln \frac{4\alpha^2 + 2\alpha p_1 + q_1}{4\alpha^2 + 2\alpha p_2 + q_2} \right) \\ + \frac{2(2D_1 - C_1 p_1)}{\mu_1} \left(\tan^{-1} \frac{4\sqrt{\alpha} + p_1}{\mu_1} - \tan^{-1} \frac{4\alpha + p_1}{\mu_1} \right) \\ + \frac{2(2F_1 + C_1 p_2)}{\mu_2} \left(\tan^{-1} \frac{4\sqrt{\alpha} + p_2}{\mu_2} - \tan^{-1} \frac{4\alpha + p_2}{\mu_2} \right).$$

ロ) $\alpha < 0$ のとき

$\alpha = -\beta^2$ とおくと

$$I_{21} \Big|_{\substack{b'=-\infty \\ a'=2}} = \frac{-B_1}{2\beta} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta} - C_1 \ln \frac{4+2p_1+q_1}{4+2p_2+q_2} + \frac{2(2D_1 - C_1 p_1)}{\mu_1} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{4+p_1}{\mu_1} \right) \\ + \frac{2(2F_1 + C_1 p_2)}{\mu_2} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{4+p_2}{\mu_2} \right).$$

ii) I_{22} の計算

i) と同じ置換をほどこし, 次式で定義される $A_2 \sim H_2$ を求める。

$$I_{22} = 4 \int_{a'}^{b'} \left\{ \frac{A_2 u + B_2}{u^2 + 4\alpha} + \frac{C_2 u + D_2}{u^2 + p_1 u + q_1} + \frac{E_2 u + F_2}{u^2 + p_2 u + q_2} + \frac{G_2 u + H_2}{(u^2 + 4\alpha)^2} \right\} du. \quad (38)$$

i) と同様にこれを解くと,

$$A_2 = 0 \quad (39-1)$$

$$B_2 = 4\alpha x / (x^2 + y^2)^2 \quad (39-2)$$

$$C_2 = \{4\alpha x p_1^4 - 32\alpha x^2 p_1^3 + 2x(-x^4 - 2x^2 y^2 + 44\alpha x^2 - y^4 - 4\alpha y^2) p_1^2 \\ + 8x^2(x^4 + 2x^2 y^2 - 12\alpha x^2 + y^4 + 4\alpha y^2)\} / \Delta_2 \quad (39-3)$$

$$D_2 = \{4\alpha x p_1^5 - (x^4 + 2x^2 y^2 + 20\alpha x^2 + y^4 + 4\alpha y^2) p_1^4 + 4x(x^4 + 2x^2 y^2 + 4\alpha x^2 + y^4 + 4\alpha y^2) p_1^3 \\ + 128\alpha^2 x^2 p_1^2 - 256\alpha^2 x^3 p_1\} / (2\Delta_2) \quad (39-4)$$

$$E_2 = -C_2 \quad (39-5)$$

$$F_2 = \{4\alpha x p_1^5 + (x^4 + 2x^2 y^2 - 60\alpha x^2 + y^4 + 4\alpha y^2) p_1^4 + 12x(-x^4 - 2x^2 y^2 + 28\alpha x^2 \\ - y^4 - 4\alpha y^2) p_1^3 + 16x^2(3x^4 + 6x^2 y^2 - 52\alpha x^2 + 3y^4 + 12\alpha y^2 - 8\alpha^2) p_1^2 \\ + 64x^3(-x^4 - 2x^2 y^2 + 12\alpha x^2 - y^4 - 4\alpha y^2 + 12\alpha^2) p_1 - 1024\alpha^2 x^4\} / (2\Delta_2) \quad (39-6)$$

$$G_2 = B_1 \quad (39-7)$$

$$H_2 = 0. \quad (39-8)$$

ただし,

$$\Delta_2 = (x^2 + y^2) \Delta_1. \quad (39-9)$$

よって,

イ) $\alpha > 0$ のとき

$$I_{22} \Big|_{\substack{b'=-\infty \\ a'=2}} = \frac{2B_2}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) - 2C_2 \ln \frac{4+2p_1+q_1}{4+2p_2+q_2} + \frac{4(2D_2 - C_2 p_1)}{\mu_1} \\ \times \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{4+p_1}{\mu_1} \right) + \frac{4(2F_2 + C_2 p_2)}{\mu_2} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{4+p_2}{\mu_2} \right) + \frac{B_1}{2+2\alpha} \\ I_{22} \Big|_{\substack{b'=-\infty \\ a'=2\sqrt{\alpha}}} = \frac{\pi B_2}{2\sqrt{\alpha}} - 2C_2 \ln \frac{4\alpha + 2\sqrt{\alpha} p_1 + q_1}{4\alpha + 2\sqrt{\alpha} p_2 + q_2} + \frac{4(2D_2 - C_2 p_1)}{\mu_1} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{4\sqrt{\alpha} + p_1}{\mu_1} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4(2F_2 + C_2 p_2)}{\mu_2} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{4\sqrt{\alpha} + p_2}{\mu_2} \right) + \frac{B_1}{4\alpha} \\
I_{22} \Big|_{\substack{b'=2\sqrt{a} \\ a'=2\alpha}} & = \frac{2B_2}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} \sqrt{\alpha} \right) + 2C_2 \left(\ln \frac{4\alpha + 2\sqrt{\alpha} p_1 + q_1}{4\alpha + 2\sqrt{\alpha} p_2 + q_2} - \ln \frac{4\alpha^2 + 2\alpha p_1 + q_1}{4\alpha^2 + 2\alpha p_2 + q_2} \right) \\
& + \frac{4(2D_2 - C_2 p_1)}{\mu_1} \left(\tan^{-1} \frac{4\sqrt{\alpha} + p_1}{\mu_1} - \tan^{-1} \frac{4\alpha + p_1}{\mu_1} \right) + \frac{4(2F_2 + C_2 p_2)}{\mu_2} \\
& \times \left(\tan^{-1} \frac{4\sqrt{\alpha} + p_2}{\mu_2} - \tan^{-1} \frac{4\alpha + p_2}{\mu_2} \right) - B_1 \left\{ \frac{1}{4\alpha} - \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)} \right\}.
\end{aligned}$$

ロ) $\alpha < 0$ のとき

$\alpha = -\beta^2$ とおいて,

$$\begin{aligned}
I_{22} \Big|_{\substack{b'=-\infty \\ a'=2}} & = \frac{-B_2}{\beta} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta} - 2C_2 \ln \frac{4+2p_1+q_1}{4+2p_2+q_2} + \frac{4(2D_2 - C_2 p_1)}{\mu_1} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{4+p_1}{\mu_1} \right) \\
& + \frac{4(2F_2 + C_2 p_2)}{\mu_2} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{4+p_2}{\mu_2} \right) + \frac{B_1}{2-2\beta^2}.
\end{aligned}$$

i), ii) で求めた積分と(30), (31), (32)から I を求めることができる。すると,

$$\begin{aligned}
\ln |F(z)| & = \operatorname{Re} \ln F(z) \\
& = -(x^2 - y^2) \operatorname{Re} I + 2xy \operatorname{Im} I + \{C_0 + 1/(\alpha+1)\}x - (3/4) \ln \{(x+\alpha+1)^2 + y^2\} \\
& \quad + \ln(\alpha+1) + C + O(1/r).
\end{aligned}$$

また, (35)から,

$$\begin{aligned}
p_j & = p_j(x, y), \quad q_j = q_j(x, y) \quad (j=1, 2) \text{ とおくと,} \\
p_1(-x, -y) & = -p_2, \quad p_2(-x, -y) = -p_1 & (40-1, 40-2) \\
q_1(-x, -y) & = q_2, \quad q_2(-x, -y) = q_1 & (40-3, 40-4)
\end{aligned}$$

となるので $\ln |F(z)|$ から $\ln |F(-z)|$ を求めるのは容易である。

$$\ln |\Psi(z)| = \ln |F(z)| + \ln |F(-z)| \quad (41)$$

であるから, $-1 < \alpha < 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq \alpha \leq 2$ の夫々の場合に $\ln |F(z)|$ を求め, (40), (41)を用いて $\ln |\Psi(z)|$ を求めることができる。求めた $\ln |\Psi(z)|$ から(25)を示すことができる。以上は $x \neq 0$ の場合だが $x = 0$ のときも同様に, そのときには,

$$p_1 = p_2 = 0, \quad q_1 = 2(y^2 + 2\alpha + |y|\sqrt{y^2 + 4\alpha}), \quad q_2 = 2(y^2 + 2\alpha - |y|\sqrt{y^2 + 4\alpha})$$

となり,

$$\begin{aligned}
A_1 = C_1 = E_1 & = 0, \quad B_1 = -\frac{4\alpha}{y^2}, \quad D_1 = \frac{q_1(y^2 + 4\alpha)}{y^2(q_1 + 4\alpha)}, \quad F_1 = \frac{4\alpha(y^2 + 4\alpha)}{y^2(q_1 + 4\alpha)} \\
A_2 = B_2 = D_2 = F_2 = H_2 & = 0, \quad G_2 = B_1, \quad C_2 = \frac{-q_1(y^2 + 4\alpha)}{y^2(q_1 - 16\alpha)}, \quad E_2 = -C_2
\end{aligned}$$

となる。これらから I を求め, $-1 < \alpha < 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq \alpha \leq 2$ の夫々の場合に

$$\ln |F(z)| = y^2 \operatorname{Re} I - (3/4) \ln \{(\alpha+1)^2 + y^2\} + \ln(\alpha+1) + C + O(1/r)$$

を計算すれば, あとは $x \neq 0$ の場合と同様に(25)を示すことができる。

3. 数値計算例

この章では (F-2) について有限の項で打ち切った式 $f_N(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) を計算し, 真値と比

較する。 $f_N(x)$ を次のように定義する。

$$f_N(x) = \sum_{m=-N}^N \frac{f(a_m)}{\Phi'(a_m)} \frac{\Phi(z)}{z-a_m}.$$

ただし、 $\Phi(z)$ の零点 a_l を次のように定義し直す。

$$a_l = (l + \alpha/l)\pi \quad (l = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad a_0 = 0.$$

この場合、 $(C-2'-2)$ は

$$|f(z)| \leq K(1+|z|^\rho) e^{(1-\epsilon)|\operatorname{Im}z|} \quad (C-2'-2)$$

となる。ここでは $\alpha = 1, -0.9$ とし、内挿の対象となる $f(x)$ の例として $(C-2'-2)$ を満たす $\sin(x/2)$ を選ぶ。また、 $(C-2'-2)$ を満たしているかどうか明らかではないが、次の関数 $h(x)$ についても試してみた。

$$h(x) = (x-\gamma) \prod_{l=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{(x-\gamma)^2}{\gamma_l^2} \right\}; \quad \gamma = \frac{8}{5}\pi, \quad \gamma_l = 2\left(l + \frac{0.6}{l}\right)\pi.$$

紙面の制約上、打ち切り誤差は $\alpha = 1$ 、 $f(x) = \sin(x/2)$ のときだけを示す。また、 $h(x)$ について(F-2)を適用した例は $\alpha = 1$ の場合のみ示す。

図3、図4、図5、図7は(F-2)による $f_N(x)$ が $f(x)$ に収束することを示しており、(F-2)は $f(x)$ に対して有効な内挿公式であることが数値例として確認されたことになろう。

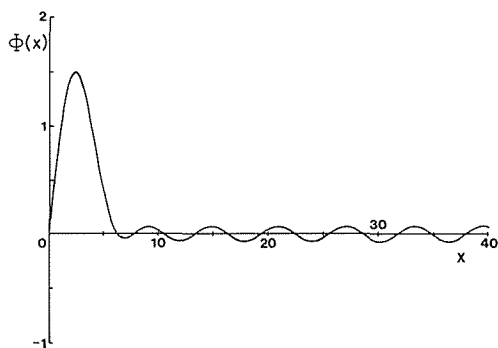


図2 $\alpha = 1$ のときの $\Phi(x)$

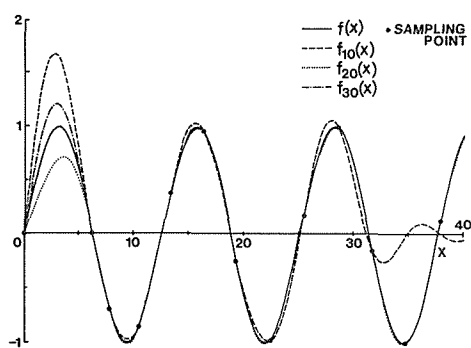


図3 $f(x) = \sin(x/2)$ と $\alpha = 1$ の(F-2)による $f_N(x)$ ($N = 10, 20, 30$)

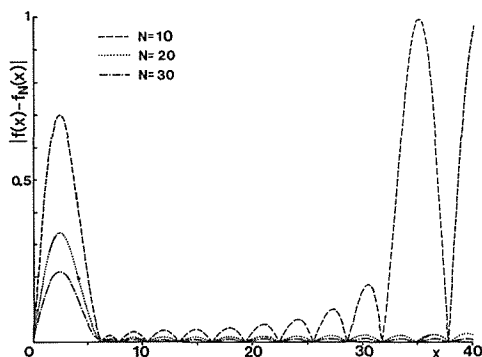


図4 $\alpha = 1$ の(F-2)による打ち切り誤差 $|f(x) - f_N(x)|$ ($f(x) = \sin(x/2)$; $N = 10, 20, 30$)

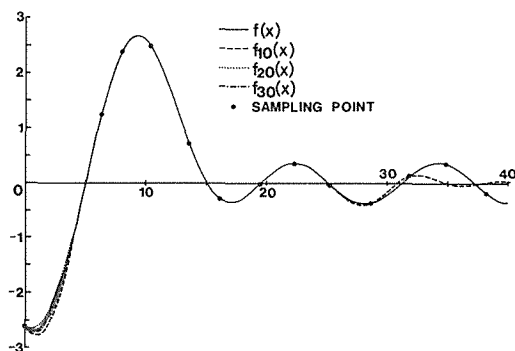


図5 $f(x) = h(x)$ と $\alpha = 1$ の(F-2)による $f_N(x)$ ($N = 10, 20, 30$)

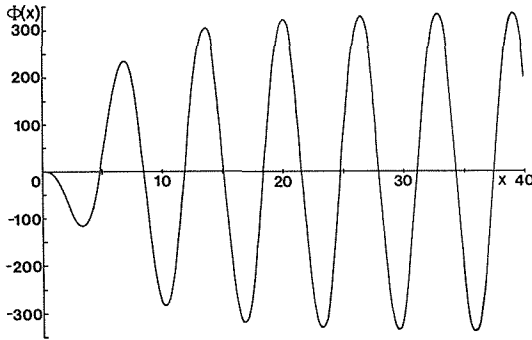


図6 $\alpha = -0.9$ のときの $\phi(x)$

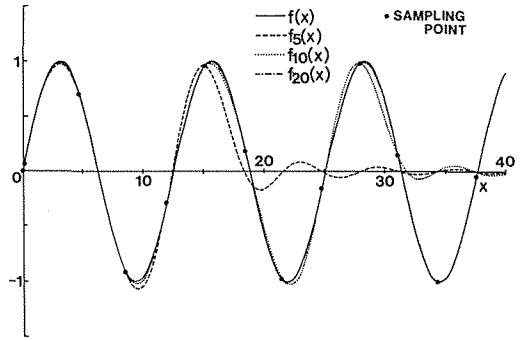


図7 $f(x) = \sin(x/2)$ と $\alpha = -0.9$ の(F-2)による $f_N(x)$ ($N=5, 10, 20$)

また図2, 図6は (C-2-1) が満たされていることを数値的に示しているといえよう。

4. 考 察

2. で与えた, 無限乗積を用いた場合の標本化展開について幾つかの説明を加える。

i) 定理2において $\alpha = 0$ とするとき, $\phi(x) = \{\sin(\pi x)/\pi\}$ となり (F-2) はシャノンの標本化展開になる。そのとき定理2の条件は緩められ, 次の命題が成り立つ²⁾。

$${}^3K > 0, \quad 0 \leq {}^3\alpha < 1, \quad {}^3\epsilon (\neq 1 - \alpha) > 0, \quad s. t.,$$

$$|f(z)| \leq K \frac{(1 + \pi |\operatorname{Re} z|)^\alpha}{(1 + \pi |\operatorname{Im} z|)^{\alpha + \epsilon}} e^{\pi |\operatorname{Im} z|},$$

⇒

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=-n}^n (-1)^l f(l) \frac{\sin \pi z}{z - l}.$$

ii) 本論文で導出した展開式は, ラグランジュの補間式の標本点の個数を無限個とったものに対応するものである。標本化関数として無限乗積を用いた研究はイブグラフオフも行っているか³⁾, そこで導かれている展開式の成り立つ条件は我々のそれと少し違っており, 条件の詳しい比較は今後の課題である。

iii) (F-2) の成り立つ条件として (C-2-1) を仮定しているが, 本来これは与えられた零点 a_l によって満たされているかどうかが決まっているはずである。今回は実軸上で無限乗積をうまく評価できなかつたために仮定したが, 数値計算の結果からもこれを否定する材料は見つかっていない。

iv) 標本化の対象となる関数や標本化関数は狭い意味での周期を持つ必要はなく, 漸近的な周期が定義される時, シャノン型の展開を考えることができる。

参考文献

- 1) M.A.Evgrafov: Asymptotic Estimates and Entire Functions (GORDON AND BREACH, 1962) p. 86
- 2) 長島知正, 八重樫光俊: 北大工学部研究報告 No. 127 (1985) p. 17
- 3) M. A. ЕВГРАФОВ: АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ И ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ p. 114 (НАУКА, МОСКВА, 1962)

付録

$$J_n^m(z) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (m = 1, 2, 3, 4)$$

証明:

I) $m = 2, 4$ の場合i) $\xi = x \pm i b_n$ ($|x| \leq b_n$)ii) z を半径 b_n の円内の点と仮定してよゝから,

$$|\xi - z| \geq |\xi| - |z| = \sqrt{x^2 + b_n^2} - |z| \geq b_n - |z| > 0$$

i), ii) を用いて,

$$\begin{aligned} J_n^m(z) &= \int_{-b_n}^{b_n} K \left(\frac{1}{|\xi|} + \frac{\pi^\beta}{|\xi|^{1-\beta}} \right) \frac{e^{-\varepsilon_1 \pi b_n}}{|\xi - z|} dx \\ &\leq \int_{-b_n}^{b_n} K \left(\frac{1}{b_n} + \frac{\pi^\beta}{b_n^{1-\beta}} \right) \frac{e^{-\varepsilon_1 \pi b_n}}{b_n - |z|} dx \\ &= 2K \frac{1 + \pi^\beta b_n^\beta}{b_n - |z|} e^{-\varepsilon_1 \pi b_n} \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

II) $m = 1, 3$ の場合i) $\xi = \pm b_n + iy$ ($|y| \leq b_n$)ii) $|\xi - z| \geq |\xi| - |z| = \sqrt{b_n^2 + y^2} - |z| \geq b_n - |z| > 0$

i), ii) を用いて,

$$\begin{aligned} J_n^m(z) &= \int_{-b_n}^{-\hat{c}_1} K \frac{1 + \pi^\beta |\xi|^\beta}{|\xi(\xi - z)|} e^{-\varepsilon_1 \pi |y|} dy + \int_{-\hat{c}_1}^{\hat{c}_1} \frac{K \hat{C}_2}{K_0} \frac{1 + \pi^\beta |\xi|^\beta}{|\xi - z|} dy \\ &\quad + \int_{\hat{c}_1}^{b_n} K \frac{1 + \pi^\beta |\xi|^\beta}{|\xi(\xi - z)|} e^{-\varepsilon_1 \pi |y|} dy \\ &\leq K \int_{-b_n}^{-\hat{c}_1} \frac{1 + \pi^\beta (\sqrt{2} b_n)^\beta}{b_n (b_n - |z|)} e^{-\varepsilon_1 \pi |y|} dy \\ &\quad + \frac{K \hat{C}_2}{K_0} \int_{-\hat{c}_1}^{\hat{c}_1} \frac{1 + \pi^\beta (\sqrt{2} b_n)^\beta}{b_n - |z|} dy + K \int_{\hat{c}_1}^{b_n} \frac{1 + \pi^\beta (\sqrt{2} b_n)^\beta}{b_n (b_n - |z|)} e^{-\varepsilon_1 \pi |y|} dy \\ &= 2K \frac{1 + \pi^\beta (\sqrt{2} b_n)^\beta}{b_n (b_n - |z|)} \int_{\hat{c}_1}^{b_n} e^{-\varepsilon_1 \pi y} dy + \frac{K \hat{C}_2}{K_0} \frac{1 + \pi^\beta (\sqrt{2} b_n)^\beta}{b_n - |z|} \cdot 2\hat{C}_1 \\ &= 2K \frac{1 + \pi^\beta (\sqrt{2} b_n)^\beta}{b_n - |z|} \left(\frac{1}{-\varepsilon_1 \pi} \frac{e^{-\varepsilon_1 \pi b_n} - e^{-\varepsilon_1 \pi \hat{c}_1}}{b_n} + \frac{\hat{C}_1 \hat{C}_2}{K_0} \right) \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

この結果, (I), (II) より $J_n^m(z) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (m = 1, 2, 3, 4)$ が成り立つ。