



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	剛塑性有限要素法による丸棒の引張変形応力解析
Author(s)	但野, 茂; Tadano, Shigeru; 石川, 博將 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 133, 15-25
Issue Date	1986-10-31
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/42014">https://hdl.handle.net/2115/42014</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	133_15-26.pdf



## 剛塑性有限要素法による丸棒の引張変形応力解析

但野 茂 石川 博 将

(昭和61年 6 月30日受理)

### A STRESS ANALYSIS OF AXISYMMETRIC TENSION SPECIMENS BY RIGID-PLASTIC FINITE ELEMENT METHOD

Shigeru TADANO and Hiromasa ISHIKAWA

(Received June 30, 1986)

#### Abstract

A method of the stress calculation for the rigid-plastic finite element analysis employing the penalty method is presented.

Applying the experimental technique of visio-plasticity, stress is calculated easily and simply from the optimum strain-rate. The optimum velocity field can be obtained by determining adequate values of the penalty constant and by considering the work-hardening effect in each step deformation. The values of the penalty constant have a great influence on the volume change as well as on the increment of the plastic work. Therefore, the most suitable values of the penalty constant is obtained by estimating the energy dissipation rate related to the penalty constant.

This method is verified to be effective from the numerical calculation of the tensile deformation of cylindrical bars.

#### 1. 結 言

最近、塑性加工時における素材の変形解析に剛塑性有限要素法が広く利用されている。剛塑性有限要素法とは、エネルギー消散率を最小にする動的可容速度場から、変形中の素材のひずみおよび応力を求める方法であり、そのときのエネルギー消散率は加工荷重の上界値を与える。平面ひずみ、軸対称問題に剛塑性有限要素法を用いるには、エネルギー消散率を最小化する計算プロセスに体積一定の制約を設ける必要がある。その条件を組み込んだ解析手法の提案がこれまでなされてきた。体積一定の条件に関する未定乗数が最適化したときに、各要素での静水圧応力に一致するとした小林らによるラグランジェ未定乗数法<sup>1)</sup>、小坂田らによる圧縮性を認めた多孔質体の基礎方程式から、相対密度を1に近づけることで、非圧縮性の条件を近似的に満足させる圧縮特性法<sup>2),3)</sup>、体積一定の条件を満足させるためのペナルティ係数を体積ひずみ速度の二乗に乘じ、それをエネルギー消散率に加えて最小化を行うペナルティ法<sup>4),5)</sup>がある。また、動的可容速度場から各応力成分を計算するには、さらに工夫を要する。特にペナルティ法においては、変分原理により応力がひずみ速度から計算される<sup>2),6)</sup>が、その応力がつり合い条件式を満足している保証はない。

Alexander ら<sup>5)</sup>は応力のつり合い微分方程式を適当な経路でひずみ増分を積分することにより平均応力を求めている。

本論文では、秦ら<sup>4)</sup>が提示したペナルティ法を再度検討し、最適な節点速度を求め、これにより応力を計算する手法を示す。まず、最適な速度場を求めるために、ペナルティ係数の検討を行った。従来、ペナルティ係数の適正值を決めるのは困難であったが、ペナルティ係数が体積変化、エネルギー消散率および収束までの繰返し計算回数に大きく寄与することを認め、結局ペナルティ係数関与項のエネルギー消散率に占める比率でペナルティ係数を評価することにより適正ペナルティ値が得られた。次に、1ステップの解析に加工硬化の影響を組み入れることで、変形の初期段階から加工荷重に等しいエネルギー消散率が計算された。以上の結果により求めた最適な速度場を格子線解析法 (Visio-Plasticity) の手法<sup>7)~9)</sup>に適用して応力を計算した。つまり、応力のつり合い条件式と Levy-Mises の式から応力がひずみ速度の積分関数で表示できる。最適なひずみ速度を任意の経路に沿って積分することにより、各応力成分は計算される。数値積分は三角形要素内で一様なひずみ速度の値を用いず、周辺要素の値で Smoothing した値によった。この方法により、比較的粗い要素分割でも応力計算は可能となった。以上の方法を用いた一解析例として、丸棒の引張変形時における変形挙動および応力解析の結果を示す。

なお、使用計算機は PC-98XA (NEC) である。パーソナルコンピュータで一連の計算から結果の画像処理まで可能な剛塑性有限要素法による塑性加工シミュレーションの確立が、本論文の目的でもある。

## 2. ペナルティ法剛塑性有限要素法

### 2.1 エネルギー消散率

素材を剛塑性体と仮定する。両端を固定した丸棒の引張変形の解析例に際し、変形中の速度場からエネルギー消散率を最小化するのに有限要素法を用いて繰返し計算する。この場合、端面摩擦によるエネルギー消散率は考えなくても良いので、結局塑性変形エネルギー消散率のみが素材全体のエネルギー消散率となる。このエネルギー消散率  $\dot{W}$  は要素毎の和をとり式(1)で表示される。

$$\dot{W} = \sum_1^N \bar{\sigma} \dot{\epsilon} V_i \quad (1)$$

$N$  ; 全要素数,  $V_i$  ; 要素番号  $i$  の体積,  $\bar{\sigma}$  ; 相当応力,  $\dot{\epsilon}$  ; 相当塑性ひずみ速度  
式(1)を最小化することにより加工荷重の上界値が求まるが、そのとき体積一定の条件は満足しない。そこで、エネルギー消散率を最小化する評価関数  $\varphi$  を式(2)で定義し<sup>4)</sup>、非圧縮性の条件を近似的に満足させる方法をとる。

$$\varphi = \sum_1^N \bar{\sigma} (\dot{\epsilon} + \lambda \dot{\epsilon}_v) V_i \quad (2)$$

$\lambda$  はペナルティ係数である。半径方向、円周方向、軸方向ひずみ速度およびせん断ひずみ速度をそれぞれ  $\dot{\epsilon}_r$ ,  $\dot{\epsilon}_\theta$ ,  $\dot{\epsilon}_z$ ,  $\dot{\gamma}_{rz}$  とすれば、 $\dot{\epsilon}$  および体積ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_v$  は式(3), (4)で計算される。

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{9} \{ (\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta)^2 + (\dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_r)^2 + \frac{3}{2} \dot{\gamma}_{rz}^2 \}} \quad (3)$$

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_z \quad (4)$$

式(2)で明らかのように、体積変化があると、 $\lambda$  で重み付けされた  $\dot{\epsilon}_v$  は評価関数  $\varphi$  に対して正の寄与をすることになるので、 $\varphi$  が最小となれば非圧縮性の条件を結果的に満足することが期待でき



Hに適当な値 $m$  ( $0 \leq m \leq 1$ ) を乗じ、正解のエネルギー消散率に近づける方法をとる。このときの応力は式(7)となる。

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^* + mH\Delta t \dot{\epsilon} \quad (7)$$

また、加工硬化を考慮した塑性変形エネルギー消散率評価関数  $\varphi$  は、図1で示した記号 a b d g で囲まれた面積を計算することになるので、式(8)で示される。

$$\varphi = \sum_1^N \left( \bar{\sigma}^* + \frac{1}{2}mH\Delta t \dot{\epsilon} \right) (\dot{\epsilon} + \lambda \dot{\epsilon}_v^2) V_i \quad (8)$$

### 2. 3 ペナルティ係数の適正值

従来、ペナルティ係数  $\lambda$  は、正の大きな値とされ<sup>2)</sup>、その選定には困難さがつきまとった。本解析では、式(8)中の  $\lambda$  の関与項を塑性変形エネルギー消散率誤差項  $\varphi_{er}$  とし、次式で定義する。

$$\varphi_{er} = \sum_1^N \left( \bar{\sigma}^* + \frac{1}{2}mH\Delta t \dot{\epsilon} \right) \lambda \dot{\epsilon}_v^2 V_i \quad (9)$$

$\lambda$  の値を1から $10^4$ までとったときの加工荷重  $P$  (KN)、体積変化  $\Delta V/V_0$  (%),  $\varphi_{er}$  の  $\varphi$  に占める比率  $\varphi_{er}/\varphi$  (%) の変化を図2に示す。なお同図は、各特性値に対する  $\lambda$  の効果を確認するため、丸棒の軸対称 $1/4$ 断面を54個の粗い要素に分割して、10%変形まで計算した結果である。図2より明らかのように、 $\lambda$  の値は  $P$ ,  $\Delta V/V_0$ ,  $\varphi_{er}/\varphi$  に大きな影響を与える。すなわち、 $\lambda$  が小さいほど体積は急激に増え、非圧縮性の条件を満足しなくなる。また、 $\lambda$  が $10^3$ 以上のときは、非圧縮性の条件をほぼ満足するが、 $\lambda$  の増加につれて  $\varphi_{er}/\varphi$  も増大し、誤差を含んだ塑性変形エネルギー消散率は、図中実線の応力-ひずみ関係式から求めた加工荷重(1308KN)より高くなる。 $\varphi_{er}/\varphi$  は  $\lambda$  の値が300~500の範囲で極小値約2%となり、このときの塑性変形エネルギー消散率は、実線の加工荷重にほぼ等しい。以上のことにより、本解析に用いるペナルティ係数  $\lambda$  の値は500とした。 $\lambda=500$ のとき、10%変形までで約0.4%の体積変化を認めることになるが、非圧縮性の条件をほぼ満足していると思なしても支障はない。

$\lambda$  の各特性値に対する影響は、要素数を増しても同じ傾向にある。要素数216個、節点数133点の場合の10%変形時における各値を図2に●, ▲, ■印で示す。この場合は、 $\varphi_{er}/\varphi=1.16\%$ ,  $\Delta V/V_0=0.31\%$ ,  $P=1298\text{KN}$  となり、要素数を増すことによって各値ともより満足できる結果が得られた。

図3に10ステップ(10%変形)まで計算したときの各ステップで収束するまでに要した繰返し数総和を示す。なお収束判定条件は  $\varphi$  の変化が $10^{-5}$ 以下とした。図より明らかに  $\lambda$  が $10^3$ から $10^4$ の値にかけて急激に繰返し数が増加する。 $\lambda=500$ では、1ステップ毎収束するまでの繰返し数が少なくて済み、計算効率も良いことが判った。

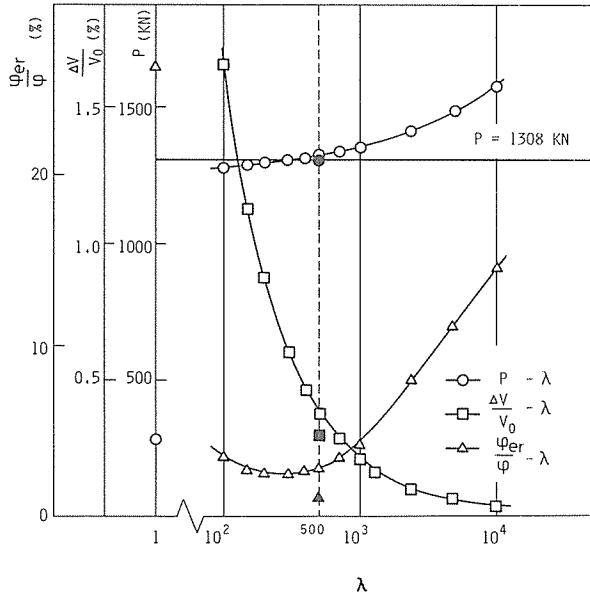


図2 ペナルティ係数の各特性値に及ぼす影響

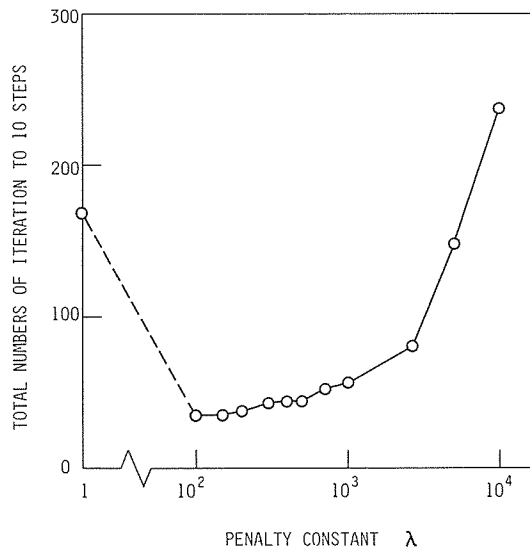


図3 ペナルティ係数の繰返し総数に及ぼす効果

### 3. 応力計算

ペナルティ法においては、動的可容速度場から求まるひずみ速度を Levy-Mises の関係式に適用することにより、偏差応力は計算される。しかしながら、平面応力問題以外の平面ひずみ、軸対称、3次元問題では静水圧応力が求まらないため、各応力成分は簡単には計算できない。また、 $\sigma_z = 0$  の条件により静水圧応力が求まる平面応力の場合でも得られた応力がつり合い条件式を満足しているとは限らない。小坂田<sup>2)</sup>は変分法を用いてペナルティ法の応力算出式を導いている。彼と同様な手順に従って評価関数式(2)を変形すれば、応力は式(10)で得られる。

$$\sigma_{ij} = -\frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\epsilon}} \dot{\epsilon}'_{ij} + 2 \bar{\sigma} \lambda \delta_{ij} \dot{\epsilon}_v \quad (10)$$

$\dot{\epsilon}'_{ij}$ ; 偏差ひずみ,  $\delta_{ij}$ ; クロネッカーデルタ

式(10)にて計算した応力は、小坂田<sup>2)</sup>の指摘のとうり正解値とはかけ離れたものとなった。

そこで、本論文では、要素変形状を格子の変形状と見なすことにより、格子線解析法の手法により応力計算を行う。この場合、動的可容速度から求まるひずみおよび変形状が正確であるとしなければならない。

軸対称におけるつり合い方程式は、半径方向、円周方向、軸方向垂直応力およびせん断力を  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$  とすれば式(11), (12)で示される。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (12)$$

また、Levy-Mises の式は、偏差応力を  $\sigma'_{ij}$  とすれば、

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \equiv \lambda \sigma'_{ij} \quad (13)$$

である。式(11), (12), (13)より、 $\sigma_z$  は次式となる。

$$\sigma_z(r, z) = \int_0^r f_z(\dot{\epsilon}, \bar{\sigma}) dr + K(z) \quad (14)$$

$$f_z(\dot{\epsilon}, \bar{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_r}{\lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\dot{\gamma}_{rz}}{2\lambda} \right) - \frac{\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta}{r\lambda} \quad (15)$$

ここで、 $z$  方向に垂直な断面にかかる荷重は加工荷重  $P$  と等しいので、式(14)の積分定数  $K(z)$  は、次式で表示できる。

$$K(z) = \frac{P}{\pi r_0^2} - \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} \left[ \int_0^r f_z(\dot{\epsilon}, \bar{\sigma}) dr \right] r dr \quad (16)$$

従って、最終的に  $\sigma_z(r, z)$  は式(17)となる。

$$\sigma_z(r, z) = \int_0^r f_z(\dot{\epsilon}, \bar{\sigma}) dr + \frac{P}{\pi r_0^2} - \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} \left[ \int_0^r f_z(\dot{\epsilon}, \bar{\sigma}) dr \right] r dr \quad (17)$$

$r_0$  は  $z$  方向任意断面の外半径である。また、 $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{rz}$  は  $\sigma_z(r, z)$  で式(18)のように表示される。

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) &= \sigma_z(r, z) + \frac{\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_z}{\lambda} \\ \sigma_\theta(r, z) &= \sigma_z(r, z) + \frac{\dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_z}{\lambda} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \frac{\dot{\gamma}_{rz}}{2\dot{\lambda}}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{\bar{\sigma}}$$

上記式(17), (18)により, ひずみ速度からつり合い条件式を満足した応力が容易に求めることができる。

本解析では, 3節点三角形要素を用いたため, 要素内におけるひずみ速度は一様として, 塑性変形エネルギー消散率の最小化を行っている。 $z$ 方向に垂直な任意の断面について式(17)の計算を行う場合, その経路に対するひずみ速度分布の様子が後の結果に大きく影響する。Shabaik<sup>7)</sup>は結果をSmoothingしているし, 石川ら<sup>8),9)</sup>はSmoothingをしなくても済むよう格子線の変形挙動を初等関数で近似する方法を提案している。本解析においては, 要素内で一様なひずみ速度を, その周辺要素のひずみ速度を用いてSmoothingを行う。つまり, 節点Mにおける特性値(本解析の場合, ひずみ速度) $X_M$ は, 節点Mを共有する要素の特性値の平均値として, 式(19)で表示する。

$$X_M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad (19)$$

$k$ : 節点Mを共有する要素番号,  $n$ : 節点Mを共有する要素総数

今, 三角形要素を構成する節点 $M_1, M_2, M_3$ における座標および式(19)で計算した特性値をそれぞれ $(r_1, z_1, X_1), (r_2, z_2, X_2), (r_3, z_3, X_3)$ とすれば, 要素内任意の座標 $(r, z)$ における $X$ は, 式(20)で示す $M_1, M_2, M_3$ を通る平面方程式にて計算できる。

$$\begin{vmatrix} r & z & X & 1 \\ r_1 & z_1 & X_1 & 1 \\ r_2 & z_2 & X_2 & 1 \\ r_3 & z_3 & X_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

式(20)で計算したひずみ速度は,  $z$ 方向に垂直な断面に沿って滑らかな分布を示した。

#### 4. 解析結果

丸棒( $\phi 60\text{mm} \times 180\text{mm}$ )の軸対称 $1/4$ 断面を, 要素数216個, 節点数133点の三角形要素に分割した。解析1ステップを変形率1%とし, 30%までの引張変形解析を行った。応力-ひずみ関係式は式(21)を使用した。この場合の降伏応力 $\sigma_Y$ は400MPaである。なお, 収束計算は直接探索法<sup>4)</sup>によった。

$$\bar{\sigma} = 590 (\bar{\epsilon} + 0.002)^{0.0625} \quad (\text{MPa}) \quad (21)$$

解析に先だち, 加工荷重と伸びの関係に対する加工硬化補正係数 $m$ の影響を調べるため,  $m = 0, 1/2, 1$ とし10%伸びまでの挙動を図4に示す。図中一点鎖線は式(21)に原断面積を乗じて計算した加工荷重である。 $m = 1/2$ のとき, 初期の1%変形時から一点鎖線と良く一致していることがわかる。 $m$ を1とすれば, 通常加工硬化係数式(6)を導入したことになる。その場合, 最初の1ステップ目に計算された加工荷重は正解値より高めに大きくずれる。これは, 1ステップの変形間隔を小さくすることで解消できるが, 1ステップの変形量を大きくとれる剛塑性有限要素法の利点から考えて得策とはいえない。また,  $m = 0$ のときは, 加工硬化係数を考えない場合である

が、変形の初期段階で加工荷重が正解値より低めになることが図4よりわかる。したがって、加工硬化係数を補正する係数 $m$ の値は $1/2$ とした。

図5に10%、20%、30%変形時における丸棒の引張変形挙動を示す。同図より、変形の様子が良くわかる。変形が大きくなるにつれ、中央部が細くなっていくが、くびれの現象を解析しているのではないので、細くなり方も一様である。くびれの解析を行う場合は、くびれ進行中における弾性域除荷の挙動をとらえなくてはうまく解析できない<sup>13)</sup>。剛塑性有限要素法にそれを組み込むのは今後の課題である。しかし、剛塑性材料たとえば超塑性合金のようなくびれを生じない材料の引張変形挙動は図5と同様になると予想できる。

図6に10%変形時の $\varepsilon_r$ 、 $\varepsilon_\theta$ 、 $\varepsilon_z$ および $\bar{\varepsilon}$ の分布の解析結果をそれぞれ示す。 $z$ 方向に垂直な断面では、自由面から中心軸にかけて各ひずみ成分とも高くなっている。また、端面付近では、端面拘束の影響も見られる。

図7で、 $\bar{\sigma}$ と $\sigma_z$ の分布がわかる。応力も軸方向に垂直な断面で、自由面から中心軸にかけて高くなる。端面拘束の影響により、端面付近の応力分布は複雑な挙動を示している。

中央断面の半径方向における $\sigma_r/\sigma_y$ 、 $\sigma_\theta/\sigma_y$ 、 $\sigma_z/\sigma_y$ 、 $\bar{\sigma}/\sigma_y$ の分布を図8に示す。式(17)の積分を台形公式で計算する際、中央断面( $z=0$ )の値は正解には求まらない。しかし中央断面で分割せず丸棒全体を中心軸に対して $1/2$ 断面にて要素分割し、解析することによりそれは解消される。図より、 $\sigma_r$ 、 $\sigma_\theta$ 、 $\sigma_z$ が、自由境界面から中心軸にかけて増加している様子がわかる。 $\sigma_r$ と $\sigma_\theta$ の分布は $r/r_0$ が0.6付近まで一致しており、自由境界面 $r=r_0$ では、 $\sigma_\theta$ はマイナスの値を示し、 $\sigma_r$ はゼロとなっている。これらの解析結果は、くびれの解析を行った Norris らの結果<sup>13)</sup>と比較すれば、中心軸の半径方向における各応力分布が定性的に一致しているといえる。

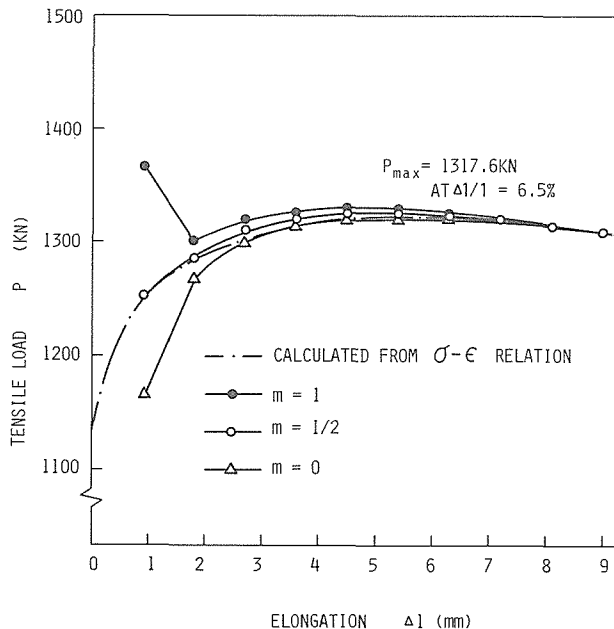


図4 加工硬化補正係数 $m$ の荷重—伸び曲線に及ぼす効果

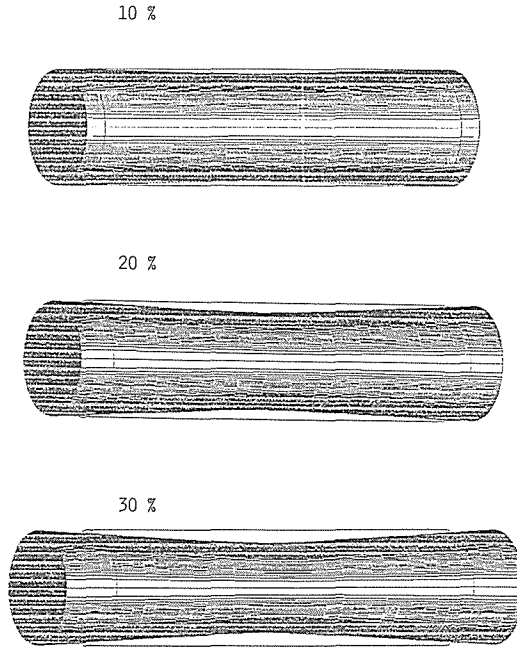


図5 丸棒の引張変形挙動

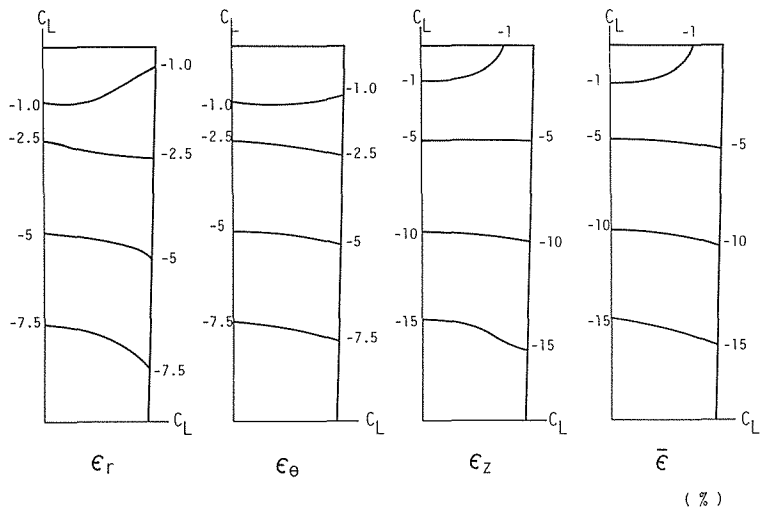


図6 ひずみ分布 (10%変形時)

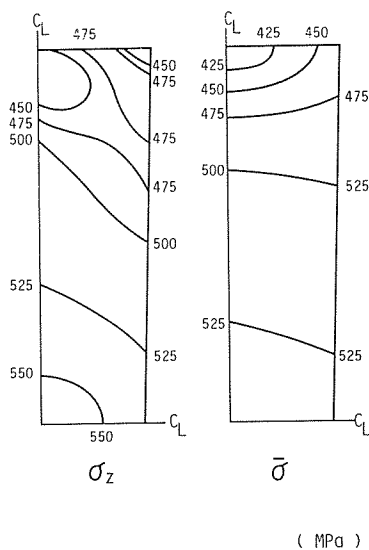


図7 応力分布 (10%変形時)

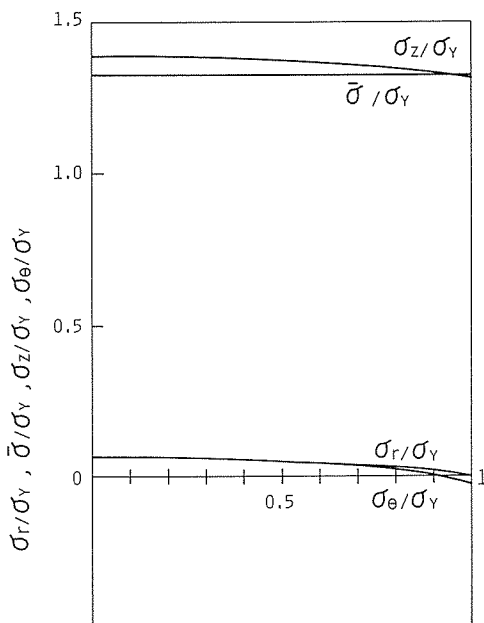


図8 中央断面の応力分布 (10%変形時)

## 5. 結 論

秦らが提示したペナルティ法による剛塑性有限要素法を再検討し、応力解析を行った。一例として、丸棒の引張変形の解析を行ったところ、次の結論を得た。

- (1) 加工硬化係数を補正して組み込むことで、変形初期段階から正解に近い加工荷重が得られる。
- (2) ペナルティ係数をエネルギー消散率のペナルティ係数関与項で評価することにより、その適正值が得られる。
- (3) ひずみ速度分布を用いてつり合い方程式から直接応力が計算され、その結果は妥当なものであった。

最後に、本解析にあたり数値計算に御協力いただいた本学部学生中村真一郎君（現在山陽国策パルプ(株)勤務）に深謝する。

## 参考文献

- 1) 小林史郎, Lee, C. H., Shah, S. N. : 塑性と加工, 14 (1973), 153, p. 770
- 2) 小坂田宏造 : 機械の研究, 35 (1983), 1~12, 36 (1984), 1~3
- 3) 森謙一郎, 島 進, 小坂田宏造 : 機械学会論文集 (A編), 45 (1978), 396, p. 965
- 4) 秦 謹一, 石川博將, 山本一英 : 塑性と加工, 15 (1974), 167, p. 1003
- 5) Price, J. W. H., Alexandar, J.M. : Proc. 4th North American Metalworking Research Conf., (1976), p. 46
- 6) 相澤龍彦 : 35回塑性加工連合講演論文集, (1984), p. 339

- 7) Shabaik, A. H. : Trans. ASME. Ser. B, 94 (1972), 4, p. 1225
- 8) 石川博將, 秦 謹一, 石井洋一 : 機械学会論文集 (A編), 45 (1979), 400, p. 1585
- 9) 石川博將, 秦 謹一, 後藤正芳 : 塑性と加工, 16 (1975), 169, p. 140
- 10) 森謙一郎, 島 進, 小坂田宏造 : 塑性と加工, 21 (1980), 234, p. 593
- 11) Kim, Y. J., Yang, D. Y. : Int. J. Mech. Sci., 27 (1985), 7/8, p. 487
- 12) 中野淳介, 小坂田宏造 : 昭55年度春季塑性加工講演論文集, (1980), p. 359
- 13) Norris, D. M., Moran, B., Scudder, J. K., Quinones, D.F. : J. Mech. Phys. Solids, 26 (1978), p.1