北海道大学工学部研究報告
第139号（昭和63年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University. No. 139 (1988)

乱流の Kolmogorov スペクトルについて
─乱流の統計力学理論の展開─

大友詔雄*) 清藤　正**) 田中幸雄***)
（昭和62年9月30日受理）

On the Kolmogorov's Spectrum for Turbulence
— A Review of the Statistical Mechanical Theory of Turbulence —

Norio OHTOMO*) Tadashi SEIDOU**) Yukio TANAKA***)
(Received September 30, 1987)

Abstract

Several contributions to the recent developement of a statistical mechanical theory of turbulence are briefly reviewed. The first group of these is represented by Wyld's theory, which adopts a perturbation method for solving the Navier-Stokes equation, analogous to the perturbation theory using Feynman's diagrams of quantum field theory. The Kolmogorov " -5/3 " spectrum is derived by Shut'ko on the basis of Wyld's theory. The next is Hopf's theory based on the functional formulation, in which the so-called Hopf equation is derived. The Hopf equation is formally identical with the Tomonaga-Schwinger equation of quantum field theory. The Kolmogorov " -5/3 " spectrum is derived by Edwards and McComb using the maximum-entropy (ME) principle.

1. はじめに

近年の乱流現象に関する実験的・理論的研究の成果には注目すべきものがある。[1] ソリトンを中心とした非線形波動論[2] やカオス理論[3,4] などの成果，及び，コンピュータ技術の進歩によって著しい進展が見られる乱流の数値解析(可視化)[5,6] の結果などはその代表例であり，乱流の発生機構やその構造についての多くの興味深い知見が得られいる。勿論，これらの研究は，Tayler の凍結乱流仮説[7] や Kolmogorov の局所等方乱流仮説 (Kolmogorov の－5/3 乗則)[8] などの理論的予測に基づき，その検証を目指して行われた夥しい数の実験的蓄積[9] を土台としていることは言うまでもない。この結果，Navier-Stokes(N-S)方程式が乱流のような不規則変動を本質とする流体運動を記述出来るのかどうか，というこれ迄の乱流の理論解析上の根源的問題についてはもはや疑

*) 北海道大学工学部原子工学科
**) 北海道大学生活協同組合
***) 桑園学園情報科学センター

問の余地は無くなったと見て良い。こうして，今日求められているのは，そうした実験事実を第一原理的に説明する乱流理論の構築である。即ち，乱流の理論研究の中心課題は，N-S 方程式の現象論的適用から離れその厳密解を求めること，更には，統計力学における Liouville 方程式に対応する乱流の基礎方程式化とその解の導出，などの乱流の統計力学理論の展開へと移って来ている。その際，Kolmogorov の $-5/3$ 乗則の導出が，その理論の有効性を判定する一つの基準として位置付いている。本報では，以上のことを踏まえ，乱流の統計力学理論として，Wyld 理論,[10] Hopf 理論[11] 及び Edwards-McComb 理論[12] の基本点を概括し，それらの理論の意味するところを押さえ，今後の発展方向を明らかにしたい。

2. 摂動理論の応用と Feynman 図形を用いる方法

2. 1 Wyld 理論[10]

Wyld 理論は，N-S 方程式の非線形項を摂動項と見なし，解を摂動理論の方法によって求めるものである。しかし，乱流問題では，一般に非線形項はその項を無視した N-S 方程式によって記述される“主流”に小さい摂動を生じさせるものではなく，通常の摂動展開は近似法として有用ではない。従って，Wyld は，場の量子論で発展させられた Feynman 図形[13] を使用してその摂動級数の構造を解析し，相互作用を十分に取り込む形で解を求めた。この Wyld 理論は，その見通しの良さという点では他に類を見ないだけでなく，定常乱流の持続に不可欠の外力の存在を定式化し， Kolmogorov の $-5/3$ 乗則を解析的に導く基礎を与えたという点でも画期的な内容を持っている。

さて，非圧縮流体 $(\partial v_i/\partial x_i=0)$ において，非発散性外力 $X_i(\boldsymbol{x},\ t)(\partial X_i/\partial x_i=0)$ の存在下で可能な定常的等方的乱流を記述する N-S 方程式

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}-\nu\nabla^2 v_i=X_i-v_j\frac{\partial}{\partial x_j}v_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} \qquad (1)$$

を出発方程式とする。これを空間一時間について Fourier 変換することによって次式を得る。

$$(-i\omega+\nu k^2)v_i(\boldsymbol{k},\ \omega)=X_i(\boldsymbol{k},\ \omega)-\frac{i}{2}\frac{P_{ijm}}{(VT)^{1/2}}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{k}\\ \omega_1+\omega_2=\omega}}v_j(\boldsymbol{k}_1,\ \omega_1)v_m(\boldsymbol{k}_2,\ \omega_2) \qquad (2)$$

ここで，$P_{ijm}(\boldsymbol{k})=k_mP_{ij}(\boldsymbol{k})+k_jP_{im}(\boldsymbol{k})$，$P_{ij}(\boldsymbol{k})=\delta_{ij}-(k_ik_j/\boldsymbol{k}^2)$ である。

4 次元ベクトル $k=(\boldsymbol{k},\ \omega)$ を導入し，Green 演算子 (伝播関数 propagator) $S(k)=(-i\omega+\nu\boldsymbol{k}^2)^{-1}$ を定義すると，無摂動速度 $v_0(k)=S(k)X(k)$ を得る。“結合定数” g を用いて (2) 式は次の形に書くことが出来る。

$$v(k)=v_0(k)+S(k)\frac{g}{(VT)^{1/2}}\sum_{k_1+k_2=k}v(k_1)v(k_2) \qquad (3)$$

摂動理論に基づく（3）の解を g の巾級数として求めれば，g^n の項を $v_n(k)$ として，

$$v(k)=v_0(k)+v_1(k)+v_2(k)+\cdots\cdots \qquad (4)$$

となり，$v_n(k)$ は $v_0(k)$ の積で表現される。

次に（4）式の摂動級数を用いて速度相関関数を計算する。$X(k)$ と $v_0(k)$ に Gauss 分布を仮定する。すると，相関関数に現われる v_0 の奇数次モーメントは 0 となり，一方，偶数次モーメントは 2 次モーメントのみで表現可能となる。こうして，2 次速度相関関数 $U(k)=\overline{v(k)v^*(k)}$ は，無摂動速度相関関数 $U_0(k)=\overline{v_0(k_1)v_0(k_2)}$ で表現される摂動級数となる。

$$U(k)=U_0(k)+\{\overline{v_0(k)v_2^*(k)}+\overline{v_1(k)v_1^*(k)}+\overline{v_2(k)v_0^*(k)}\}+\cdots\cdots \qquad (5)$$

ここで，Feynman 図形の考え方を用い，

直線 —— $\longleftrightarrow S(k)$，頂点 • $\longleftrightarrow g/(VT)^{1/2}$，波線 〰 $\longleftrightarrow U_0(k)$

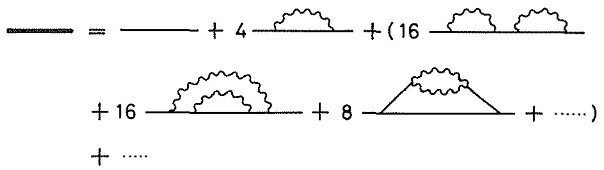
の対応をとれば，（5）式の右辺を構成する図形表示が得られ，

$U(k)=$ 

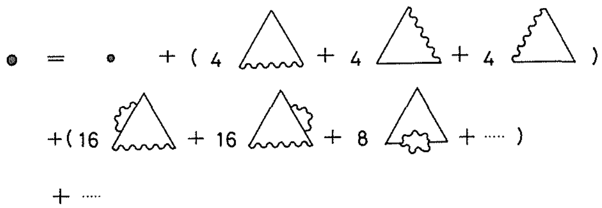
（6）

となる。

$U(k)$ は，この（6）式によって原理的に計算出来るが，この表現では g の巾級数展開となっていて，乱流問題では一般にこの g は大きな値をとり，（6）式は末項に行くに従い発散し，又，有限項で打ち切る近似では有効な結果をもたらさない。それ故，場の量子論のくり込み法と全く類以の方法で摂動展開の各項を再分類し，乱流問題に適切な形式にする。このために，新たに伝播関数と頂点関数の一般化を行い，その一般化表現 $S'(k)$ と $\Gamma(k,\ k')$ とを定義する。これらの図形表示はそれぞれに太い実線と大きな黒丸とを対応させ，次のように表現される。

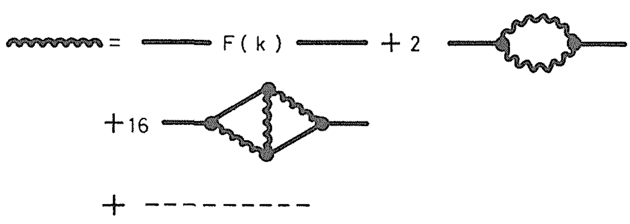
$S'(k)\longleftrightarrow$ 

（7）

$\Gamma(k,\ k')\longleftrightarrow$ 

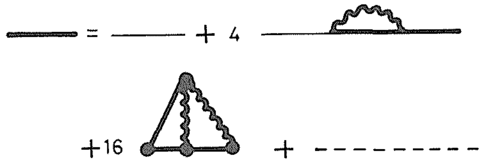
（8）

これらの図形表示の一つ又は幾つかの要素（実線，頂点，波線）をそれに対応する一般化した量の図形表示で置換すれば，それに応じてより高次の図形表示を得る。こうして求めた図は幾つかのそれ以上分割出来ない図形（既約図形）にまとめることが出来る。（6）～（8）式をこの既約図形で表現すると以下のものとなる。

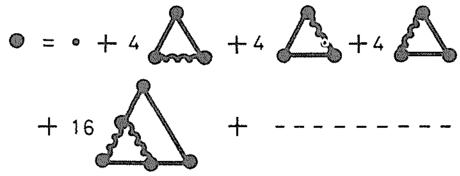
$U(k)\longleftrightarrow$ 

（9）

ここで，$F(k)$ は外力の 2 次相関関数 $(=\overline{|X(k)|^2})$ である。外力の寄与がこういう形で定式化されている点は重要である。

$S'(k)\longleftrightarrow$ 

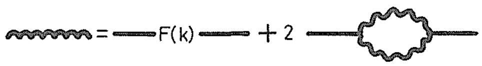
（10）

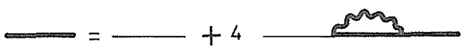
$\Gamma(k,\ k') \longleftrightarrow$  (11)

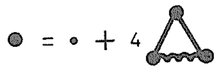
(9)～(11)式は，3個の未知関数 $U(k)$，$S'(k)$，$\Gamma(k,\ k')$ に対する閉じた方程式系を形成している。これらの方程式の有限個の図形でもって近似される方程式が，Chandrasekhar 方程式や Kraichnan 方程式などを導出することは Wyld が証明している。[10]

2. 2　Shut'ko による Kolmogorov の－5/3 乗則の導出

Shut'ko[14] は，前節の Wyld 理論において次の図形から成る方程式系を考えた。

 (12)

 (13)

 (14)

ここで，(12)～(14)式について，各々、次の解析的表現を得る。

$$U(k)=|S'(k)|^2\Big[F(k)+\frac{k^2}{(2\pi)^4}\int d^4k'a(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}')U(k')U(k-k')|\Gamma(k,\ k')|^2\Big] \tag{15}$$

$$S'(k)=S(k)-S(k)\Big[\frac{k^2}{(2\pi)^4}\int d^4k'b(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}')\Gamma(k,\ k')S'(k-k')U(k')\Gamma(k-k',\ -k')\Big]\times S'(k) \tag{16}$$

$$\Gamma(k,\ k')=1-\frac{k^2}{(2\pi)^4}\int d^4k'c(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}')\Gamma(k,\ k-k')S'(k-k')\Gamma(k-k',\ k'')S'(k-k''-k')\times\Gamma(k-k''-k',\ k-k'')U(k') \tag{17}$$

a，b，c は幾何学的因子。(15)～(17)式を具体的に解くことによって，Shut'ko は Kolmogorov の－5/3 乗則を導出することに成功した。

3.　特性汎関数による定式化

3. 1　Hopf 理論[11]

乱流問題とは，乱れを伴う速度場の分布関数を求めることであると言うことが出来る。又，本報で我々が問題にしている乱流はランダムな外力場が存在するものである。従って，分布関数は，空間一時間$(\boldsymbol{x},\ t)$の関数であって，しかも統計的に相互に関係をもつ2つのランダム場としての速度場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\ t)$ と外力場 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},\ t)$ とを確率変数とする結合特性汎関数 $\Phi[\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x},\ t),\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\ t)]$ であり，これは次式で定義される。[15]

$$\Phi[\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x},\ t),\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\ t)]=\overline{\exp\{i(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{v})+i(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{X})\}} \tag{18}$$

ここで，$(\cdot)$ は汎関数空間におけるスカラー積を示す。速度場はこの特性汎用関数によって一意的に決定される。外力場をこういう形で定式化する点が Hopf 理論の重要な点である。外力によってなされた仕事による任意の位置$(\boldsymbol{x},\ t)$での流体の単位質量当たりのエネルギー流入の平均量は $\overline{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\ t)\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},\ t)}=-\mathfrak{D}_\alpha(\boldsymbol{x},\ t)\mathfrak{D}_{f\alpha}(\boldsymbol{x},\ t)\Phi|_{\theta=f=0}$ から計算出来る。ここで，$\mathfrak{D}_\alpha$ は汎関数微分を表わすベクトル演算子 $\mathfrak{D}=(\mathfrak{D}_1,\mathfrak{D}_2,\mathfrak{D}_3)$ の要素であり，例えば，$\mathfrak{D}_\alpha\Phi[\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})]=\delta\Phi[\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})]/\delta z_\alpha(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$

である。

さて，乱流問題を，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\ t)$ が $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},\ t)$ を含む N-S 方程式(1)を満たすことを認め，初期速度場の確率的性質がどのように時間発展するか，即ち，(18)式の特性汎関数の支配方程式は何か，又，その解はいかなるものか，ということを問うことだと考える。そこで，(18)式を時間 t について微分して得られる次の式

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\overline{\mathrm{i}\left(\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\right)\exp\{\mathrm{i}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{v})+\mathrm{i}\int_{t_0}^{\infty}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{X})\mathrm{d}t\}} \tag{19}$$

に（1）式の N-S 方程式を代入し，いくつかの変換を行って次式を得る。

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\left(\boldsymbol{\theta}\cdot\left\{i\frac{\partial\mathfrak{D}\mathfrak{D}_{\alpha}\Phi}{\partial x_{\alpha}}-i\nabla\Delta^{-1}\frac{\partial^2\mathfrak{D}_{\alpha}\mathfrak{D}_{\beta}\Phi}{\partial x_{\alpha}\partial x_{\beta}}+\nu\Delta\mathfrak{D}\Phi+\mathfrak{D}_f\Phi\right.\right.$$
$$\left.\left.-\nabla\Delta^{-1}\frac{\partial\mathfrak{D}_{f\alpha}\Phi}{\partial x_{\alpha}}\right\}\right) \tag{20}$$

ここで，Δ^{-1} は Laplace 演算子 Δ の逆演算子である。

この汎関数微分方程式(20)が，外力の存在する乱流場に対する Hopf 方程式[11,12]である。この方程式を初期値を与えて解くことによって，$\Phi[\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{f}]$ を求めることは原理的には出来る。とりわけ，Hopf 方程式と場の量子論における Tomonaga-Schwinger 方程式との間の類似性を通して形式解を求めることが出来る[16]という事実は注目に値する。しかし，この Hopf 方程式を一般的に解くことは極めて困難であり，唯一，非粘性（$\nu=0$）の極限においてのみ特解がえられているに過ぎない。[17]

一方，汎関数微分方程式を具体的に近似して解く試みも数多く行われている。[15]その代表例は，Hopf 自ら用いた汎関数の巾級数展開法である。しかし，こうした方法では，汎関数をどのような巾級数に展開すべきかという問題に加え，級数の有限部分だけでは本来の特性汎関数の性質を充足出来ず，結局は級数の全ての項を指定しなければならないという問題も生ずる。又，十分に発達した乱流の速度場に対する特性汎関数解析としては妥当な方法ではない。こうして，Hopf 方程式を基礎方程式とする乱流理論の展開は，格別の魅力を集めつつもその有効性を実証するには更に多くの数学的進歩が必要とされている。

3.2　Edwards-McComb による Kolmogorov の−5/3 乗則の導出

Edwards-McComb 理論[12]は，既に Edwards によって展開された理論[18]と基本的に同一のものであるが，Kolmogorov の−5/3 乗則を導くことに成功したことに加え，その導出において本質をなす乱流の定常性を規定する基準として最大エントロピー(ME)原理[19]を導入した点にとりわけ注目すべき特長がある。以下，彼らの理論の枠組みを記述しその意義を述べる。

彼らの理論の出発点は，乱流速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k},\ t)(=\int\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\ t)\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x})$ が時刻 t で $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k})$ の値をとる確率密度関数 $P(\cdots,\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}),\ \cdots,\ t)$，即ち，

$$P(\cdots,\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}),\ \cdots,\ t)=\prod_{\boldsymbol{k}}\ \delta[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k})-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k},\ t)] \tag{21}$$

にある。従って，Hopf 理論の場合のように速度場と外力場との結合特性汎関数から出発していないため，外力の寄与を定式化しなければならない。そこで，外力のランダム変動に Gauss 分布を仮定した次の確率密度関数を定義した。

$$\mathfrak{P}(\boldsymbol{X})=\mathfrak{N}\ \exp[-\sum_{\boldsymbol{k}}\int_0^T\int_0^T\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k},\ t)g^{-1}(\boldsymbol{k},\ t-t')\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k},\ t')\mathrm{d}t\mathrm{d}t'] \tag{22}$$

ここで，$\mathfrak{N}$ は適当な規格化因子であり，g^{-1} は外力の相関関数 $g(\boldsymbol{k},\ t-t')=2g(\boldsymbol{k})\delta(t-t')\delta_{\alpha\beta}$

$=<X_\alpha(\boldsymbol{k},\ t)X_\beta(-\boldsymbol{k},\ t')>$（$<\cdots>$は統計平均を表わす）に対して$\int_{-\infty}^{\infty}g(\boldsymbol{k},\ t-\tau)g^{-1}(\boldsymbol{k},\ \tau-t')$ $\mathrm{d}\tau=\delta(t-t')$ によって定義される。

さて，彼らの理論は，(21)式の P を支配する方程式とその方程式に基づいて得られるエネルギーの釣り合いの方程式とを解くものである。そこで，先ず，(21)式を時間について微分し，N-S 方程式（(1)式の空間 Fourier 変換を行ったもの）を代入し，外力場のゆらぎ（22）式について平均をとって次式を得る。

$$\frac{\partial<P>}{\partial t}+\sum_{\boldsymbol{k},\alpha}\frac{\partial}{\partial u_\alpha(\boldsymbol{k})}\Bigl(\nu\boldsymbol{k}^2u_\alpha(\boldsymbol{k})-\sum_{j,\,l;\,\beta,\gamma}M_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{k},\ j,\ \boldsymbol{l})u_\beta(\boldsymbol{j})u_\gamma(\boldsymbol{l})$$
$$+\sum_\beta P_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})g(\boldsymbol{k})\frac{\partial}{\partial u_\beta(-\boldsymbol{k})}\Bigr)<P>=0 \tag{23}$$

ここで，$<P>=\int P\mathfrak{P}(X)\delta X,\ M_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{l})=(\mathrm{i}L^3)^{-1}P_{imj}(\boldsymbol{k})\delta(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{l})$ であり，$\delta(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{l})$ は $\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{l}\neq0$ のとき 0，$\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{l}=0$ のとき 1 となる関数である。この(23)式が，Edwards-McComb 理論の基礎方程式であり，先の Hopf 方程式に対応する，所謂，乱流問題における Liouville 方程式である。

次に，(23)式にエネルギー $\sum_k u(\boldsymbol{k})u(-\boldsymbol{k})$ を掛け，$P_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})q(\boldsymbol{k})=\int u_\alpha(\boldsymbol{k})u_\beta(\boldsymbol{k})<P>\prod_j \mathrm{d}u_j$ とすれば，エネルギーの釣り合いの方程式として

$$\frac{1}{2}\frac{\partial q(\boldsymbol{k})}{\partial t}+\nu k^2q(\boldsymbol{k})+\int\sum_{j,\,l}M_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{l})u_\beta(\boldsymbol{j})u_\gamma(\boldsymbol{l})u_\alpha(\boldsymbol{k})<P>\prod_i \mathrm{d}u_i=g(\boldsymbol{k}) \tag{24}$$

を得る。この式は，個々の $\boldsymbol{k}$ モードに対して，［エネルギー変化量］＋［粘性によるエネルギー損失量］＋［他のモード間のエネルギー遷移］＝［外部からのエネルギー入力］という物理過程が成り立っていることを示している。更に，(24)式を $\boldsymbol{k}$ について積分すると，(24)式の左辺第 3 項は 0 になるから，全エネルギーを $E=1/2\int q(\boldsymbol{k})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$ として，

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\int\nu k^2q(\boldsymbol{k})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}=\int g(\boldsymbol{k})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \tag{25}$$

となる。この式は，$\boldsymbol{k}$ モードに対して，［全エネルギー変化量］＋［粘性によるエネルギーの全損失量］＝［外部からのエネルギーの全入力］を意味している。$g(\boldsymbol{k})$ はランダムな外力によってもたらされるエネルギー入力量であった。従って，(24)，(25)式で記述されている物理的内容は，外力によって注入されたエネルギーが，(24)式の左辺第 3 項（M•u•u•u 項）を経由して乱流のカスケードを生み，大きな $\boldsymbol{k}$ 領域で粘性によって消散している，というものである。これは Kolmogorov が$-5/3$ 乗則を見い出した際に考えた描像に他ならない。

さて，この(24)，(25)式から，定常状態を仮定して（$\partial/\partial\mathrm{t}=0$），エネルギー・スペクトル $\varepsilon(\boldsymbol{k})\mathrm{d}\boldsymbol{k}(=q(\boldsymbol{k})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k})$ を求めるのであるが，乱流の定常性を保証するには更に条件が必要となる。このため，Edwards-McComb は ME 原理*) を導入した。そして，最終的に，彼らは $\varepsilon(|\boldsymbol{k}|)\propto|\boldsymbol{k}|^{-5/3}$ の Kolmogorov スペクトルを導くことに成功した。こうして，Edwards-McComb 理論は，Wyld 理論と同様にその有効性が注目される。しかし，先述したように，外力場の扱いを含め，特性汎関数から出発する厳密な Hopf 理論とは決定的な違いがある。Edwards-McComb 理論を特性汎関数によって定式化することは，容易なことではないが，乱流理論の発展においては確かに意義深いことであろう。

4. おわりに

本報では, Feynman 図形を用いる摂動理論としての Wyld 理論, 特性汎関数解析としての Hopf 理論, そして, ME 原理を導入した Edwards-McComb 理論を概括した。これらの理論は, 統計力学的乱流理論の先駆をなすものであると同時に, 乱流現象に関する理論的課題を提起したという点で, 今後とも基本理論として押さえられるべきものである。しかし, 導かれた基礎方程式を厳密に扱うには, 概念や数学的デバイスの一層の進歩が必要である。[21]

最後に, 70 年代後半以降の新たな進展として, Wilson のくりこみ群の適用[22,23]が始まっていることを付言しておきたい。これは, 定量的に計算するには極めて強力な方法であり, 今後, 一層広範囲に応用されて行くことになると思われる。

引用文献

1) 巽 友正：乱流現象の科学（1986), 東京大学出版会.
2) 矢嶋信男：文献 1）の第 3 章.
3) 蔵本由紀：文献 1）の第 4 章：森 肇・岡本寿夫：文献 1）の第 5 章.
4) 富田和久：日本物理学会誌, **40**（1985), 2, p. 99.
5) 高見穎郎：文献 1）の第 8 章.
6) 巽 友正他：ナビエ・ストークス方程式（数理科学 5/1985), サイエンス社.
7) Taylor, G. I.: Proc. Roy. Soc. London. **A. 151,** (1935), p. 421.
8) Kolmogorov, A. N.: Dokl. Akad. Nauk SSSR, **30** (1941), p. 301.
9) 山田豊一・中野 徹訳, Monin, A. S. and Yaglom. A. M.: 統計流体力学（1979), 第 8 章.
10) Wyld, H. W. Jr.: Ann. Phys., **14** (1961), p. 143.
11) Hopf, E.: J. Ratl. Mech. Anal., **1** (1952), p. 87.
12) Edwards. S. F. and McComb. W. D.: J. phys. **A. 2** (1969), 2. p. 157.
13) 井上健男訳, Landau. L. D. and Lifshitz, E.: 相対論的量子力学（1973), 第 8, 11～13 章.
14) Shut'ko. A. V.: Soviet Phys. Doklady, **9** (1965), 10, p. 857.
15) 文献 9）の第 10 章.
16) 今村 勤：確率場の数学（1976), 岩波書店.
17) Hopf, E. and Titt, E. W.: J. Ratl. Mech. Anal., **2** (1953), 3, p. 587.
18) Edwards, S. F.: J. Fluid Mech., **18** (1964), 2. p. 239.
19) 井原俊輔：確率過程とエントロピー（1984), 岩波書店.
20) Jaynes, E. T.: Phys. Rev., **106** (1957), 4, p. 620: **108** (1957), 2, p. 171.
21) 今井 功：応用超関数論 I, II（1981), サイエンス社.
22) Forster, D., Nelson, D. R. and Stephen, M. J.: Phys. Rev., **A. 16** (1977), p. 732.
23) McComb, W. D.: Theoretical Approaches to Turbulence, edited by Dwoyer, D. L., Hussaini, M. Y. and Voigt, R. G. (1985), Chapter VIII, Springer-Verlag.

---

*) ME 原理は, Jaynes[20] によって証明されたように, それだけでもって平衡状態の微視的状態の確率分布としてカノニカル分布を導くものである。(一般的には, 先験的等確率の原理が仮定されるが, ME 原理を用いる場合はいかなる仮定も必要としない。[19]) こうして, 今日, ME 原理の普遍的有効性が注目されている。筆者らも, 乱流スペクトルの実験的導出にあたって, ME 原理に基づくスペクトル推定法 (ME 法) を用いた。その結果, MHD プラズマの乱流スペクトルの基本モードとして Kolmogorov の−5/3 乗則を見い出した。(T. Seidou, Y. Aoki and N. Ohtomo: J. Appl. Phys., **24** (1985), 9. p. 1204: **25** (1986), 2. p. 248.)