



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Walker法に準拠した指数乱数を用いた指数型ランダム信号の発生
Author(s)	大柳, 俊夫; Ohyanagi, Toshio; 中川, 嘉弘 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 137, 73-82
Issue Date	1987-10-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42054
Type	departmental bulletin paper
File Information	137_73-82.pdf



Walker 法に準拠した指数乱数を用いた 指数型ランダム信号の発生

大柳 俊夫 中川 嘉弘 加地 郁夫

(昭和 62 年 6 月 30 日受理)

Generation of Random Telegraph Signal using Exponential Random Numbers based on Walker's Method

Toshio OHYANAGI, Yoshihiro NAKAGAWA and Ikuo KAJI

(Received June 30, 1987)

Abstract

In this paper a method of generating random telegraph signals of good statistical quality is described. For this purpose a method of generating exponential random numbers based on Walker's method is proposed and its adequacy was first verified. Then a method of generating random telegraph signal in such a way that its lead-time can be almost ignored is explained using a petri-net model and its validity was verified by computer simulation.

And a block diagram of random telegraph signal generator based on this concept is given.

1. はじめに

指数型ランダム信号 (Random Telegraph Signal) とは、2つのレベルの信号が、交互に指数分布に従う持続時間で現われる信号のことで、輻輳現象のシミュレーションや雑音信号の発生などで使われる信号である。この信号を発生させる方法はいろいろ提案されているが、その統計的性質に問題があるものが多い。

本報告では、統計的に性質の良い指数型ランダム信号を計算機を用いて発生させる一方法について述べる。まずそのために、指数型ランダム信号の発生に適した指数乱数の発生方法として、Walker 法^{1,2)}に準拠した方法を提案する。Walker 法は離散的な乱数を発生させる方法なので、指数乱数が持つ確率密度関数を離散化しなければならない。離散化の方法はいろいろ考えられるが、その中で最良な方法を述べ、その方法の妥当性を持ち行列の $M/M/1$ モデル⁴⁾の計算機シミュレーションによって検証する。なお、Walker 法に準拠した指数乱数は一様な時間間隔で高速に発生させることができるので、指数型ランダム信号の発生に適している。

つぎに、本報告の主題である指数型ランダム信号の発生について、指数乱数発生器と指数型ランダム信号発生器の間に有限長の FIFO バッファを設けて、信号の発生過程における一方のレベルの信号発生終了からもう一方のレベルの信号発生開始までに必要となるリード・タイム (準備時間) をほとんど無視できるような信号発生の方法を、ペトリネット表現⁵⁾を用いて述べ、その方法の有効性を計算機シミュレーションによって検証する。さらに、最適な FIFO バッファの長さ、および指数乱数の発生率と指数型ランダム信号の発生率の関係についても明らかにする。そして最後に、今回の基本設計に基づく回路構成について述べる。

2. Walker 法

Walker 法は異なる重みを持った数を乱数として発生させる高速の方法で、1974年に A. J. Walker が発見したものである。n 個の数 x_i ($i=1, \dots, n$) をそれぞれ重み p_i ($\sum_{i=1}^n p_i=1$) で乱数として発生したい場合、Walker 法を使うと以下のアルゴリズムで発生することができる。

[アルゴリズム] $I \leftarrow n \cdot U$ の整数部
 $V \leftarrow n \cdot U$ の小数部

$$X \leftarrow \begin{cases} x_{i+1}, & V < P [I] \\ x_{Y[I]}, & \text{その他} \end{cases}$$

ただし、 U は $[0, 1]$ 一様乱数で、 X は発生した乱数である。

ここで、 $P[I]$ 、 $Y[I]$ は p_i をもとに計算したテーブル $P=(P[0], \dots, P[n-1])$ 、 $Y=(Y[0], \dots, Y[n-1])$ の成分である。テーブル P 、 Y の計算は、以下の手順で行うことができる。

STEP 1: $(p_1, 1), \dots, (p_n, n)$ というリストをつくる。

STEP 2: STEP 1 でつくったリストを第一成分で小さい順に整列化する。その結果を、
 $(q_1, a_1), \dots, (q_n, a_n)$
 とする。ここで、 $q_1 \leq \dots \leq q_n$ 、 $a_i \in \{1, \dots, n\}$ 、 $a_i \neq a_j$ ($i \neq j$) である。

STEP 3: $i \leftarrow 1$ とする。

STEP 4: $P[a_i-1] \leftarrow n \cdot q_i$ 、 $Y[a_i-1] \leftarrow a_i$

STEP 5: $q_n \leftarrow q_n - (1/n - q_i)$ として、リストの $i+1$ 番目から n 番目の間で第一成分で小さい順に整列化する。 $i \leftarrow i+1$ とし、 $i < n$ ならば STEP 4 へ戻る。

STEP 6: $P[a_n-1] \leftarrow 1.0$ 、 $Y[a_n-1] \leftarrow a_n$ として終了する。

このようにしてテーブル P 、 Y を前もって計算しておく、アルゴリズムに従ってテーブルの参照を行い、一個の $[0, 1]$ 一様乱数から異なる重みを持った乱数を、一様の時間間隔で高速に発生させることができる。

3. Walker 法に準拠した指数乱数の発生方法

統計的に性質の良い指数型ランダム信号を計算機を用いて発生させるためには、まず指数乱数を一様な時間間隔で高速に発生させる必要がある。指数乱数とは

確率密度関数 $f(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x)$ ($x \geq 0, \lambda > 0$)

を持つ乱数のことでこのような乱数の発生方法として、対数関数法、フォン・ノイマンの方法、マーセリアの方法などがある^{2,3)}。 $(\lambda$ は指数乱数の発生率である。)対数関数法は、 U を $[0, 1]$ 一様乱数とすると、乱数 X を、 $X = -(1/\lambda) \cdot \text{Ln}U$ として発生する方法である。 $(U=0$ の場合は避けなければならない。)この計算をソフトで行う場合、対数計算にかかる時間が U に依存するので、一様な時間間隔で乱数を発生することはできない。さらに、対数計算は複雑なので、高速に発生することも難しい。また、フォン・ノイマンの方法とマーセリアの方法はいずれも対数計算のような複雑な計算を必要としないが、一個の乱数を発生するのに必要は $[0, 1]$ 一様乱数の個数が発生ごとに異なるので、一様な時間間隔で乱数を発生することはできない。

そこで、指数乱数を一様な時間間隔で高速に発生させるために、Walker 法に準拠した発生を行う。そのためには、確率密度関数 $f(x)$ を離散化しなければならない。

3-1 確率密度関数 $f(x)$ の離散化

$f(x)$ の定義域は $[0, \infty)$ であるから、離散化する場合、打ち切る値と分割幅が問題となる。打ち切る値 x_n (n は分割数) と、分割幅 Δx を

$$x_n = \frac{1}{\lambda} \cdot L \quad \Delta x = \frac{x_n}{n} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{d} \quad (1)$$

とすると、離散化は L と d によって決まる。このとき、

$$n = L \cdot d \quad x_i = i \cdot \Delta x \quad (i = 1 \cdots n) \quad (2)$$

という関係が成立する。また、確率変数が x_i である確率 p_i を $f(x)$ の区間 $[x_{i-1}, x_i]$ における面積とすると、

$$p_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = e^{-\lambda x_{i-1}} - e^{-\lambda x_i} = \frac{1 - e^{-\lambda \Delta x}}{e^{-\lambda x_{i-1}}} \cdot e^{-\lambda x_{i-1}} \quad (3)$$

となる。しかし、 x_n で打ち切ったので

$$\sum_{i=1}^n p_i = \int_0^{x_n} f(x) dx = 1 - e^{-\lambda L} \neq 1 \quad (4)$$

であるから、この和が 1 となるように p_i を

$$p_i' = \frac{p_i}{1 - e^{-\lambda L}} \quad (5)$$

と修正し、この p_i' を確率変数が x_i となる確率とする。

このように離散化すると、 p_i' が指数乱数の発生率 λ に無関係となるので、Walker 法を使うとき必要となるテーブル P, Y は、一度計算しておくとも λ が違って共通に使うことができる。これがこの離散化の特徴で、いろいろ考えられる離散化の中で最良な理由である。

さて、このように離散化した確率分布をもつ確率変数の平均 m と分散 v を計算すると、

$$m = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{ \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\lambda \Delta x}} - L \cdot \frac{e^{-\lambda L}}{1 - e^{-\lambda L}} \right\} \quad (6)$$

$$v = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \left\{ \frac{1}{d^2} \cdot \frac{e^{-\lambda \Delta x}}{(1 - e^{-\lambda \Delta x})^2} - L^2 \cdot e^{-\lambda L} \cdot \frac{1 - 2 \cdot e^{-\lambda L}}{(1 - e^{-\lambda L})^2} \right\} \quad (7)$$

となる。ここで、 $f(x)$ を確率密度関数とする確率変数の平均と分散は、それぞれ $1/\lambda$, $1/\lambda^2$ であるから、 $f(x)$ の離散化が、良い離散化であるためには、 m, v の値がこれらの値とほぼ等しいことが必要である。

そこで、 L と d をどのような基準で決定すればよいか問題となる。(4)式において、

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (1 - e^{-\lambda L}) = 1$$

であるから、 L が十分大きいときには、 p_i の修正は不要になる。また、(6), (7)式において、

$$\lim_{L, d \rightarrow \infty} m = \frac{1}{\lambda} \quad \lim_{L, d \rightarrow \infty} v = \frac{1}{\lambda^2}$$

であるから、 L と d が十分大きいときには、離散化した確率分布をもつ確率変数の平均と分散は、離散化する前と等しくなる。従って、 L と d を十分大きくすれば、良い離散化が行えることになる。しかし、表 1 に示すように、 L と d をそれほど大きくしなくても十分である。(表中の $m \cdot \lambda$, $v \cdot \lambda^2$ の値が 1 に近ければ近いほど良い離散化といえる。)

以上のことと計算機の精度を考慮して L と d は、

$$(a) L \text{ については, } \exp(-L) \approx 1.0 \times 10^{-6} \text{ となる } L (\approx 13.8)$$

(b)d については、 $m \cdot \lambda \approx 1$ となる d (≈ 50)

とすればよい。ただし、(2)式より L と d の積が整数となる必要がある。

3-2 離散化の方法の妥当性の検証

前節で述べた $f(x)$ の離散化の方法の妥当性を検証するために、Walker 法に準拠した離散的な指数乱数と対数関数法を使った連続的な指数乱数を発生させ、待ち行列の M/M/1 モデルの計算機シミュレーションを輻轉率を変化させながら乱数の種を変えて1000回行い、系の長さの平均の分布の様子を調べた。なお、離散化は、 $L=12.8$ 、 $d=40$ とした。このとき、 $\exp(-L) \approx 2.76 \times 10^{-6}$ 、 $m \cdot \lambda \approx 1.013$ 、 $L \cdot d=512$ である。この結果、どちらの方法もほぼ同じ分布となり、この離散化の妥当性が検証された。なお、シミュレーションの結果得られた系の長さの平均と分散、および系の長さの理論値を表2に示す。また、全シミュレーションに要した時間は、Walker 法が1時間18分24秒、対数関数法が2時間31秒で、Walker 法が対数関数法より約1.5倍高速であった。(測定は、PC-9801 VX (CPU: 80286 8MHz) 上で行った。)

4. 指数型ランダム信号の発生方法

指数型ランダム信号(Random Telegraph Signal)とは、図1に示すように High と Low 2種類のレベルの信号が、交互に指数分布に従う持続時間で現われる信号のことをいう。このような信号を計算機を用いて発生させるには、指数乱数を発生させその値を持続時間とする信号を発生させればよいのであるが、統計的に性質の良い信号を発生させるには、信号の発生におけるリード・タイムをほとんど無視できるような発生方法にしなければならない。

4-1 指数型ランダム信号の発生におけるリード・タイム

指数型ランダム信号の発生におけるリード・タイムを、図2の信号発生器のペトリネット表現を使って説明する。ある時点でトークンがブレース P_1 と P_5 に投入されているとする。すると、トランジション t_1 が発火可能となる。しかし、ただちに発火できるわけではなく、発火までに、

L	e^{-L}	d	$m \cdot \lambda$	$v \cdot \lambda^2$
10	4.54×10^{-5}	10	1.0504	0.9946
		50	1.0096	0.9954
		100	1.0046	0.9955
		1000	1.0000	0.9955
20	2.06×10^{-9}	10	1.0508	0.9992
		50	1.0100	1.0000
		100	1.0050	1.0000
		1000	1.0005	1.0000
30	9.36×10^{-14}	10	1.0508	0.9992
		50	1.0100	1.0000
		100	1.0050	1.0000
		1000	1.0005	1.0000

表1 L, dの値に対する e^{-L} , $m \cdot \lambda$, $v \cdot \lambda^2$ の値

輻轉率	Walker法	対数関数法	理論値
0.1	0.1102	0.1104	0.1111
	0.0006	0.0006	
0.2	0.2452	0.2503	0.2500
	0.0023	0.0023	
0.3	0.4231	0.4280	0.4286
	0.0060	0.0062	
0.4	0.6554	0.6605	0.6667
	0.0177	0.0152	
0.5	0.9750	0.9957	1.0000
	0.0437	0.0465	
0.6	1.4667	1.5010	1.5000
	0.1435	0.1461	
0.7	2.2145	2.2934	2.3333
	0.4406	0.5361	
0.8	3.7214	3.8204	4.0000
	2.6179	2.4298	
0.9	7.2847	7.3667	9.0000
	19.3115	18.4911	

表2 シミュレーション実験で得られた系の長さの平均(上段)と分散(下段)、および系の長さの理論値

表2 シミュレーション実験で得られた系の長さの平均(上段)と分散(下段)、および系の長さの理論値

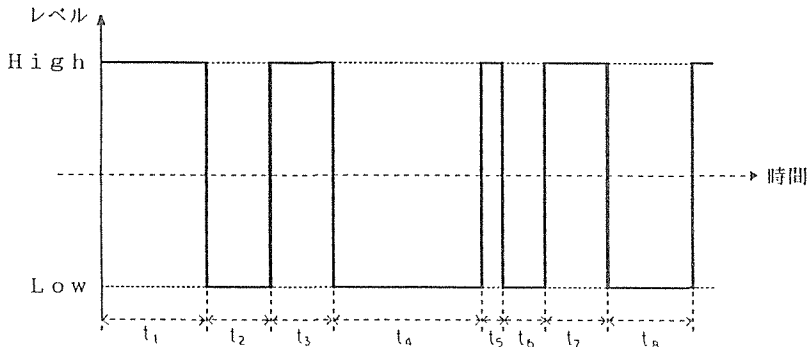


図1 指数型ランダム信号 (時間間隔 $t_1 \sim t_8$ が指数分布に従う)

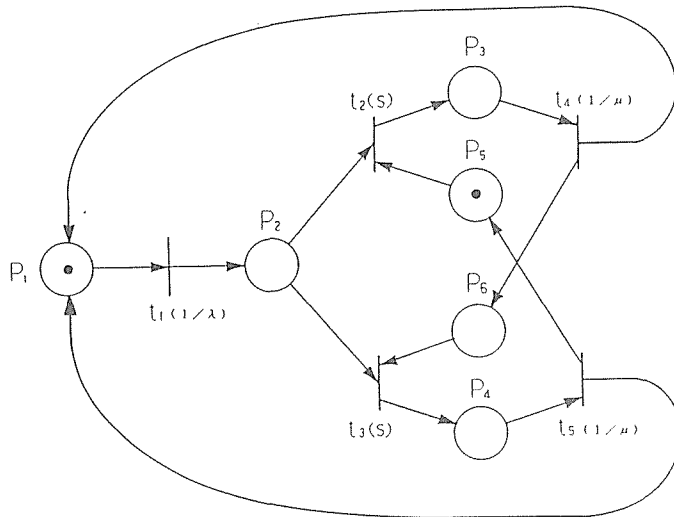


図2 信号発生器のペトリネット表現

一定時間 $1/\lambda$ がかかる。(λ は乱数発生率) t_1 が発火すると、プレース P_1 からトークンが取去されプレース P_2 に投入される。そして、つぎにトランジション t_2 が発火可能となる。しかし、ここでも発火までに、信号発生のための準備に必要な時間 s がかかる。 t_2 が発火するとプレース P_2 からトークンが取去られプレース P_3 に投入され、High レベルの信号の発生が開始され、トランジション t_4 が発火するまで持続する。 t_4 が発火するまでの時間は発生された指数乱数(平均 $1/\mu$ 、 μ は信号発生率)によってきまる。 t_4 が発火すると、High レベルの信号の発生が終了してプレース P_3 のトークンが取去され、プレース P_1 と P_6 に投入される。ここまでが、High レベルの信号の発生過程である。今度はプレース P_6 にトークンがあるので、Low レベルの信号を発生する過程となり、この過程が終了した時点ではふたたびプレース P_1 と P_5 にトークンが投入される。このように、High レベルと Low レベルの信号の発生が交互に繰り返されて指数型ランダム信号の発生が行われる。このとき、時間 $(1/\lambda) + s$ がリード・タイムとなる。High、Low レベルそれぞれの信号の持続時間が、リード・タイムに比べて十分長ければ、その時間を無視して、発生された信号を指数型ランダム信号とみなすことができるが、そうでない場合はリード・タイムが影響して、発生された信号はもはや指数型ランダム信号とみなすことができなくなる。(リード・タイムを含んだ指数型ランダム信号となる。)そこで、信号発生器の構成をリード・タイムをほとんど無視で

きるように改良する。

4-2 信号発生器の改良

図2に示す信号発生器では、乱数の発生と信号の発生を逐次的に行っているため、リード・タイムが大きくなる。このうちほとんどは乱数の発生にかかる時間であるから、この時間を吸収するために乱数を蓄える FIFO バッファを用意してリード・タイムを短くし、乱数の発生と信号の発生を並行に行うように信号発生器を改良する。図3に FIFO バッファを付けて改良した信号発生器

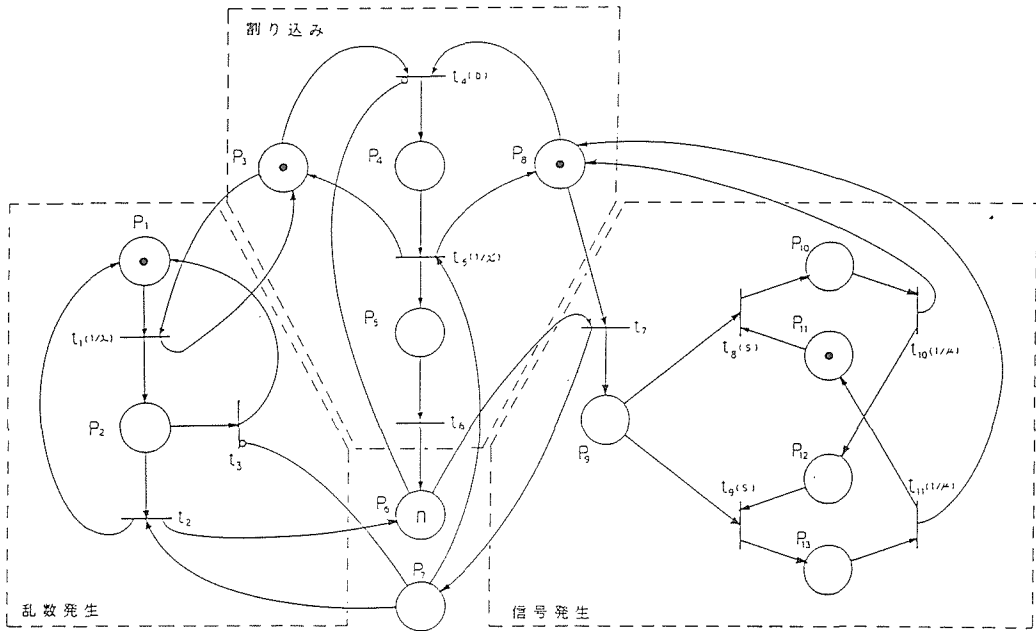


図3 改良した信号発生器のペトリネット表現

生器のペトリネット表現を示す。FIFO バッファは、プレース P_6 と P_7 で構成され、その長さは n である。つまり、

$$(\text{プレース } P_6 \text{ のトークンの数}) + (\text{プレース } P_7 \text{ のトークンの数}) = n$$

という関係が常に成立する。

この信号発生器では、通常、乱数の発生と信号の発生をバッファを仲介として並行に行うが、ある状態になると割り込みを発生させる。乱数の発生は一定時間間隔 $1/\lambda$ で行い (t_1 の発火)、バッファがフルのときは発生した乱数を棄却 (t_3 の発火)、そうでない時はバッファに格納する (t_2 の発火)。この動作を割り込みが発生するまで繰り返す。また信号の発生は、バッファから指数乱数を1つ取り出し (t_7 の発火) 前節で説明したように行われる。ここでも、この動作を割り込みが発生するまで繰り返す。さて、割り込みの発生 (t_4 の発生) であるが、これは信号を発生しようとした時点でバッファが空 (P_6 にトークンが存在しない状態) の時に起こる。割り込みが発生すると、通常の乱数の発生は中断され、(P_3 からトークンが取去られるので、 t_1 は発火不可能となる。) 一定時間 $1/\lambda'$ で乱数の緊急発生 (t_5 の発火) が行われる。そして、発生した乱数をバッファに格納し (t_6 の発火)、再び割り込み発生前の状態に戻って、乱数の発生と信号の発生を並行に行う。

この信号発生器におけるリード・タイムは、割り込みの起こらない場合は信号発生のための準備時間 s となり、割り込みが起こった場合はさらに割り込みのための準備時間 b と乱数の緊急発生に必要な一定時間 $1/\lambda'$ が加わった時間 $s+b+(1/\lambda')$ となる。(実際にはバッファとのデータの受け渡しや乱数の棄却に要する時間もリード・タイムに加えなければならないが、ここではこの時間を乱数の発生にかかる時間と信号の発生のための準備時間にしわ寄せして考えている。)ここで、 s が割り込みの発生にかかわらずかかる時間であるのに対し、 $b+(1/\lambda')$ は割り込みが発生したときのみかかる時間であるから、割り込みを発生させないようにすることが重要となる。実際 s は $1/\lambda'$ の1000分の1以下であるから、割り込みを発生させないようにすると信号の統計的性質は良くなる。そこで、割り込みをできるだけ発生させないように n , λ , μ を決定しなければならない。

4-3 信号発生器の計算機シミュレーションとその考察

この信号発生器における割り込みの発生と n , λ , μ の関係を調べるために、 $n=512$, $\lambda'=10.0$, $\mu=1.0$ に固定し λ をパラメータとして、乱数がバッファに256個蓄えられている状態から開始する計算機シミュレーションを、一つの λ に対して乱数の種を変えて500回行い、バッファに蓄えられる乱数の個数、乱数の棄却率、割り込みの発生率と λ の関係を調べた。なお、指数乱数の確率密度関数の離散化は $L=12.8$, $d=40$ として行った。

シミュレーションの結果を図4、図5に示す。この結果、割り込みを発生させないためには、 λ を1.0より大きくすればよいことがわかる。しかし、 λ をあまり大きくしたのでは乱数の棄却率が大きくなりむだであるから、1.0に近い値とするのが望ましい。しかし、 λ が1.0に近いとバッ

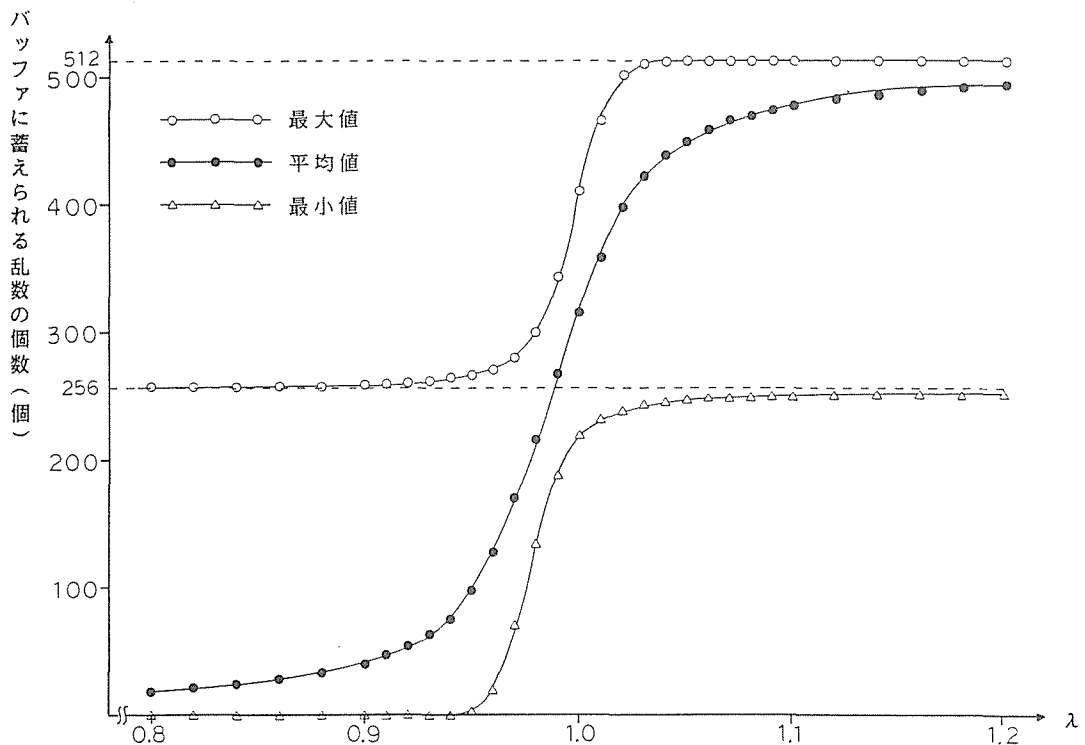


図4 バッファに蓄えられる乱数の個数の変化

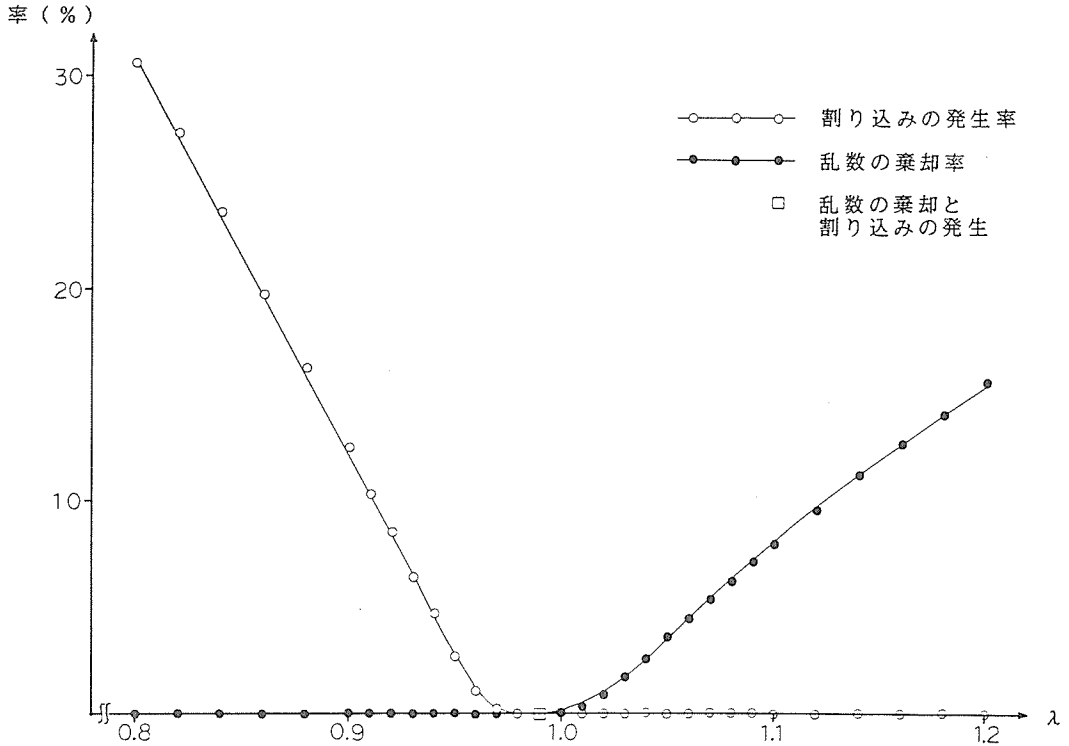


図5 乱数の棄却率および割り込み発生率

ファに蓄えられる乱数の個数のばらつきが大きくなるので、割り込みを発生させないためには n を大きくしなければならない。今回 $n=512$ としたが、この程度の大きさは必要である。なぜなら、計算機シミュレーションにおいて、 $\lambda=1.0$ のときバッファに蓄えられる乱数の個数が49個以下になることがあったからである。

ここで、乱数の発生と信号の発生の輻轉率 ρ を計算する。 λ と μ をともに1.0にすると見かけ上は、 $\rho=(\lambda/\mu)=1$ となるが、実際には信号の発生率 μ が指数乱数の離散化の影響を受けて(6)式より、

$$\mu' = \mu \cdot \frac{1}{\left\{ \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{1-e^{-\frac{d}{\lambda}}} - L \cdot \frac{e^{-L}}{1-e^{-L}} \right\}}$$

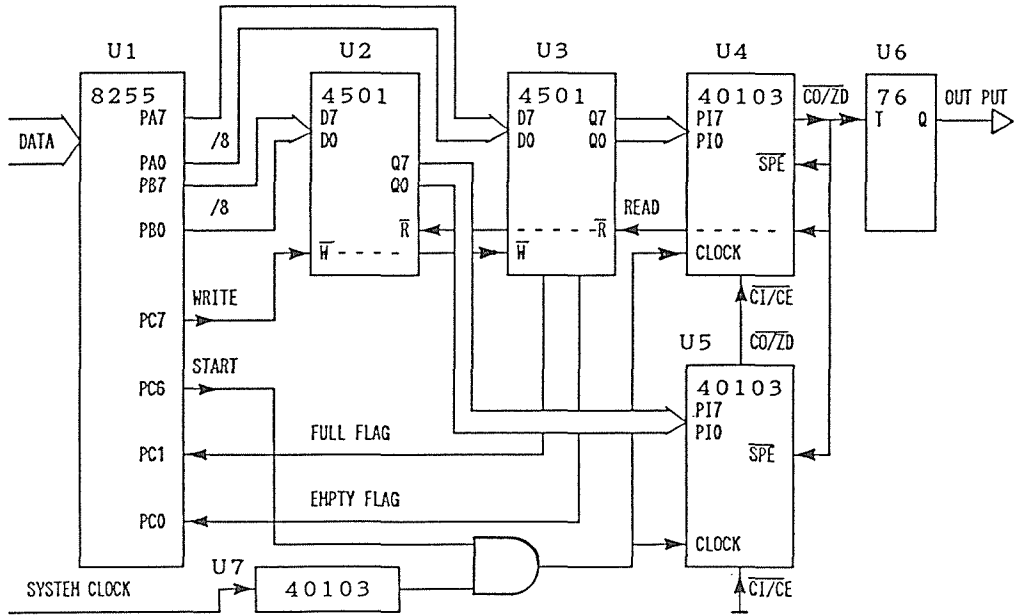
となるので、

$$\begin{aligned} \rho = (\lambda/\mu') &= (\lambda/\mu) \cdot \left\{ \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{1-e^{-\frac{d}{\lambda}}} - L \cdot \frac{e^{-L}}{1-e^{-L}} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{1-e^{-\frac{d}{\lambda}}} - L \cdot \frac{e^{-L}}{1-e^{-L}} \right\} \end{aligned}$$

となり、 L , d に依存することがわかる。今回の離散化は $L=12.8$, $d=40$ としたので、 $\rho=1.0125$ となる。従って、 λ と μ をともに1.0にしたことは、実は輻轉率が1.01程度となるように λ と μ を決めたことに相当する。

以上のことをまとめると、輻轉率が1.01程度となるように λ と μ を決めて n を500程度の大き

さとし、バッファに半分程度指数乱数が蓄えられた状態から信号の発生を開始すると、今回提案した方法では割り込みは起こらないので、統計的に性質の良い指数型ランダム信号を発生させることができる。また、このとき乱数の棄却率も 0.1%程度にすることができる。



U1 : 8255 ;PROGRAMMABLE PERIPHERAL INTERFACE
 U2,U3 : 4501 ;512*9 BIPOPT PARALLEL IN-OUT FIFO
 U4,U5 : 40103;8-STAGE PRESETTABLE SYNCHRONOUS DOWN COUNTER

図6 信号発生器の回路構成

4-4 信号発生器の回路構成

図6に信号発生器の回路構成図を示す。各ICの主な機能を簡単に説明すると、U1は計算機で発生した指数乱数のFIFOへの書き込みとFIFOのステータス信号の計算機への送信を行い、U2、U3は2個一組で指数乱数を格納するFIFOバッファを形成している。また、U4、U5は指数乱数データのFIFOからの読み出しとそのデータに比例した持続時間をもつ信号の発生を行い、U6は信号のレベルの切り替えを行っている。そして、U7はSYSTEM CLOCKの分周を行っている。

5. おわりに

本報告では、統計的に性質の良い指数型ランダム信号を計算機を用いて発生させる一方法を提案した。そのために、まず指数乱数の発生方法としてWalker法に準拠した方法を提案し、その方法の妥当性の検証を行った。ついで、リード・タイムがほとんど無視できるような指数型ランダム信号の発生方法をベトリネット表現を用いて説明し、その方法の有効性を計算機シミュレーションによって検証した。そして最後に、今回の基本設計に基づく信号発生器の回路構成について述べた。

今後、この回路構成をもとにして信号発生器を作成し、発生される信号が統計的に性質の良い指数型ランダム信号であることを検定して、輻輳現象のシミュレーションや信号解析に応用する予定である。また、今回提案した方法は指数型ランダム信号以外の信号の発生にも適用できるの

で、他のいろいろな分布に従う信号の発生も行う予定である。

参考文献

- 1) A. J. Walker: Electronics Letters, 10(1974), 8, P. 127~128
- 2) 渋谷正昭: 準数値算法/乱数(1981), サイエンス社
- 3) 脇本和晶: 乱数の知識(1970), 森北出版
- 4) 河原 靖: オペレーションズ・リサーチ入門(1987), P. 97-124, 共立出版
- 5) 市川惇信, 小森重信: ペトリネット入門(1984), 共立出版