北海道大学工学部研究報告
第135号（昭和62年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University. No. 135 (1987)

二者択一定理の可視像

堀田　和之

（昭和61年12月27日受理）

Visual Images for Dual Alternative Theorems

Kazuyuki HOTTA

(Received December 27, 1986)

Abstract

There exists a style of theory composing in the nonlinear programming where frequent resorts are made to the so-called dual alternative theorems as to the existence of the solution to a pair of linear vectorial equality and inequality. Many such theorems are avaible but the algebraic and/or analytic proofs for them are often very complicated. Once a geometrical interpretation is introduced, it becomes easier to get a clearer insight into the implication of the theorems.

It has been a common practice to give such an interpretation, which is persuasive only in the applications of the theorems to low dimensional cases. Here in this report, an effort is made to extend the practice to the higher dimensional cases. The main feature of the new trial of interpretation is to classify the whole polyhedral convex cones into four distinct sets.

The correspondence between a real matrix and a convex polyhedral cone and the mutual exclusiveness of the forementioned classification enable us to establish the validity of some of the dual alternative theorems.

Since no new theorem is derived by this approach, the contribution, if any, of this report is rather in engineering education than in engineering itself.

序

非線形計画法を，主として一群の線形な等・不等式の解の存在定理および二者択一定理に基づいて展開させる方法[1)]がある。多数のその種定理が存在するが，それらの代数・解析学的証明は繁雑である。しかし，それらに幾何学的説明を与えると，概念の整理が容易になり，教育法の面での価値が認められる。

低次元の場合について，二者択一定理を幾何学的に説明することは従来から行われてきた。この報告は，凸多面錐を，それを創成するベクトルの集塊状態に注目して，互に素なグループへと分類し，それを用いて多くの二者択一定理を高次元の場合についても幾何学的に説明する試みを述べたものである。

1. 諸　定　義

m本の$\mathbf{0}$（ゼロベクトル）でないn次元ベクトル$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{a}_m$を列とするマトリックスを

$$A = [\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \cdots\cdots \boldsymbol{a}_m], \quad \boldsymbol{a}_k \neq \mathbf{0}_n (k=1, 2, \cdots\cdots, m) \tag{1・1}$$

と表わす。$\mathbf{0}_n$はR^nのゼロベクトルで，Eq.（1.1）の右側で，$\boldsymbol{a}_k \in R^n, \boldsymbol{a}_k \neq \mathbf{0}$という2式に代用する。Aの列の張る次元rank Aの線形部分空間をLまたはL(A)と表わす。

$$L = L(A) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} \in R^m\} \tag{1・2}$$

以下で，ベクトル間の等・不等号を次のように約束する。

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{x} > \mathbf{0} & x_i > 0 \\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} & x_i \geqq 0, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0} & x_i \geqq 0, \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\text{の場合を含む} \end{array}\right\} \tag{1・3}$$

Aの列の張る閉凸多面錐（以下で角錐と略称）をKまたはK(A)と表わす。

$$K = K(A) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} \geqq \mathbf{0}_m\} \tag{1・4}$$

一般の錐Cについて，その共役錐C^*は

$$C^* = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{\xi} \leqq 0, \quad {}^\forall \boldsymbol{\xi} \in C\} \tag{1・5}$$

と定義される。ここで，上つきTは転置を表わす。角錐の場合には，共役錐が次のようにも表わせる。

$$K^* = K^*(A) = \{\boldsymbol{x} \mid A^T \boldsymbol{x} \leqq \mathbf{0}_m\} \tag{1・6}$$

閉凸錐Kに対する次の事実は既知とする。

$$(K^*)^* = K^{**} = K \tag{1・7}$$

$$K \cap K^* = \mathbf{0}_n \tag{1・8}$$

2. 角 錐 の 分 類

Aの張る角錐を$\boldsymbol{a}_k$のR^nでの集塊状態に注目して次のように分類する。

$\bar{\boldsymbol{x}} \neq \mathbf{0}_n$をとると，$A^T \bar{\boldsymbol{x}} \in R^m$はその第k成分の符号が$\bar{\boldsymbol{x}}$と$\boldsymbol{a}_k$の角関係を表わし，$\boldsymbol{a}_k$の$\bar{\boldsymbol{x}}$への集塊状態を表現する。そこで，$A^T \bar{\boldsymbol{x}}$の$\mathbf{0}_m$との相対関係を次の3つの場合に分類する(Fig.1参照)

$$A^T \bar{\boldsymbol{x}} > \mathbf{0}_m \tag{2・1}$$

$$A^T \bar{\boldsymbol{x}} \geq \mathbf{0}_m \tag{2・2}$$

$$A^T \bar{\boldsymbol{x}} \ngeq \mathbf{0}_m \tag{2・3}$$

Eq.（2・3）の場合は，さらに次の2つに分けられる。

$$A^T \bar{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}_m \tag{2・4}$$

$$A^T \bar{\boldsymbol{x}} \ngeqq \mathbf{0}_m \tag{2・5}$$

Fig.1を用いて，$A^T \bar{\boldsymbol{x}}$と$\mathbf{0}_m$の間のすべての関係を網羅し，かつ相互に排反な4つの領域が指摘できる。それらを用いて，すべての角錐を次の4種類に分類する。

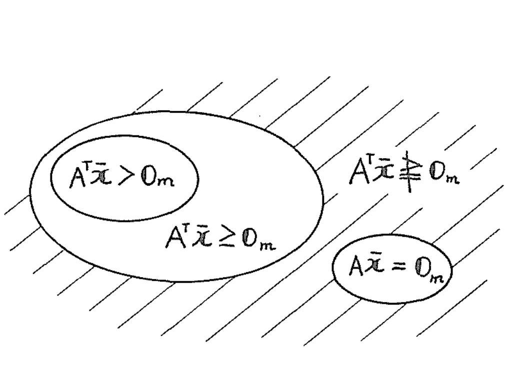


Fig.1 Four distinct cases for $A^T \bar{\boldsymbol{x}}$ v.s. $\mathbf{0}_m$.

i）針状錐 K_P とその集合 $\mathscr{K}_P$

本報での角錐は凸集合であるが，その中で端点 $\mathbf{0}_n$ を有する唯一の錐で次式で定義される。

$$^{\exists}\bar{\boldsymbol{x}}\in R^n; A^T\bar{\boldsymbol{x}}>\mathbf{0}_m \qquad (2\cdot 6)$$

ii）楔状錐 K_E とその集合 $\mathscr{K}_E$

$$^{\exists}\bar{\boldsymbol{x}}\in R^n; A^T\bar{\boldsymbol{x}}\geqq\mathbf{0}_m \qquad (2\cdot 7)$$

$$^{\forall}\boldsymbol{x}\in R^n; A^T\bar{\boldsymbol{x}}\ngeq\mathbf{0}_m \qquad (2\cdot 8)$$

iii）線形真部分空間錐 K_L とその集合 $\mathscr{K}_L$

$$^{\exists}\bar{\boldsymbol{x}}\neq\mathbf{0}_n; A^T\bar{\boldsymbol{x}}=\mathbf{0}_m \qquad (2\cdot 9)$$

$$^{\forall}\boldsymbol{x}\in R^n; A^T\boldsymbol{x}\ngeq\mathbf{0}_m \qquad (2\cdot 10)$$

以上３つの場合の概念図を Fig. 2 に示す。

iv）全空間錐 K_T とその集合 $\mathscr{K}_T$

$$^{\forall}\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}_n; A^T\bar{\boldsymbol{x}}\ngeqq\mathbf{0}_m \qquad (2\cdot 11)$$

分類の方法から明らかなように次の定理が成立する。

T１〕原点 $\mathbf{0}_n$ のみより成る錐を除くと，任意の n×m マトリックス A によって張られる角錐 K(A) は，$\mathscr{K}_P$, $\mathscr{K}_E$, $\mathscr{K}_L$ または $\mathscr{K}_T$ のいずれか１つに，そして１つのみに属する。

3. ベクトルの L(A), K(A) への所属

特定のベクトル $\boldsymbol{\xi}\in R^n$ と, n×m マトリックス A を選ぶと，$\boldsymbol{\xi}$ は L(A) に含まれるか否かの一方が，そして一方のみが起こる。K(A) についても同様である。Table1 にそれらの場合を判別するための条件式が要約されている。その一部のみを以下で考察する。

T２〕$\boldsymbol{\xi}\notin K(A)\leftrightarrows {}^{\exists}\bar{\boldsymbol{x}}; A^T\bar{\boldsymbol{x}}\leqq\mathbf{0}_m, \boldsymbol{\xi}^T\bar{\boldsymbol{x}}>0$ (3・1)

⟶ 対偶によるため右側を否定すると

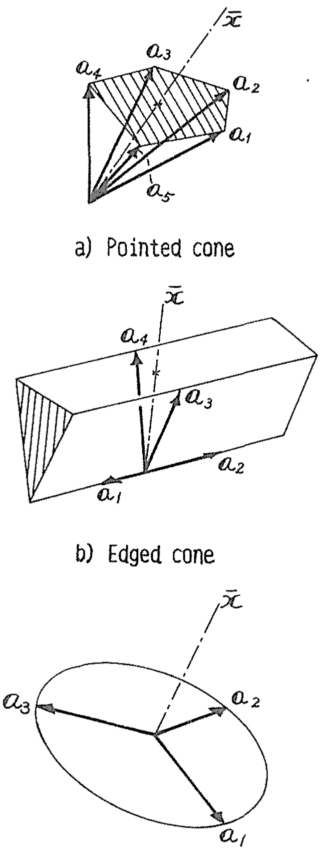
$$^{\forall}\bar{\boldsymbol{x}}, A^T\bar{\boldsymbol{x}}\leqq\mathbf{0}_m; \boldsymbol{\xi}^T\bar{\boldsymbol{x}}\leqq 0$$

Eq.(1・6) により，この式の条件は $^{\forall}\bar{\boldsymbol{x}}\in K^*(A)$ と同意であるから, Eq.(1・7) により,

$$\boldsymbol{\xi}\in\{K^*(A)\}^*=K(A)$$

となって左側が否定される。

⟵ Eq.(1・6) により, 右側は, $^{\exists}\bar{\boldsymbol{x}}\in K^*(A)$; $\boldsymbol{\xi}^T\bar{\boldsymbol{x}}>0$ となる。すなわち, $\boldsymbol{\xi}$ は $K^*(A)$ のベクトルと強意の鋭角をなすので K(A) には属しえない。



a) Pointed cone

b) Edged cone

c) Linear subspace cone

Fig.2 Images of different polyhedral convex cones in R^3.

Table 1 Relations of a vector ξ to L(A) and K(A).

Ralation	No.of equation	Condition
$\boldsymbol{\xi}\in \mathrm{L}(\mathrm{A})$	(1・2)	$^{\exists}\bar{\boldsymbol{y}};\ \boldsymbol{\xi}=\mathrm{A}\bar{\boldsymbol{y}}$
$\boldsymbol{\xi}\notin \mathrm{L}(\mathrm{A})$	(3・2)	$^{\exists}\bar{\boldsymbol{x}}\neq\mathbf{0}_n;\mathrm{A}^T\bar{\boldsymbol{x}}=\mathbf{0}_m,\boldsymbol{\xi}^T\bar{\boldsymbol{x}}>0$
$\boldsymbol{\xi}\in \mathrm{K}(\mathrm{A})$	(1・4)	$^{\exists}\bar{\boldsymbol{y}}\geq\mathbf{0}_m;\boldsymbol{\xi}=\mathrm{A}\bar{\boldsymbol{y}}$
$\boldsymbol{\xi}\notin \mathrm{K}(\mathrm{A})$	(3・1)	$^{\exists}\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathrm{R}^n;\mathrm{A}^T\bar{\boldsymbol{x}}\leqq\mathbf{0}_m,\boldsymbol{\xi}^T\bar{\boldsymbol{x}}>0$

T 3〕$\boldsymbol{\xi}\notin\mathrm{L}(\mathrm{A})\leftrightarrows{}^{\exists}\bar{\boldsymbol{x}}\neq\mathbf{0}_n,\ \mathrm{A}^T\bar{\boldsymbol{x}}=\mathbf{0}_m;\boldsymbol{\xi}^T\bar{\boldsymbol{x}}>0$ （3・2）

L(A)も錐の1つであり，証明はT 2〕と同様である。Eq.(3・2）の右側は,$\boldsymbol{\xi}$がLの法線と強意の鋭角をなすことをいっており，直感的にも明らかである。

4　各種角錐の性質

2 で定義した4種類の角錐の特徴的な性質を，**2** の定義と共にTable 2 に示した。それらは，**2** で採用したのとは別様の定義となっているので，それら相互の等価性をなるべく幾何学的に証明する。その準備として，次の諸空間を定義する。

$\mathrm{P_O}=\{\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{y}>\mathbf{0}_m\}$　m次元開正空間 （4・1）

$\mathrm{P_C}=\{\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0}_m\}$　m次元閉正空間 （4・2）

$\mathrm{Range}\ \mathrm{A}^T=\{\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{y}=\mathrm{A}^T\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^n\}$ （4・3）

$\mathrm{Ker}\ \mathrm{A}\quad=\{\boldsymbol{y}\,|\,\mathrm{A}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}_n,\quad \boldsymbol{y}\in\mathrm{R}^m\}$ （4・4）

Range A^T および Ker A はそれぞれ線形部分空間であり，R^mで相互に直交補空間を形成すること，すなわち

$\mathrm{Range}\ \mathrm{A}^T\perp\mathrm{Ker}\ \mathrm{A},\ \mathrm{Range}\ \mathrm{A}^T\oplus\mathrm{Ker}\ \mathrm{A}=\mathrm{R}^m$ （4・5）

は既知であるとする。

4.1　針　状　錐

T 4〕$\mathrm{K}(\mathrm{A})\in\mathscr{K}_\mathrm{P}\leftrightarrows{}^{\exists}\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathrm{R}^n;\mathrm{A}^T\bar{\boldsymbol{x}}>\mathbf{0}_m$ （2・6再）

$\leftrightarrows{}^{\forall}\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0}_m,\ \mathrm{A}\boldsymbol{y}\neq\mathbf{0}_n$ （4・6）

Eq.(2・6）および Eq.(4・6）はそれぞれ次のようにも表現できる。

$\mathrm{Range}\ \mathrm{A}^T\cap\mathrm{P_O}\neq\phi$ （2・6′）

$\mathrm{Ker}\ \mathrm{A}\cap\mathrm{P_O}=\phi$ （4・6′）

⟶Eq.(2・6′)を肯定し，仮にEq.(4・6′)を否定すると

$^{\exists}\boldsymbol{y}_1\in\mathrm{Range}\ \mathrm{A}^T\cap\mathrm{P_O}$

$^{\exists}\boldsymbol{y}_2\in\mathrm{Ker}\ \mathrm{A}\cap\mathrm{P_C}$

Eq.(4・5）より，$\boldsymbol{y}_1^T\boldsymbol{y}_2=0$が言えるが，一方

$\boldsymbol{y}_1\in\mathrm{P_O}\quad\therefore\boldsymbol{y}_1>\mathbf{0}_m$

$\boldsymbol{y}_2\in\mathrm{P_C}\quad\therefore\boldsymbol{y}_2\geq\mathbf{0}_m$

$\therefore\quad\boldsymbol{y}_1^T\boldsymbol{y}_2>0$

これは矛盾だからEq.(4・6′)は肯定されねばならない。

⟵対偶を使うためにEq.(2・6′)を否定すると

$^\forall \boldsymbol{y} \in \mathrm{P_O},\ \boldsymbol{y} \notin \mathrm{Range\ A^T}$　　(i)

Eq.(4・5)により，次の直交分解がある。

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_R + \boldsymbol{y}_K,\ \boldsymbol{y}_R \in \mathrm{Range\ A^T},\ \boldsymbol{y}_K \in \mathrm{Ker\ A}$　　(ii)

(i)により，$\boldsymbol{y}_K \fallingdotseq \boldsymbol{0}_m$に注意して，(ii)の左より$\boldsymbol{y}_K^T$を乗じて

$\boldsymbol{y}_K^T \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{y}_K|^2 > 0$

この式が任意の$\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}_m$に対して成立するから

$\boldsymbol{y}_K \geq \boldsymbol{0}_m,\quad \therefore \boldsymbol{y}_K \in \mathrm{P_C}$

従って，Eq.(4・6′)が否定された。

Table 2 Definitions of different cones.

<table>
<tr><th>Name of cone</th><th>Symbol</th><th>Definition in 2</th><th>Alternative definition</th></tr>
<tr><td>Pointed cone</td><td>$\mathscr{K}_P$</td><td>$^\exists \bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{R^n}; \mathrm{A^T}\bar{\boldsymbol{x}} > \boldsymbol{0}_m$ (2・6)</td><td>$^\forall \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}_m,\ \mathrm{A}\boldsymbol{y} \fallingdotseq \boldsymbol{0}_n$ (4・6)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Edged cone</td><td rowspan="2">$\mathscr{K}_E$</td><td>$^\exists \bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{R^n}; \mathrm{A^T}\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0}_m$ (2・7)
$^\forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{R^n},\ \mathrm{A^T}\boldsymbol{x} \ngtr \boldsymbol{0}_m$ (2・8)</td><td>$^\forall \boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}_m,\ \mathrm{A}\boldsymbol{y} \fallingdotseq \boldsymbol{0}_n$ (4・8)
$^\exists \bar{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0}_m; \mathrm{A}\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}_n$ (4・9)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{a}_i^T \bar{\boldsymbol{x}} = 0 \leftrightarrows \bar{y}_i > 0 \\ \boldsymbol{a}_j^T \bar{\boldsymbol{x}} > 0 \leftrightarrows \bar{y}_j = 0\end{array}\right\}$ (4・10)</td></tr>
<tr><td>Linear subspace cone</td><td>$\mathscr{K}_L$</td><td>$^\exists \bar{\boldsymbol{x}} \fallingdotseq \boldsymbol{0}_n; \mathrm{A^T}\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}_m$
$^\forall \boldsymbol{x} \fallingdotseq \boldsymbol{0}_n,\ \mathrm{A^T}\boldsymbol{x} \ngeq \boldsymbol{0}_m$ (2・10)</td><td>rank A <n
$^\exists \bar{\boldsymbol{y}} > \boldsymbol{0}_m; \mathrm{A}\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}_n$ (4・7)</td></tr>
<tr><td>Total space cone</td><td>$\mathscr{K}_T$</td><td>$^\forall \boldsymbol{x} \fallingdotseq \boldsymbol{0}_n,\ \mathrm{A^T}\boldsymbol{x} \ngeqq \boldsymbol{0}_m$</td><td>rank A=n</td></tr>
</table>

4.2 線形真部分空間錐、全空間錐

T 5] $\mathrm{K(A)} \in \mathscr{K}_L \cup \mathscr{K}_T \leftrightarrows {}^\forall \boldsymbol{x} \fallingdotseq \boldsymbol{0}_n,\ \mathrm{A^T}\boldsymbol{x} \ngeq \boldsymbol{0}_m$　　(2・10再)

$\leftrightarrows {}^\exists \bar{\boldsymbol{y}} > \boldsymbol{0}_m; \mathrm{A}\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}_n$　　(4・7)

Eq.(2・10),(4・7)は次のようにも表現できる。

$\mathrm{Range\ A^T} \cap \mathrm{P_C} = \phi$　　(2・10′)

$\mathrm{Ker\ A} \cap \mathrm{P_O} \fallingdotseq \phi$　　(4・7′)

⟶対偶を使うために，Eq.(4・7′) を否定する。

$^\forall \boldsymbol{y} \in \mathrm{P_O},\ \boldsymbol{y} \notin \mathrm{Ker\ A}$　　(i)

次の直交分解があり，(i) により$\boldsymbol{y}_R \fallingdotseq \boldsymbol{0}_m$である。

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_R + \boldsymbol{y}_K,\ \boldsymbol{y}_R \in \mathrm{Range\ A^T},\ \boldsymbol{y}_K \in \mathrm{Ker\ A}$

左より$\boldsymbol{y}_R^T$を乗ずることにより

$\boldsymbol{y}_R^T \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{y}_R|^2 > 0,\quad \therefore \boldsymbol{y}_R \in \mathrm{P_C}$

$\longleftarrow$ Eq.(4・7′)より

$\quad {}^{\exists}\boldsymbol{y}_1 \in \mathrm{Ker\,A} \cap \mathrm{P_O}$

このとき，もし Eq.(2・10′)を否定すると

$\quad {}^{\exists}\boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{Range\,A^T} \cap \mathrm{P_C}$

Eq.(4・5) より，$\boldsymbol{y}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2=0$ となるが，一方において，$\boldsymbol{y}_1 \in \mathrm{P_O}$, $\boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{P_C}$ より，$\boldsymbol{y}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2>0$ となる。従って Eq.(2・10′)は肯定されなければならない。

4.3　楔　状　錐

T 6〕$\mathrm{K(A)} \in \mathscr{K}_{\mathrm{E}} \leftrightarrows {}^{\exists}\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}};\mathrm{A^T}\bar{\boldsymbol{x}} \geq \mathbf{0}_{\mathrm{m}}$　　(2・7再)

$\qquad {}^{\forall}\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}},\ \mathrm{A^T}\boldsymbol{x} \ngtr \mathbf{0}_{\mathrm{m}}$　　(2・8再)

$\qquad \leftrightarrows {}^{\forall}\boldsymbol{y} > \mathbf{0}_{\mathrm{m}},\ \mathrm{A}\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}_{\mathrm{n}}$　　(4・8)

$\qquad {}^{\exists}\bar{\boldsymbol{y}} \geq \mathbf{0}_{\mathrm{m}};\ \mathrm{A}\bar{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0}_{\mathrm{n}}$　　(4・9)

このとき，次式が成立する。

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{i}} > 0 \leftrightarrows \boldsymbol{a}_{\mathrm{i}}{}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}} = 0 \\ \bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{j}} = 0 \leftrightarrows \boldsymbol{a}_{\mathrm{j}}{}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}} > 0 \end{array}\right\} \qquad (4・10)$$

T 4〕により，Eq.(2・8)と Eq.(4・9) の等価性が，またT 5〕により，Eq.(2・7)と Eq.(4・8)の等価性が示される。一方

$\quad \bar{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}(\mathrm{A^T}\bar{\boldsymbol{x}}) = (\mathrm{A}\bar{\boldsymbol{y}})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}_{\mathrm{n}}{}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}} = 0$

と，$\bar{\boldsymbol{y}} \geq \mathbf{0}_{\mathrm{m}}$, $\mathrm{A^T}\bar{\boldsymbol{x}} \geq \mathbf{0}_{\mathrm{m}}$ より，Eq.(4・10) が成立する。

5.　ベクトルの所属に関連する二者択一定理

任意の$\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$と，n×mマトリックスAをとると

$\quad \boldsymbol{\xi} \in \mathrm{L(A)}$　　(5・1)

$\quad \boldsymbol{\xi} \notin \mathrm{L(A)}$　　(5・2)

の中のいずれか一方が，そして一方のみが起こる。この事を以下で単に「二者択一である」と表現する。したがって，Table 1で，Eq.(1・2)と Eq.(3・2) は二者択一であり，次の Gale の定理が成立する。

T 7〕 I〕$\boldsymbol{\xi} = \mathrm{A}\boldsymbol{y}$ に解 $\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$がある。

　　　Ⅱ〕$\mathrm{A^T}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_{\mathrm{m}}$, $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$ に解$\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$がある。

は二者択一である。

同様に，$\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{K(A)}$, $\boldsymbol{\xi} \notin \mathrm{K(A)}$ も二者択一である。したがって，Table 1 の Eq.(1・3) と Eq.(3・1)より次の Farkas の定理が成立する。

T 8〕 I〕$\boldsymbol{\xi} = \mathrm{A}\boldsymbol{y}$ に $\boldsymbol{y} \geqq \mathbf{0}_{\mathrm{m}}$なる解がある。

　　　Ⅱ〕$\mathrm{A^T}\boldsymbol{x} \leqq \mathbf{0}_{\mathrm{m}}$に$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$ なる解がある。

は二者択一である。

6. 角錐の種類に関連する諸定理

Eq.(1・1)に従う $n\times m$ マトリックスAの張る角錐K(A)は,それが $\mathbf{0}_n$ 一点のみよりなる場合を除けば,T1〕により,Table 2 のどれか一つの,そして一つのみの錐に分類される。

まず,$K(A)\in\mathscr{K}_P$, $K(A)\in\mathscr{K}_E\cup\mathscr{K}_L\cup\mathscr{K}_T$ は二者択一であることと,Table 2 の条件式により,次の Gordan の定理が導ける。

T10〕 Ⅰ〕 $A^T\boldsymbol{x}>\mathbf{0}_n$ に解 $\boldsymbol{x}\in R^n$ がある。

Ⅱ〕 $A\boldsymbol{y}=\mathbf{0}_n$ に $\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0}_m$ なる解がある。

は二者択一である。

さらに,$K(A)\in\mathscr{K}_P\cup\mathscr{K}_E$, $K(A)\in\mathscr{K}_L\cup\mathscr{K}_T$ も二者択一であることより,次の Stiemkeの定理が導ける。

T11〕 Ⅰ〕 $A^T\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}_m$ に解 $\boldsymbol{x}\in R^n$ がある。

Ⅱ〕 $A\boldsymbol{y}=\mathbf{0}_n$ に $\boldsymbol{y}>\mathbf{0}_m$ なる解がある。

は二者択一である。

次に,Aに次のような特殊な構造を与える。

$$A=[A_1, B, -B] \tag{6・1}$$

ただし,A_1 は $n\times m_1$,Bは $n\times m_2$ マトリックスとする。A_1,BがEq.(1・1)に従い,空でなければ Eq.(2・6)は成立し得ないから,

$$K(A)\in\mathscr{K}_E \tag{6・2}$$

$$K(A)\in\mathscr{K}_L\cup\mathscr{K}_T \tag{6・3}$$

が二者択一となる。Eq.(6・2)の場合

$$\exists\bar{\boldsymbol{x}}\in R^n,\ \begin{bmatrix} A_1^T\bar{\boldsymbol{x}} \\ B^T\bar{\boldsymbol{x}} \\ -B^T\bar{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix}\geq\mathbf{0}_{m_1+2m_2}$$

より,$A_1^T\bar{\boldsymbol{x}}\geq\mathbf{0}_{m_1}$, $B^T\bar{\boldsymbol{x}}=\mathbf{0}_{m_2}$ をえる。一方,Eq.(6・3)の場合,$\bar{\boldsymbol{y}}=(\bar{\boldsymbol{y}}_1{}^T, \bar{\boldsymbol{y}}_b^T, \bar{\boldsymbol{y}}_b'^T)^T>\mathbf{0}_{m_1+2m_2}$ として,

$$A_1\bar{\boldsymbol{y}}_1+B\bar{\boldsymbol{y}}_b-B\bar{\boldsymbol{y}}'_b=A_1\bar{\boldsymbol{y}}_1+B(\bar{\boldsymbol{y}}_b-\bar{\boldsymbol{y}}'_b)=\mathbf{0}_n$$

より,$\bar{\boldsymbol{y}}_b-\bar{\boldsymbol{y}}'_b=\bar{\boldsymbol{y}}_2$ とおいて

$$A_1\bar{\boldsymbol{y}}_1+B\bar{\boldsymbol{y}}_2=\mathbf{0}_n,\ \bar{\boldsymbol{y}}_1>\mathbf{0}_m$$

を得る。そこで,記号を適当に変えて次の定理を得る。

T12〕 Aが空でないとき

Ⅰ〕 $A^T\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}_{m_1}$, $B^T\boldsymbol{x}=\mathbf{0}_{m_2}$ に解 $\boldsymbol{x}\in R^n$ がある。

Ⅱ〕 $A\boldsymbol{y}_1+B\boldsymbol{y}_2=\mathbf{0}_n$ に,$\boldsymbol{y}_1>\mathbf{0}_{m_1}$ なる解がある。

は二者択一である。

この定理は,Tucker の定理と呼ばれるものの特別な場合を形成し,Bが空のときはT11〕に帰着する。

以上はT12〕を除いては，一つのマトリックスのみを含む定理である。しかし，この種の定理の中で，最も強力なのは，次のSlaterの定理である。

T13〕 n行で，それぞれの，a，b，c，d列を持つマトリックスA，B，C，Dがあって，A，Bは空でないとする。この時，次のI〕，II〕は二者択一である。

I〕 $A^T\boldsymbol{x}>\mathbf{0}_a,\ B^T\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}_b,\ C^T\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}_c,\ D^T\boldsymbol{x}=\mathbf{0}_d$　(6・4)

に解 $\boldsymbol{x}\in R^n$ がある。

II〕 $A\boldsymbol{y}_a+B\boldsymbol{y}_b+C\boldsymbol{y}_c+D\boldsymbol{y}_d=\mathbf{0}_n$　(6・5)

i） $\boldsymbol{y}_a\geq\mathbf{0}_a,\ \boldsymbol{y}_b\geqq\mathbf{0}_b,\ \boldsymbol{y}_c\geqq\mathbf{0}_c$　(6・6)

または

ii） $\boldsymbol{y}_a\geqq\mathbf{0}_a,\ \boldsymbol{y}_b>\mathbf{0}_b,\ \boldsymbol{y}_c\geqq\mathbf{0}_c$　(6・7)

に解，$\boldsymbol{y}_a\in R^a,\ \boldsymbol{y}_b\in R^b,\ \boldsymbol{y}_c\in R^c,\ \boldsymbol{y}_d\in R^d$ がある。

本報告の方法でこの定理を直接証明することはできないが，多数のマトリックスを含むすべてのこの種定理を証明するための共通の基礎となる定理がTable 2より次のように導ける。

T14〕 Eq.(1・1)に従う任意のn×mマトリックスAに対し，

$A^T\boldsymbol{x}\geqq\mathbf{0}_m,\ \boldsymbol{x}\in R^n$　(6・8)

$A\boldsymbol{y}=\mathbf{0}_n,\ \boldsymbol{y}\geqq\mathbf{0}_m$　(6・9)

には次式を満たす解がある。

$A^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}>\mathbf{0}_m$　(6・10)

K(A)はTable 2のいずれかの錐である。

$K(A)\in\mathscr{K}_P$ のとき，Eq.(2・6)の $\bar{\boldsymbol{x}}$ を $\boldsymbol{x}$ とし，$\boldsymbol{y}=\mathbf{0}_m$ とすれば，Eq.(6・10)が満たされる。

$K(A)\in\mathscr{K}_E$ のとき，Eq.(2・7)の $\bar{\boldsymbol{x}}$ を $\boldsymbol{x}$，Eq.(4・9)の $\bar{\boldsymbol{y}}$ を $\boldsymbol{y}$ とすると，Eq.(4・10)の性質のゆえにEq.(6・10)が満たされる。

$K(A)\in\mathscr{K}_L\cup\mathscr{K}_T$ のとき，Eq.(4・7)の $\bar{\boldsymbol{y}}$ を $\boldsymbol{y}$ とし，$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}_n$ と取ればよい。

Table 3 Dual alternatives.

Theorem name	Dual alternatives			
	Geometrical		Algebraic	
Gale	$\boldsymbol{\xi}\in L(A)$	$\boldsymbol{\xi}\notin L(A)$	$^\exists\boldsymbol{y}\in R^m;\ \boldsymbol{\xi}=A\boldsymbol{y}$	$^\exists\boldsymbol{x}\in R^n;\ A^T\boldsymbol{x}=\mathbf{0}_m$ $\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{x}>0$
Farkas	$\boldsymbol{\xi}\in K(A)$	$\boldsymbol{\xi}\notin K(A)$	$^\exists\boldsymbol{y}\geqq\mathbf{0}_m;\ \boldsymbol{\xi}=A\boldsymbol{y}$	$^\exists\boldsymbol{x}\in R^n;\ A^T\boldsymbol{x}\leqq\mathbf{0}_m$ $\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{x}>0$
Gordan	$K(A)$ $\in\mathscr{K}_E\cup\mathscr{K}_L\cup\mathscr{K}_T$	$K(A)\in\mathscr{K}_P$	$^\exists\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0}_m;\ A\boldsymbol{y}=\mathbf{0}_n$	$^\exists\boldsymbol{x}\in R^n;\ A^T\boldsymbol{x}>\mathbf{0}_m$
Stiemke	$K(A)\in\mathscr{K}_L\cup\mathscr{K}_T$	$K(A)\in\mathscr{K}_P\cup\mathscr{K}_E$	$^\exists\boldsymbol{y}>\mathbf{0}_m;\ A\boldsymbol{y}=\mathbf{0}_n$	$^\exists\boldsymbol{x}\in R^n;\ A^T\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}_m$
——	$K(A)\in\mathscr{K}_L\cup\mathscr{K}_T$ $A=[A_1,\ B,\ -B]\in R^{n\times(m_1+2m_2)}$	$K(A)\in\mathscr{K}_E$	$^\exists\boldsymbol{y}_1>\mathbf{0}_{m_1},\ \boldsymbol{y}_2\in R^{m_2}$ $;A\boldsymbol{y}_1+B\boldsymbol{y}_2=\mathbf{0}_n$	$^\exists\boldsymbol{x}\in R^n$ $;A^T\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}_m,B^T\boldsymbol{x}=\mathbf{0}_{m_2}$

7. 結　　　語

T14〕に出発して，T13〕または それに類する定理を証明する道筋は文献[1] に詳しいので述べなかった。しかし，T13〕のⅠ〕は，K(A)$\in\mathscr{K}_P$, K(B)$\in\mathscr{K}_E$, K(C)$\in\mathscr{K}_E$ または$\mathscr{K}_L$, K(D)$\in\mathscr{K}_L$が，Fig.2で$\bar{\boldsymbol{x}}$と表わされている軸を共有する場合である。そのときⅡ〕が成立しないとは，いったん$\boldsymbol{a}_k$のどれかの正方向〔i)Eq.(6・6)の場合〕もしくは全$\mathbf{b}_k$の正方向〔ii)Eq.(6・7)の場合〕に進んでしまうと，他のベクトルの正方向を合成して原点$\mathbf{O}_n$に戻ることはできないことを言っている。かかる記述が証明にならないことは当然であるが，定理に対し，この種の幾何学的な像を与えうることは，一部の工学・技術者には役立つものと信ずる。それがこの小論の目指すすべてであって，その内容に何らの新しさをも主張するものではない。

Table 3に本報告で取扱った二者択一定理をまとめて示した。

引用文献

1) O.L. マンガサリアン（関根智明訳）：非線形計画法(1972), pp.216,培風館