



Title	CT像再生時窓関数に関する一考察
Author(s)	呉, 国慶; Wu, Guo-qing; 小川, 吉彦 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 138, 35-44
Issue Date	1988-01-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42067
Type	departmental bulletin paper
File Information	138_35-44.pdf



CT 像再生時窓関数に関する一考察

呉 国慶 小川 吉彦

(昭和 62 年 9 月 30 日受理)

Consideration on Windows in Computed Tomographic Image Reconstruction

Guo-qing WU and Yoshihiko OGAWA

(Received September 30, 1987)

Abstract

The generalized Hamming window function is frequently used in computed tomographic (CT) image reconstruction. But the blur and SN ratio are very sensitive to the value of parameter, α , used in the window. Generally, when the improvement of the SN ratio is aimed, at the reconstructed picture is more blurred. Thus, it is required to select the value of α for the sake of moderately satisfying both characteristics, namely the blur and the SN ratio.

The above-mentioned problem is discussed in this paper. And it is concluded that the appropriate value of α is 0.5 or a somewhat more than 0.5. It is possibly preferable to select 0.54 of α corresponding to the normal Hamming window function.

1. ま え が き

医用デジタル画像処理の一分野である CT (Computer Tomography) は、直接計測や観測が不可能な物体内部の断面像を、X線等による多数の方向からの投影像データより再生する方式である。このときに最もよく使用されるデジタル処理法はコンボリューション法である。しかし、この方法では無限大範囲の積分を有限和の数値計算で近似する必要性から窓関数が使われる。この窓関数の性質によって再生像の忠実性が左右される。

X線による CT を人体断面像再生の目的で使用するときは、放射線障害を防ぐために照射線量を可能な限り減らす。このため、投影像の信号対雑音比 (SN 比) は悪いのが普通である。上述の窓関数は、この SN 比の改善の目的も有する。このような窓関数の使用は高域遮断性のため、当然再生像がぼける原因となる。従って、ぼけがあまり気にならない程度の画質を有し、かつ SN 比がなるべく大きくなるような窓関数の使用が望まれる。本論文においては、窓関数として一般化されたハミング窓関数に限定し、これに使われているパラメータがどのような値のとき上述の目的を達成するかを検討する。

2. コンポリューション法

議論の都合上、CT像再生のためのコンポリューション法¹⁾について要約しておく。

図1にCTの座標系を示す。目標物のX線吸収率分布を $f(x, y)$ 、種々の方向 θ に対する検出器の検出光子数分布を $n(t, \theta)$ とする(注： n_0 を無吸収時検出数とする)。目的は $n(t, \theta)$ から $f(x, y)$ を復元することである。これをアナログ信号として扱くと、以下ようになる。

[A] $n(t, \theta)$ により投影データ $p(t, \theta)$ を計算する。

$$p(t, \theta) = -\ln\{n(t, \theta)/n_0\} \quad (1)$$

[B] 関数 $|f|$ を t 座標系に逆フーリエ変換した $h(t)$ を計算する。

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |f| \exp(2\pi ft) df \quad (2)$$

[C] $p(t, \theta)$ と $h(t)$ とのコンポリューションを計算し、補正データ $p'(t, \theta)$ を求める。

$$p'(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t', \theta) h(t-t') dt' \quad (3)$$

[D] $p'(t, \theta)$ を、 t を固定して θ に関し半周積分し、 (t, θ) 座標から (x, y) 座標に変換して $f(x, y)$ を得る。

$$f(x, y) = \int_0^\pi p'(t, \theta) d\theta \quad (4)$$

以上の計算をデジタル的に行うには、まず標本化定理により、式(2)の積分の無限区間を有限帯域 $|f| \leq f_{max}$ に制限する窓関数 $G(f)$ を採用する必要がある。すなわち

$$h(t) = \int_{-f_{max}}^{f_{max}} G(f) |f| \exp(2\pi ft) df \quad (2')$$

その後、変数を離散化し積分を総和で近似しなければならない。例えば、 $p(t_i, \theta_j)$ を $p_j(i)$ と略記すると、式(3)、(4)は

$$p'_j(i) = \sum_{k=1}^N p_j(k) h(i-k) \quad (3')$$

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^M [p'_j(i) + \{p'_j(i+1) - p'_j(i)\} d_j] \Delta\theta \quad (4')$$

となる。ここに、 M ：投影総数(θ に関する)、 N ：各 θ に対する投影データ総数、 $\Delta\theta$ ：投影角変化量($=\pi/M$)。なお、 $f(x, y)$ は一般に $p'_j(i)$ と $p'_j(i+1)$ の間にあるので、式(4')では線形補間している(d_j は点 (x, y) が間隔 a の2つの平行X線 t_i と t_{i+1} の間にあるとして、その点と t_i 線間の距離)。また、式(2')中の f_{max} は、サンプリング定理より $f_{max} \leq 1/2 a$ を満足しなければならない。

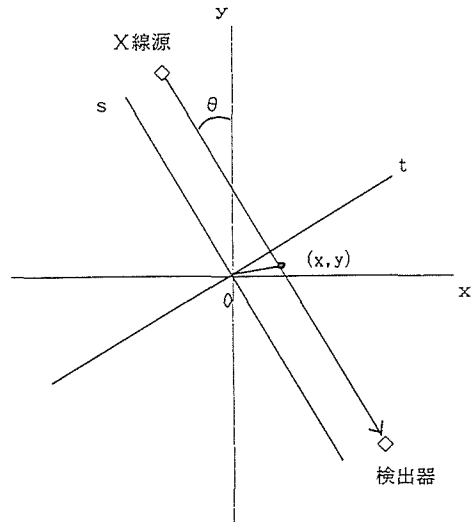


図1 投影に関する座標系

3. 一般化ハミング窓関数²⁾

式(2)の窓関数 $G(f)$ として f_{max} で遮断する方形窓を使用すると、ギブスの現象が強く現れて好ましくない。そこで、滑かに遮断するために次式の一般化ハミング窓関数を使用することにする ($f_{max}=1/2 a$ とする)。

$$G(f) = \alpha + (1 - \alpha) \cos(2 \pi a f), \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (5)$$

従って、式(2)は再び積分上限を無限大とし、逆フーリエ変換すべき関数を $H(f)$ とすると次式で表すことができる。

$$H(f) = \begin{cases} |f|G(f), & |f| \leq f_{max}=1/2a \\ 0 & , \quad |f| > f_{max} \end{cases} \quad (6)$$

一般化ハミング窓関数を使用する場合、パラメータ α の値によって再生像の画質が変化する。本論文では、このことを調べる。

通常のデジタル信号処理に使用する窓関数は正実数値のみを取る。従って、パラメータ α は $0.5 \leq \alpha \leq 1$ に限定される。しかし、CT処理では 0.5 以下の α を採用することもあるようである。これは、一種の複素窓と考えられ、 $H(f) < 0$ となる空間周波数帯域で逆相となり奇妙なことが起る可能性がありそうである。そこで、式(2)、(6)のインパルス応答を求めると次式のようにになる。ただし、簡単のため $f_{max}=0.5(a=1)$ とした。

$$h(t) = 2 \alpha \xi(t) + (1 - \alpha) \{ \xi(t-1) + \xi(t+1) \} \quad (7)$$

ここに

$$\xi(t) = \{ \cos(\pi t) + \pi t \cdot \sin(\pi t) - 1 \} / (4 \pi^2 t^2) \quad (8)$$

ただし、 $\xi(t \rightarrow 0) = 0.125$ 。

幾つかの α に対する $H(f)$ を図2に、 $h(t)$ を図3に示す。 α が 0.8 のときは $\alpha=1$ に対応する標本化関数に似るが、反対に α が小さくなるほど f の高域特性が抑えられ、インパルス応答波形が潰れる。特に、問題となる $\alpha=0.4$ の場合には、著しく応答波形がひずむ様子が分る。

以上のように、本来の断面像を復元する意味では、ギブスの現象が目立たない程度で α を大きくすることが望ましい。しかし、検出器出力はSN比が非常に悪いので、雑音除去の点からは、なるべく $H(f)$ の高域特性を抑えたほうがよい。このためには、 α を 0.5 に近づけるのが望ましい。従って、この両者の要求をある程度満足する最適な α が存在すると思われる。このことを、シミュレーションによって調べることにする。特に、 $\alpha < 0.5$ の複素窓に対しては、図2から分るように必ずしも高域除去特性とはいえない。このことにも注目して調べる。

4. シミュレーション

前述のように、シミュレーションに際して特に注目するところは、画像のエッジ部分でのぼけ具合やギブスの現象の現出とSN比の改善である。このため、具体的な断層画像の代りに、図4のような扇形の集合した画像を採用し、扇形内部のX線吸収率を 0.3 、外部のそれを 0 とした。このようなモデルを採用したのは、角度方向の変化が方形パルスのためであり、その周期が半径方向で変化するためエッジ部分の状況がよく分るものと期待したためである。

図4は対称図形であるから、一点鎖線で示してある第2象限のみの計算で目的を達することが

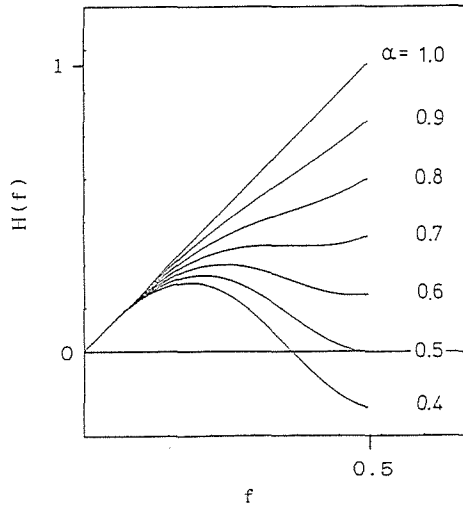


図2 $H(f)$ 特性

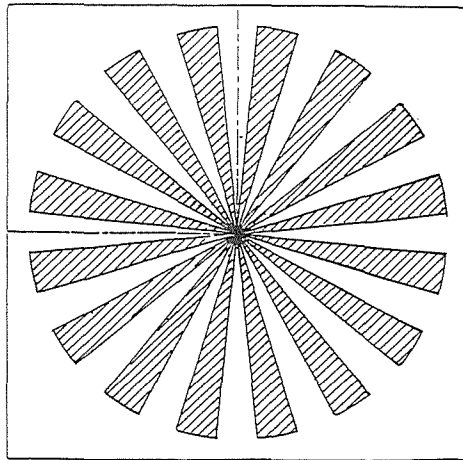


図4 シミュレーション用画像

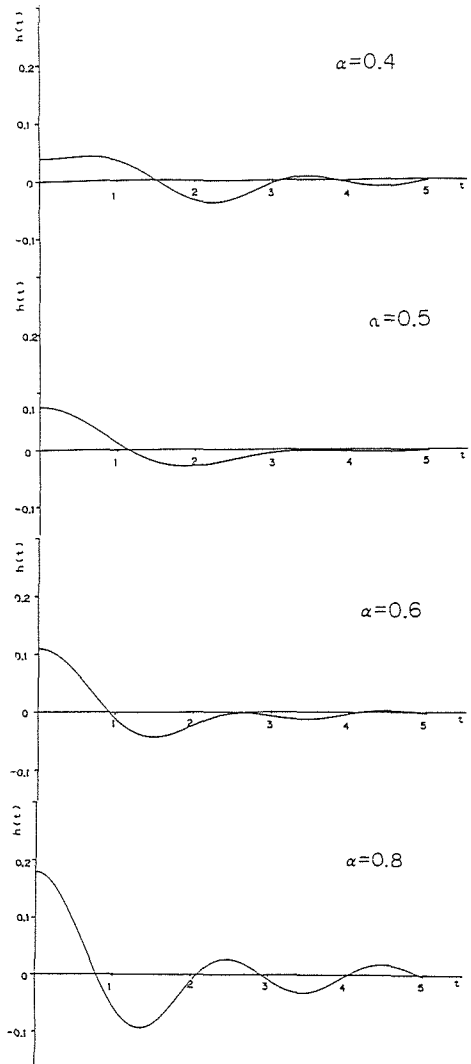


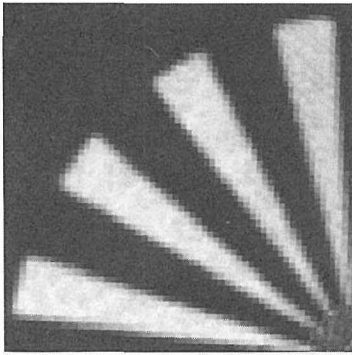
図3 インパルス応答波形

できる。この部分にて、扇形の半径は 9 cm とし、再生画像の画素数は 64×64 、1 pixel のサイズを 0.15 cm とした。投影は等間隔に $200 (= M)$ 方向から行ない、 $a = 0.15$ cm の標本間隔で一投影当り $180 (= N)$ のデータを採用した。

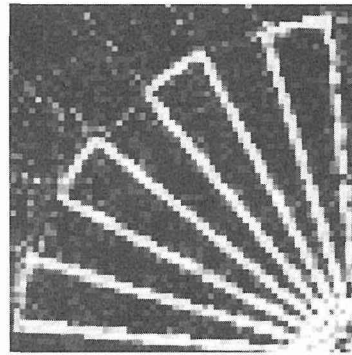
画像に雑音を混入する場合は、雑音がポアソン分布に従うものと仮定した。ただし、雑音成分は実際の検出データに比べ、かなり小さくした。シミュレーションに使用した検出光子数の雑音特性は、(1)雑音無し (SN 比 $= \infty$)、(2)雑音 (少) (SN 比 $= 45.2$ dB)、(3)雑音 (多) (SN 比 $= 38.3$ dB) の 3 種類である。

一般化ハミング窓関数のパラメータ α は、0.4, 0.5, 0.6, 0.8 の 4 種類を採用した。

シミュレーション結果を、写真 1 ~ 9 に示す。いずれも、写真(a)は再生画像、写真(b)は原画像との誤差である。

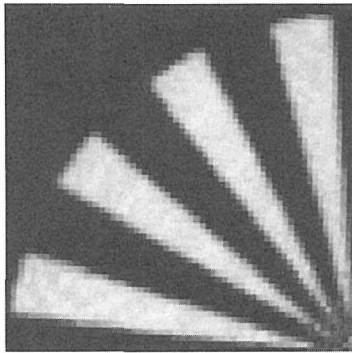


(a) 復元画像

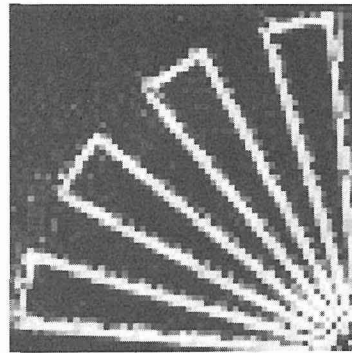


(b) 誤差画像

写真 1. 雑音無し $\alpha=0.4$

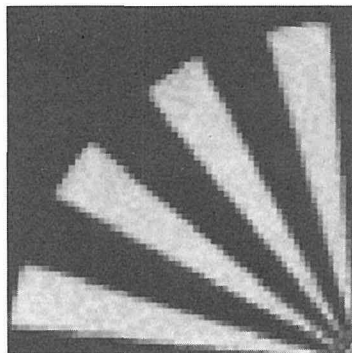


(a) 復元画像

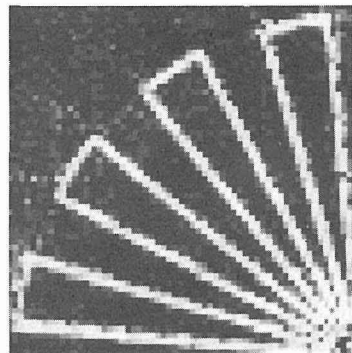


(b) 誤差画像

写真 2. 雑音無し $\alpha=0.5$

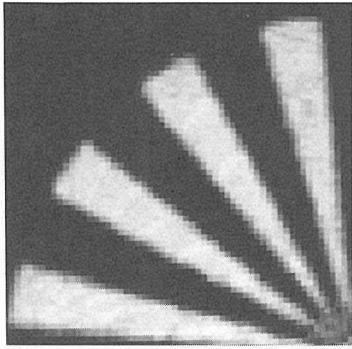


(a) 復元画像

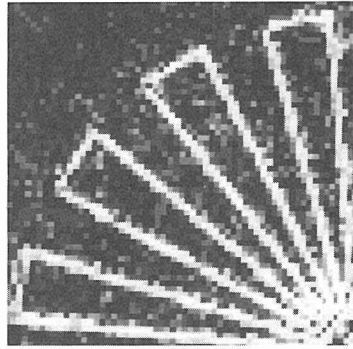


(b) 誤差画像

写真 3. 雑音無し $\alpha=0.8$

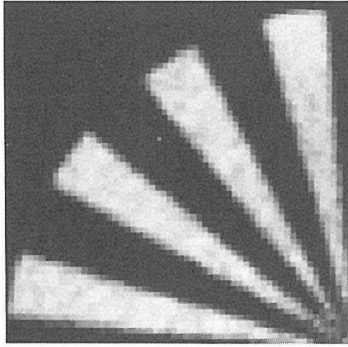


(a) 復元画像

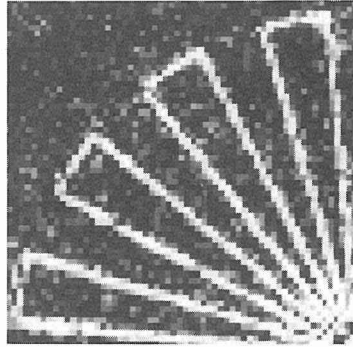


(b) 誤差画像

写真 4. 雑音 (少)

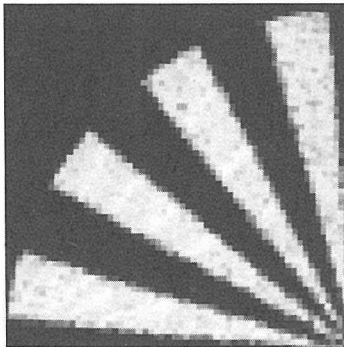
 $\alpha=0.4$ 

(a) 復元画像

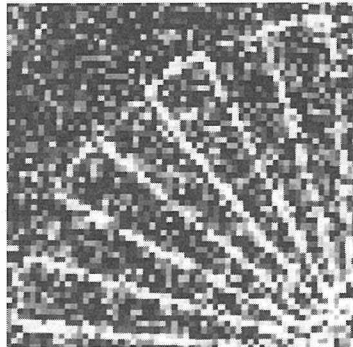


(b) 誤差画像

写真 5. 雑音 (少)

 $\alpha=0.5$ 

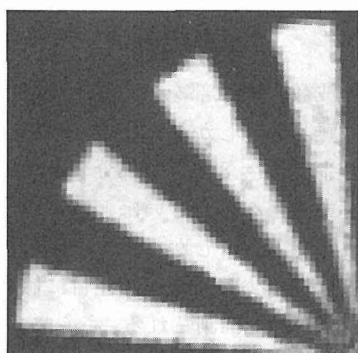
(a) 復元画像



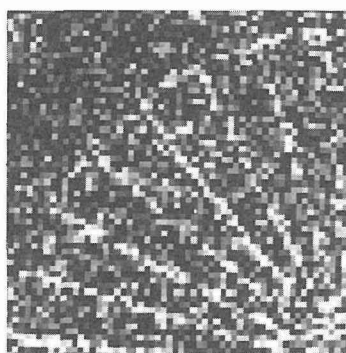
(b) 誤差画像

写真 6. 雑音 (少)

 $\alpha=0.8$

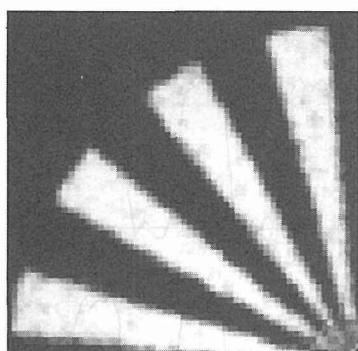


(a) 復元画像

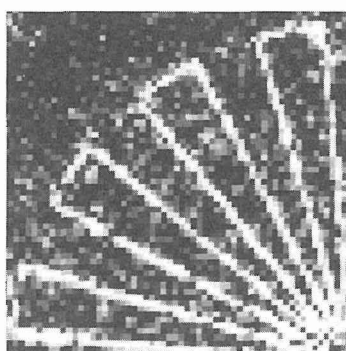


(b) 誤差画像

写真 7. 雑音 (多) $\alpha=0.4$

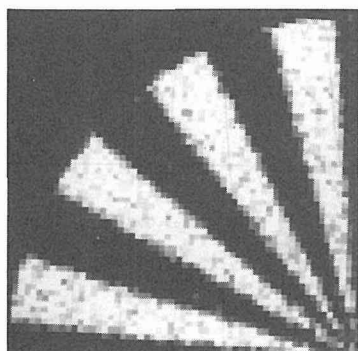


(a) 復元画像

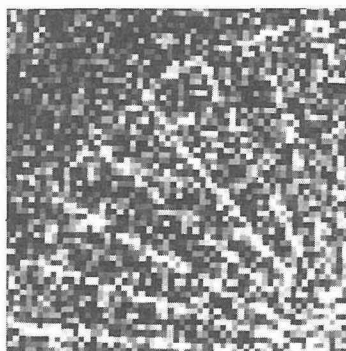


(b) 誤差画像

写真 8. 雑音 (多) $\alpha=0.5$



(a) 復元画像



(b) 誤差画像

写真 9. 雑音 (多) $\alpha=0.8$

5. 考 察

5. 1 無雑音の場合

写真1～3を比較すると、エッジの明瞭性では空間周波数の高域部を多く保存する $\alpha=0.8$ が最も優れている。誤差については、写真での互の比較は難しい。しかし、いずれの場合もエッジ部分に誤差が集中しているのは明らかである。そこで、半径 $R=8$ cmの部分の再生プロファイルを、図5に実線で示す。図中の点線は原吸収率画像である。 α の大きいほどエッジが急峻であるが、ギブスの現象とみられるリップルも多少大きいようである。しかし、 α の違いによるリップルの程度の差は、1次元信号でみられるのに比べると以外に少ないことは注目に値する。これは、式(4)の半周積分による一種の平滑作用が影響しているものと推測される。さらに、 $\alpha=0.4$ の複素窓の場合でも、特に奇妙な再生像とはならないところが意外である。

再生画像の評価を、通常のSN比のほかにも次式によっても行うことにする。

$$S=20\ln\left\{\frac{\sum_{x,y}|T_{xy}|}{\sum_{x,y}|T_{xy}-R_{xy}|\right\} [dB] \quad (9)$$

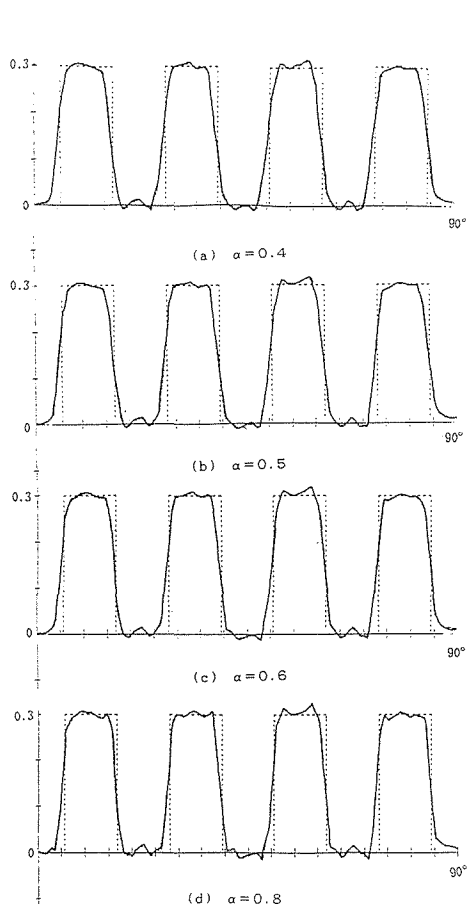


図5 角度方向プロファイル ($R=8$ cm)。雑音なし

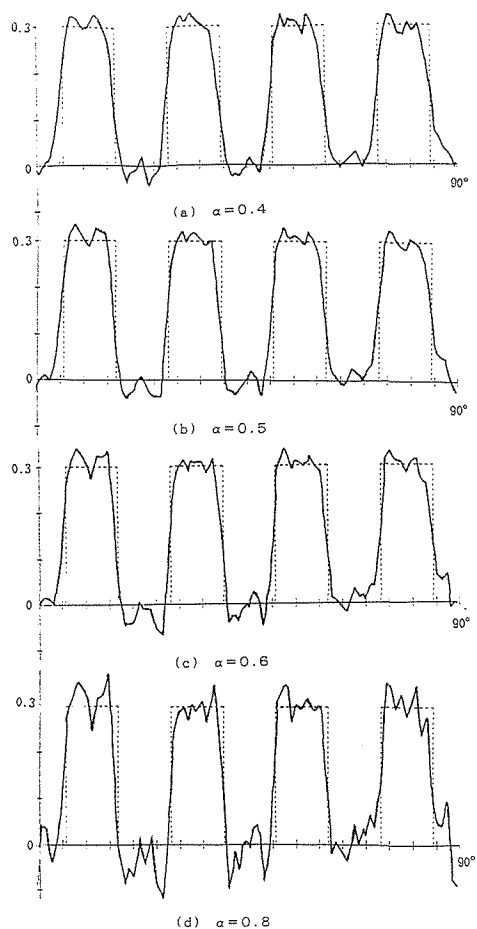


図6 角度方向プロファイル ($R=8$ cm)。雑音(多)

ここに、 T_{xy} , R_{xy} は各々同一 (x, y) 点における原画像と再生画像の値であり、また総和は画像全体で行う。 S も大きいほうが画質が良好であるが、SN 比と多少異なった値を取る。表 1 に α に対する SN 比と S の関係を示す。これより、 $\alpha=0.6\sim 0.8$ が良好な復元性を有するものとみられる。

5. 2 有雑音の場合

雑音(少)の場合の写真 4～6 を比較すると、再生像の明瞭度は $\alpha=0.8$ が優れている。しかし、この場合は検出信号に含まれる粒状雑音の除去性が悪いことも明らかである。表 2 に、各種 α に対する特性の比較を示す。この程度の入力雑音では、それによる SN 比と復元の忠実性(特にエッジ部分)を表す SN 比とが競合し、 α による SN 比の相違は少ない。しかし、 S には差がみられ、 $\alpha=0.8$ は悪く、 $\alpha=0.5$ が最もよい。特に、後者の場合は、入力信号の SN 比が 45.2 dB であり、表 1 の無雑音時 SN 比が 40.84 dB であることを考慮すると、入力信号の雑音除去性に優れていると結論できる。

表 1 SN 比と S (雑音なし)

α	0.4	0.5	0.6	0.8
SN 比 [dB]	40.20	40.84	41.29	41.51
S [dB]	15.60	16.03	16.31	16.25

雑音(多)の場合の写真 7～9 においても、 α の大きいとき再生像の明瞭性は優れているが、雑音性も強いことが分る。表 3 に各種 α に対する特性の比較を示す。この場合は、復元の忠実性よりも入力雑音の除去率のほうが問題となり、 $\alpha=0.8$ の場合の SN 比や S が著しく劣化している。このときも $\alpha=0.5$ の場合が良好で、入力信号の SN 比が 38.3 dB に対し再生画像のそれが 39.22 dB と改善されていることに注目する。この SN 比は再生画像の忠実性も加味されているのであるから、実際の雑音除去効果はかなり大きい。図 6 に図 5 と同じ位置でのプロファイルを示す。 $\alpha=0.8$ の場合にみられるエッジ部以外の激しい変動は、主として入力信号に含まれる雑音によるものである。 α が小さくなると、この雑音の除去される様子が分る。しかし、 $\alpha=0.4$ の場合には、エッジ部のぼけが目立つことも分る。

表 2 SN 比と S (雑音(少))

α	0.4	0.5	0.6	0.8
SN 比 [dB]	39.62	40.04	39.70	37.11
S [dB]	14.61	14.75	14.33	12.62

表 3 SN 比と S (雑音(多))

α	0.4	0.5	0.6	0.8
SN 比 [dB]	39.02	39.22	38.18	33.80
S [dB]	13.94	13.98	13.23	10.90

実際の CT 像における入力信号の SN 比は、上述の SN 比に比べ一層劣化しているのが普通である。このこととエッジ部のぼけの予防とを考慮すると、一般化ハミング窓関数のパラメータ α は 0.5 あるいは多少それ以上の値を取るのが好ましいと結論できる。

6. おわりに

CT 画像の前置フィルタとして一般化ハミング窓関数を使用する場合は、パラメータ α として 0.5 あるいは多少それ以上の値を採用するのが適当であると結論された。通常ハミング窓関数は $\alpha=0.54$ であることを考慮するなら、CT 画像の場合にも通常の電気信号の場合と同様、ハミング窓を採用するのが最もよいのかもしれない。

本論文においてシミュレーションの対称にしたモデルは、実際の人体断層部のパターンとは極めて異なっている。このため、人間の視覚特性を考慮すれば、あるいは上述と異なった結論となる可能性もあるのかもしれない。しかし、これまでに考察したエッジ部のぼけと SN 比に関する

結論は極めて常識的であり、恐らく妥当なものと思われる。

最後に、通常の電気信号のデジタル処理の観点からは、フィルタとして異常とみられる $\alpha < 0.5$ の場合にも、特に奇妙な結果を生じなかったことは興味ある。恐らく、式(4)の一種の平均化処理がこの結果を生んだものと思われるが、これは CT 処理の特徴の一つと考えられる。

7. 謝 辞

本研究に際し、藤野篤也氏(当時大学生、現日立 KK)および電子回路工学講座の諸氏の多大の協力に感謝します。

参 考 文 献

- 1) 例えば有本卓, 「信号・画像のデジタル処理」, 産業図書(昭和 55 年)
- 2) S. W. Rowland, "Computer Implementation of Image Reconstruction Formulas", (Springer, Berlin, 1979)