HOKKAIDO UNIVERSITY

| | |
|---|---|
| Title | 等リップルIIRディジタルフィルタに関する一考察 |
| Author(s) | 勝海, 繁範; 小川, 吉彦 |
| Citation | 北海道大學工學部研究報告, 141, 175-181 |
| Issue Date | 1988-07-29 |
| Doc URL | https://hdl.handle.net/2115/42117 |
| Type | departmental bulletin paper |
| File Information | 141_175-182.pdf |

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第141号（昭和63年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University. No. 141 (1988)

# 等リップルIIRディジタルフィルタに関する一考察

勝海繁範　小川吉彦

（昭和63年3月31日受理）

# Consideration on IIR digital filter with equal ripple characteristics

Shigenori KATSUMI and Yoshihiko OGAWA

(Received March 31, 1988)

**Abstract**

It is known that a filter with equal-ripple characteristics both on the passband and on the stopband has the greatest stopband attenuation. This report considers an equal-ripple IIR digital filter under the condition of a fixed sum of a denominator and numerator degree in the transfer function. Under this condition the number of multipliers in the digital filter system is constant. In this report a new filter design method is proposed. In this method denominator and numerator of the transfer function can be independently determined.

## 1. はじめに

通過域，阻止域双方で，理想振幅特性との最大誤差を最小とするという意味で最適な特性を与えるフィルタとして，等リップルフィルタがあり，このとき，過渡帯域を固定した際の阻止域減衰量が最大となることが知られている[1]。一方，IIRディジタルフィルタでは，伝達関数の分母と分子の次数の和が，ハードウエアで実現した際の乗算器の個数に，ほぼ一致する。よって，ハードウエアの規模を乗算器の個数，フィルタの性能を阻止域減衰量で評価するなら，伝達関数の分母と分子の次数の和が一定という条件のもとで，阻止域減衰量を最大とする等リップルフィルタが，最適であるといえる。そこで本報告では，伝達関数の分母の次数と分子の次数を変化させた場合の等リップル特性の違いを設計例を用いて示し，最適な分母，分子の次数に関し，考察を加える。設計の際，従来の設計手法では，伝達関数の分母と分子の次数を独立に決定できないので，新手法を提案する。

## 2. 設計法

等リップル振幅特性を持つIIRディジタルフィルタは，従来，アナログ楕円フィルタを双一次変換などの $s-z$ 変換によって設計されてきた[2]。しかし，この手法では，アナログフィルタの伝

電子工学科　電子回路工学講座

達関数は正実関数であるという条件などのために，ディジタルフィルタの伝達関数の分母分子の次数を独立に決定できない。そこで，本報告では伝達関数を有理多項式に変換し近似することによって，分母分子の次数を独立に決定できる手法を提案する。

## 2.1 準　　備

IIR ディジタルフィルタの伝達関数を次式で与える。

$$H(Z)=\frac{\sum_{n=0}^{N} b_n z^{-n}}{1+\sum_{n=1}^{M} a_n z^{-n}}=\frac{\sum_{n=0}^{N} b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^{M} a_n z^{-n}} \tag{1}$$

$a_0=1$

$z = exp(j\omega T)$

$\omega$：角周波数

$T$：サンプリング周期

$\Omega=\omega T$：規格化角周波数

このときの振幅 2 乗特性は，

$$|H(j\Omega)|^2=\frac{\sum_{n=0}^{N} d_n \cos(n\Omega)}{\sum_{n=0}^{M} c_n \cos(n\Omega)} \tag{2}$$

で表される。

## 2.2 変　　換

(2)式の有理余弦級数のまま近似問題を解くのは難しいので，次式によって変換を行う。

$$R=p+jq=(z+z^{-1})/2 \tag{3}$$

これによって，(2)式は次の有理多項式に変換される。

$$P(p)=\frac{\sum_{n=0}^{N} l_n p^n}{\sum_{n=0}^{M} k_n p^n} \tag{4}$$

$$p=\cos(\Omega) \tag{5}$$

この変換式によって，$z$ 平面上の単位円は，$R$ 平面実軸上の閉区間$[-1, 1]$（以下周波数軸と称する）に写像される。また，$z$ 平面上の周を除く単位円内は，$R$ 平面上の周波数軸を除く全平面に写像されるので，逆変換する際，単位円内の極のみを取れば，得られた伝達関数を必ず安定にできる。

## 2.3 等リップル近似法

次に，(4)式を等リップル近似することを考える。そのために，次のように目的関数，近似関数および誤差関数を定める。

$$D(p)=\begin{cases} 1 & p_p \leqq p \leqq 1 \\ 0 & -1 \leqq p \leqq p_s \end{cases} \tag{6}$$

$$P(p)=A\frac{p^{N}+\sum_{n=0}^{N-1}l_{n}p^{n}}{p^{M}+\sum_{n=0}^{M-1}k_{n}p^{n}} \tag{7}$$

$$\delta(p)=P(p)-D(p) \tag{8}$$

ただし，

$p_p=cos\Omega_p$　　$\Omega_p$：通過域端規格化角周波数 (9)

$p_s=cos\Omega_s$　　$\Omega_s$：阻止域端規格化角周波数 (10)

等リップル近似となるには，誤差関係が，

$|\delta(p)|\leqq\delta_1$　　$\delta_1$：通過域リップル

$0\leqq\delta(p)\leqq\delta_2$　　$\delta_2$：阻止域リップル

となることである。そのために，次のような仮定を行う。

① 誤差関数は，通過域において $M-1$ 個の極値を取り，その極値の絶対値は $\delta_1$ で，隣合う極値の符号は異なる。

② 誤差関数は，通過域端で値 $-\delta_1$ をとる。

③ 誤差関数は，零周波数で，$M$：偶数のとき値 $-\delta_1$，$M$：奇数のとき $+\delta_1$ をとる。

④ 誤差関数は，阻止域において $N$ 個あるいは $N-1$ 個の極値を取り，その値は 0 か $\delta_2$ で，隣合う極値の値は異なる。

⑤ 誤差関数は，阻止域端で値 $\delta_2$ をとる。

⑥ 誤差関数は，標本化周波数の 2 分の 1 で，$N$：奇数のとき値 0，$N$：偶数のとき値 $\delta_2$ を取る。ただし，阻止域に $N$ 個の極値が存在するときは，$0\leqq\delta(-1)\leqq\delta_2$ の有限値を取る。

以上の仮定のもとに，分母の次数 $M$，分子の次数 $N$，通過域端周波数 $p_p$，阻止域端周波数 $p_s$，通過域リップル $\delta_1$ が与えられたときの設計法を次のように定式化する。まず，仮定によって与えられる $M+N+2$ 個の点を，

$\{p_i\}$　　$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M+N+2$

とし，次のようなパラメータベクトルを定義する。

$$\mathbf{x}=[A,\ k_0,\ k_1,\ \cdots\cdots,\ k_{M-1},\ l_0,\ l_1,\ \cdots\cdots,\ l_{N-1},\ W]^t \tag{11}$$

ただし，

$W=\delta_2/\delta_1$

さらに，便宜上，次式で定義される関数 Q を導入する。

$$Q(p)=Q(\mathbf{x};p)=P(p)-\delta(p) \tag{12}$$

これらの式より，各 $p_i$ について，

$$Q(p_i)=Q(\mathbf{x}^*;p_i)=D(p_i) \tag{13}$$

とする $\mathbf{x}^*$ を求めることができれば設計は終了する。(13)式は，非線形方程式なので，ニュートン法を用いて解く。そこで，次のような行列 $\mathbf{J}$ およびベクトル $\mathbf{D}$，$\mathbf{Q}$ を定める。

$$\mathbf{J}=(J_{ij})\qquad J_{ij}=\left.\frac{\partial Q}{\partial x_j}\right|_{p=p_i} \tag{14}$$

$$\mathbf{D}=[D(p_1),\ D(p_2),\ \cdots\cdots,\ D(p_{M+N+2})]^t \tag{15}$$

$$\mathbf{Q}=[Q(p_1),\ Q(p_2),\ \cdots\cdots,\ Q(p_{M+N+2})]^t \tag{16}$$

これらを用いて，$\mathbf{x}^*$ は次式によって反復的に求めることができる。

$$\mathbf{X}_{n+1}=\mathbf{x}_n+\mathbf{J}_n^{-1}\{\mathbf{D}-\mathbf{Q}(\mathbf{x}_n)\} \qquad n：反復回数 \tag{17}$$

また，$\{p_i\}$は，xによって変化するので反復計算の適当な段階で修正する必要がある。図1にフローチャートを示す。

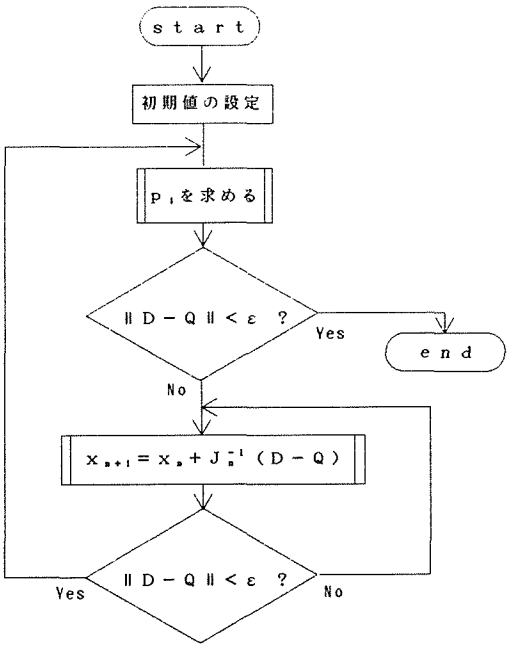



図1 フローチャート

## 2.4 初 期 値

反復法によって解を求めているため，時には収束しないことがある。よって，解に近い値を初期値として選ぶ必要があるが，パデ展開など従来の有理多項式近似法では，周波数軸上で極をもつことがある。そこで，本報告では，次のような近似法を提案する。

前節の仮定により，通過域で$P$はM回，値1を取り，阻止域で$[N/2]$個の2重零点を取る。このことを利用し，$P$の分母多項式$f$および分子多項式$g$は，次のように近似できる。

$$g(p)=\begin{cases}\prod_{l=1}^{N/2}(p-p_l)^2 & N：偶数\\ (p+1)\prod_{l=1}^{(N-1)/2}(p-p_l)^2 & N：奇数\end{cases} \tag{18}$$

$$f(p)=Ag(p)-f(p)\{P(p)-1\}=Ag(p)-\alpha\prod_{k=1}^{M}(p-p_k) \tag{19}$$

$\{p_k\}$は通過域内，$\{p_l\}$は阻止域内の点

ただし，$M<N$のときは，$f$の次数を$M$にするため，(19)式を区間$[p_p, 1]$で最小2乗近似する多項式を$f$とする。また，(19)式中の$\alpha$は，$f$の最高次の係数が1であることより定まる。この方法により得られた$P$は，$A$が次式を満たすなら，周波数軸上で極を取らないことが，確かめられた。

$0<A<1$ $M$：偶数

$A<0$ $M$：奇数

## 3. 設計例と考察

表1に設計例において固定したパラメータ，表2に分母分子の次数を変えたときの阻止域減衰量を示す。図2は横軸に分子の次数 $N$，縦軸に減衰量をとったグラフである。

図2より，分母分子の次数の和が一定という条件のもとでは，分子の次数 $N$ が偶数(この例では2あるいは4)のとき，最も大きな減衰量を与えることがわかる。図3に $M+N=13$の場合の振幅2乗特性を示すが，これより，最大の減衰量を与えているとき，阻止域に $N$ 個の極値を取っていることがわかる。分母 $M$ 次，分子 $N$ 次のとき，極値の個数の最大値は $M+N-1$ 個($\Omega=0$ と $\Omega=\pi$ を入れると $M+N+1$ 個)であるから，このとき最大個の極値を持っていることになる。これは，他の次数でも同様で，より多くの極値を取るとき，大きな減衰量を与えると結論できる。これと同様な現象は，*FIR* フィルタにおいては過剰リップルフィルタ[2]として知られている。

一方，分母と分子の次数差に着目してみると，次数の和が小さいときは $N=2$ のときが最大の減衰量を与えているが，次数の和が大きくなるにつれ $N=4$ のときの減衰量が大きく増加し，次数和が12のとき，ほぼ同じになっていることがわかる。これは，振幅特性に対する零点の寄与が，極の半分程度であるためだと考えられる。

これらより，分母分子の次数和が一定の場合の最適の次数配分は，分子の次数は分母の次数の2分の1を越えない最大の偶数であると推測できる。

表1 設計例の固定パラメータ

| | | |
|---|---|---|
| 通過域端規格化角周波数 | $\Omega_p$ | $0.2\pi$ [rad] |
| 阻止域端規格化角周波数 | $\Omega_s$ | $0.24\pi$ [rad] |
| 通過域リップル | $\delta_1$ | 0.0005 (0.00217 [dB]) |

表2 設計例の減衰量

単位 [dB]

| M | M+N=9 | M+N=10 | M+N=11 | M+N=12 | M+N=13 | M+N=14 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 14.189 | 15.977 | | | | |
| 6 | 15.417 | 23.449 | 24.641 | 27.461 | | |
| 7 | 21.529 | 22.045 | 32.017 | 32.900 | 36.673 | 39.137 |
| 8 | 7.430 | 28.056 | 28.388 | 40.008 | 41.211 | 46.407 |
| 9 | | | 34.440 | 34.919 | 47.713 | 48.753 |
| 10 | | | | 40.798 | | 55.519 |

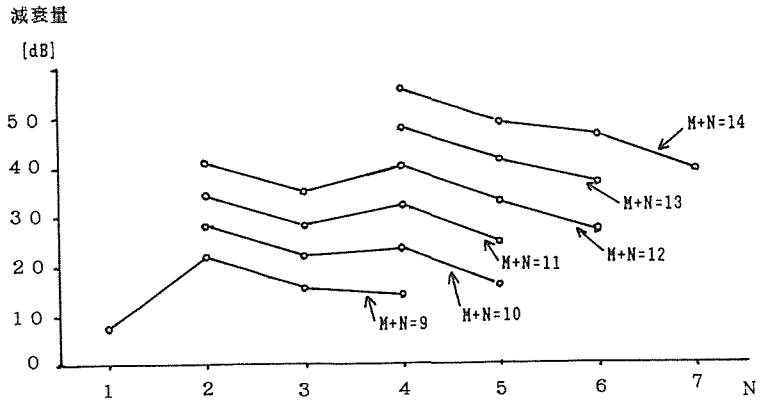
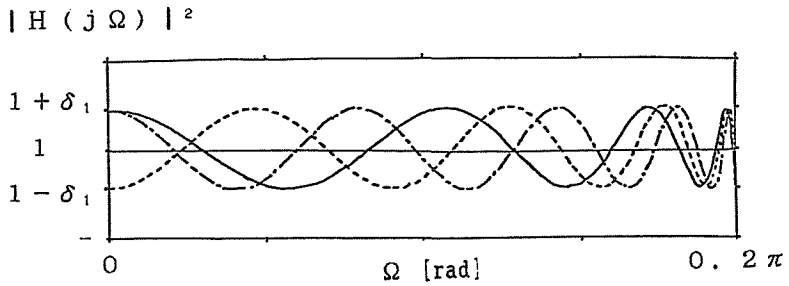
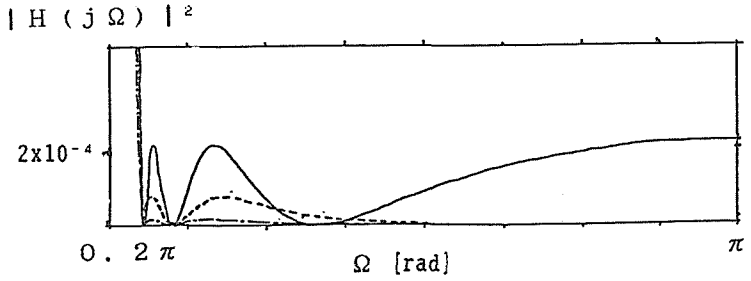



図2　分母分子の次数と阻止域減衰量




（3－a）通過域の振幅2乗特性




（3－b）阻止域の振幅2乗特性

| | ①——— | ②----- | ③—·— |
|---|---|---|---|
| M | 7 | 8 | 9 |
| N | 6 | 5 | 4 |
| 減衰量[dB] | 36.673 | 41.211 | 47.713 |

図3　分母分子の次数の和が13のときの振幅2乗特性

## 謝　　辞

本研究を進めるにあたって，有益な御助言をいただきました電子回路工学講座の皆さんに，深く感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

1) Papulis, A.: "On the Apporoximation Problem in Filter Design", IRE CONV. Record, Pt2, pp. 175-185 (1975).
2) Oppenheim, A. V. Schafer, R. W.: "Digital signal processing", Prentice-Hall(1975).
伊達訳："ディジタル信号処理"（上，下），コロナ社（昭53）.