



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	4光波パラメトリック映像アップコンバータにおける結合波動方程式のフーリエ変換
Author(s)	岡本, 淳; Okamoto, Atsushi; 三島, 瑛人 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 142, 45-52
Issue Date	1988-10-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42135
Type	departmental bulletin paper
File Information	142_45-52.pdf



4 光波パラメトリック映像アップコンバータ における結合波動方程式のフーリエ変換

岡本 淳 三島 瑛人 桜庭 一郎
(昭和 63 年 6 月 30 日受理)

Fourier Transformed Coupled Wave-Equation of Four-Wave Parametric Image Upconverter

Atsushi OKAMOTO, Teruhito MISHIMA and Ichiro SAKURABA
(Received June 30, 1988)

Abstract

The Fourier transformed coupled wave-equations of parametric image upconverters are derived from Maxwell's equations.

These nonlinear second-order differential equations are reduced to the first-order ones by using SVEA (slowly varying envelope approximation) on the assumption that the parametric interaction is sufficiently weak. If the pump intensity is so large that its depletion can be ignored, the linear coupled-mode formulations are obtained by a two-wave approximation. And if the nonlinear medium is sufficiently thin, the general solution of the differential equations is derived assuming the one-wave approximation in which only the sum-frequency wave is affected by the parametric interaction. This solution shows the optical transfer relation between the infrared and the sum-frequency Fourier spectrum.

By using these results, the image transfer performances of the devices, e. g., the image formations, aberrations, diffractions and phase matching properties can be analyzed in the spatial frequency domain.

1. ま え が き

4 光波パラメトリック和周波数変換による赤外光から可視光領域へのアップコンバージョンは、赤外光子 1 個と 2 個のポンピング光子が消滅して、和周波数光子 1 個が生成する 4 光波混合過程である¹⁾。非線形光学媒質としては、Cs や Na 等のアルカリ金属蒸気が使われる。一般に、3 次の非線形感受率の値は小さいが、2 光子共鳴励起法により極めて大きな値を実現できる。この過程を利用した映像変換系は、非線形結晶を用いる 3 光波混合と比較すると、得られる和周波数光とポンピング光の分離が容易であり、金属蒸気セルの直径を大きくすることにより高分解能が期待できる。また、映像アップコンバータは冷却や走査系が不要であるなどの特長があり、特に 10 μm 帯の赤外線映像検出器として注目されている^{2,3)}。

このデバイスの像の品質を検討する方法として、空間領域による方法と空間周波数領域による

方法の二つがある。これまで、映像変換系の結像や像分布について、幾何光学ならびに波動光学を用いた解析が報告されている^{4),5)}。しかし、空間領域におけるこれらの方法では、光線角度に依存した非線形相互作用が像に与える影響を解析的に評価することは極めて難しい。そのため、パラメトリックデバイスにおいて重要である位相整合特性や光波間の結合の影響などを含めた考察はされていない。また、幾何光学においては、実用上重要なガウスビームポンピングや回折の取り扱いが困難である。それに対し空間周波数領域における解析では、これらの評価が比較的容易であり、位相整合や媒質厚さによる特性を空間周波数領域で評価できる利点がある^{6),7),8)}。

本報告は、4光波パラメトリック映像アップコンバータにおける空間周波数領域表示の結合波動方程式を導出した文献7の内容を詳しく述べたものである。得られる結果は四つの2階微分方程式からなる非線形連立微分方程式となるが、SVEA (slowly varying envelope approximation)⁹⁾によって各々1階の微分方程式に近似する。また、実用上ポンピング光の強度が十分に大きい場合には、その減衰を無視できるため2光波近似が成立する。さらに、薄い媒質の解析においては、ポンピング光と共に赤外光も相互作用の影響を受けないと仮定し、1光波近似を用いてその一般解を示した。

以下の解析では、すべての光波は単色と仮定する。また、2光子共鳴励起媒質として用いられるアルカリ金属蒸気¹⁰⁾は光学的に等方かつ均一であると仮定した。

2. 結合波動方程式の導出

マクスウェル方程式は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{I} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \quad (2)$$

及び

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3)$$

$$\mathbf{I} = \sigma \mathbf{E} \quad (4)$$

であり、 σ は導電率である。ここで、パラメトリック相互作用における非線形分極 \mathbf{P}_{NL} を導入する。すなわち、全分極 \mathbf{P} を

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_L \mathbf{E} + \mathbf{P}_{NL} \quad (5)$$

とおき、式(1)及び式(2)にベクトル公式を用いると

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}_{NL} \quad (6)$$

が得られる。但し

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_L) \quad (7)$$

であり、 χ_L は線形感受率である。4光波混合過程において、非線形分極 \mathbf{P}_{NL} は電界の3次のべきに比例する。

図1に示すように、映像アップコンバータの光軸を z 軸にとり、任意の横方向空間座標を

$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y \quad (8)$$

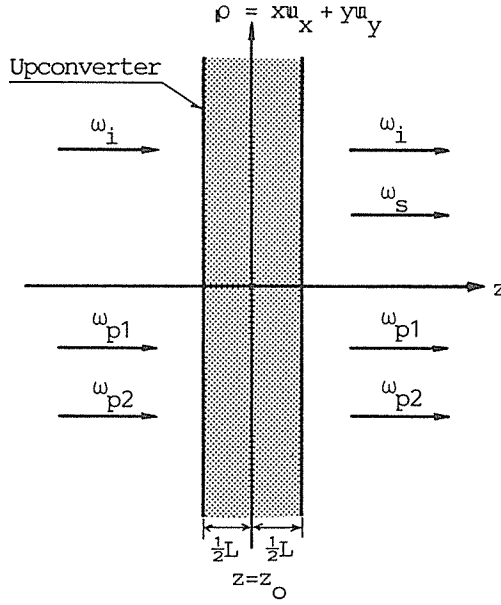


図1 映像アップコンバータの座標系

で表す。 u_x , u_y は、 x 及び y 方向の単位ベクトルである。また、電界と分極の偏波の方向が一致していると仮定する。式(6)の両辺を ρ 面内で2次元フーリエ変換すると

$$\begin{aligned} & \left[-(2\pi\mathbf{f})^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] F(\mathbf{f}, z, t) \\ & = \mu_0\sigma \frac{\partial}{\partial t} F(\mathbf{f}, z, t) + \mu_0\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(\mathbf{f}, z, t) + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_{NL}(\mathbf{f}, z, t) \end{aligned} \quad (9)$$

となる。但し \mathbf{f} は空間周波数であり、電界と分極のフーリエ変換を各々

$$F(\mathbf{f}, z) = \int E(\boldsymbol{\rho}, z) \exp(j2\pi\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\rho}) d^2\rho \quad (10a)$$

$$E(\boldsymbol{\rho}, z) = \int F(\mathbf{f}, z) \exp(-j2\pi\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{f}) d^2\mathbf{f} \quad (10b)$$

及び

$$Q_{NL}(\mathbf{f}, z) = \int P_{NL}(\boldsymbol{\rho}, z) \exp(j2\pi\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\rho}) d^2\rho \quad (11a)$$

$$P_{NL}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int Q_{NL}(\mathbf{f}, z) \exp(-j2\pi\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{f}) d^2\mathbf{f} \quad (11b)$$

で定義する。

次に周波数の異なる四つのフーリエスペクトルが、媒質中を相互作用しながら定常的に伝搬する場合を考える。このとき各光波の時間依存性を

$$F_m(\mathbf{f}, z, t) = \frac{1}{2} \underline{F}_m(\mathbf{f}, z) \exp(j\omega_m t) + c.c. \quad (12)$$

と定める。相互作用のない自由空間では、式(9)左辺の導電率及び右辺の分極を零として、空間的な位相因子

$$\underline{F}_m(\mathbf{f}, z) = F_m(\mathbf{f}, z) \exp\left\{-jk_m z [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_m})^2]^{\frac{1}{2}}\right\} \quad (13)$$

が得られる。ここで、 ω と k は光波の角周波数と波数である。また、 $m = i, s, p_1, p_2$ であり、各々赤外光、和周波数光及び2つのポンピング光を表す。全電界の瞬時値は次の値となる。

$$F(\mathbf{f}, z, t) = \sum_m F_m(\mathbf{f}, z, t) \quad (14)$$

非線形光学媒質中において無損失なパラメトリック相互作用を仮定すると、光子のエネルギー保存則

$$\omega_s = \omega_i + \omega_{p1} + \omega_{p2} \quad (15)$$

が成立する。3次の非線形感受率を χ_{NL} とすると、式(14)及び式(15)より和周波数の非線形分極が次のように定まる。

$$\underline{Q}_{NLs}(\mathbf{f}, z) = \chi_{NL} \cdot \underline{F}_i(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p1}(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p2}(\mathbf{f}, z) \quad (16)$$

但し \underline{Q}_{NL} は次式で表される複素振幅であり

$$\underline{Q}_{NLm}(\mathbf{f}, z, t) = \frac{1}{2} \underline{Q}_{NLm}(\mathbf{f}, z) \exp(j\omega_m t) + c.c. \quad (17)$$

記号*は空間周波数 \mathbf{f} に関する2次元の convolution を表す。通常、映像アップコンバータの視野角は十分小さいため非線形感受率の空間周波数依存性は省略できる。さらに、媒質開口の影響を非線形分極に含めると各周波数に対して次式を得る。

$$\underline{Q}_{NLs}(\mathbf{f}, z) = \chi_{NL} \cdot F_W(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_i(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p1}(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p2}(\mathbf{f}, z) \quad (18a)$$

$$\underline{Q}_{NLi}(\mathbf{f}, z) = \chi_{NL} \cdot F_W(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_s(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p1}^*(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p2}^*(\mathbf{f}, z) \quad (18b)$$

$$\underline{Q}_{NLp1}(\mathbf{f}, z) = \chi_{NL} \cdot F_W(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_i^*(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_s(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p2}^*(\mathbf{f}, z) \quad (18c)$$

$$\underline{Q}_{NLp2}(\mathbf{f}, z) = \chi_{NL} \cdot F_W(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_i^*(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_s(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p1}^*(\mathbf{f}, z) \quad (18d)$$

但し、 $F_W(\mathbf{f}, z)$ は媒質開口の窓関数のフーリエスペクトルであり、各波長に対して変化しないと仮定する。また、フーリエ変換演算子を \mathcal{F} とすると

$$F^*(\mathbf{f}) \equiv \mathcal{F} E^*(\boldsymbol{\rho}) \quad (19)$$

と定める。

式(9)に式(12)を代入すると、式(9)の左辺は

$$\begin{aligned} & \left[-(2\pi \mathbf{f})^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] F_m(\mathbf{f}, z) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} F_m(\mathbf{f}, z) - 2jk_m [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_m})^2]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} F_m(\mathbf{f}, z) - k_m^2 F_m(\mathbf{f}, z) \right] \\ & \quad \cdot \exp\left\{-jk_m z [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_m})^2]^{\frac{1}{2}}\right\} \exp(j\omega_m t) + c.c. \end{aligned} \quad (20)$$

となり、式(9)の右辺は

$$\begin{aligned} & \mu_o \sigma_m \frac{\partial}{\partial t} F_m(\mathbf{f}, z) + \mu_o \varepsilon_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} F_m(\mathbf{f}, z) + \mu_o \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{Q}_{NLm}(\mathbf{f}, z) \\ &= \frac{1}{2} \left[\mu_o \omega_m \{j\sigma_m - \varepsilon_m \omega_m\} F_m(\mathbf{f}, z) \exp\left\{-jk_m z [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_m})^2]^{\frac{1}{2}}\right\} \exp(j\omega_m t) \right. \\ & \quad \left. + c.c. \right] - \frac{1}{2} \left[\mu_o \omega_m^2 \underline{Q}_{NLm}(\mathbf{f}, z) \exp(j\omega_m t) + c.c. \right] \end{aligned} \quad (21)$$

となる。式(20)と式(21)に $k_m^2 = \epsilon_m \mu_o \omega_m^2$ を用いると

$$\begin{aligned} & \frac{j}{2k_m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_m(\mathbf{f}, z) + [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_m})^2]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} F_m(\mathbf{f}, z) + \frac{1}{2} \sigma_m \left(\frac{\mu_o}{\epsilon_m}\right)^{\frac{1}{2}} F_m(\mathbf{f}, z) \\ & = -\frac{j}{2} \omega_m \left(\frac{\mu_o}{\epsilon_m}\right)^{\frac{1}{2}} Q_{NLm}(\mathbf{f}, z) \exp\left\{jk_m z [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_m})^2]^{\frac{1}{2}}\right\} \end{aligned} \quad (22)$$

となる。上式に式(18)の非線形分極を代入することにより、次の結合波動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{j}{2k_s} \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_s(\mathbf{f}, z) + [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_s})^2]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} F_s(\mathbf{f}, z) + \alpha_{os} F_s(\mathbf{f}, z) \\ & = -j\beta_{os} \cdot F_w(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_i(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p1}(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p2}(\mathbf{f}, z) \cdot \exp\left\{jk_s z [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_s})^2]^{\frac{1}{2}}\right\} \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{j}{2k_i} \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_i(\mathbf{f}, z) + [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_i})^2]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} F_i(\mathbf{f}, z) + \alpha_{oi} F_i(\mathbf{f}, z) \\ & = -j\beta_{oi} \cdot F_w(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_s(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p1}^*(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p2}^*(\mathbf{f}, z) \cdot \exp\left\{jk_i z [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_i})^2]^{\frac{1}{2}}\right\} \end{aligned} \quad (23b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{j}{2k_{p1}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_{p1}(\mathbf{f}, z) + [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_{p1}})^2]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} F_{p1}(\mathbf{f}, z) + \alpha_{op1} F_{p1}(\mathbf{f}, z) \\ & = -j\beta_{op1} \cdot F_w(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_i^*(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_s(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p2}^*(\mathbf{f}, z) \cdot \exp\left\{jk_{p1} z [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_{p1}})^2]^{\frac{1}{2}}\right\} \end{aligned} \quad (23c)$$

$$\begin{aligned} & \frac{j}{2k_{p2}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_{p2}(\mathbf{f}, z) + [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_{p2}})^2]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} F_{p2}(\mathbf{f}, z) + \alpha_{op2} F_{p2}(\mathbf{f}, z) \\ & = -j\beta_{op2} \cdot F_w(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_i^*(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p1}^*(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_s(\mathbf{f}, z) \cdot \exp\left\{jk_{p2} z [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_{p2}})^2]^{\frac{1}{2}}\right\} \end{aligned} \quad (23d)$$

但し

$$\alpha_{om} = \frac{1}{2} \sigma_m \left(\frac{\mu_o}{\epsilon_m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

及び

$$\beta_{om} = \frac{1}{2} \chi_{NL} \omega_m \left(\frac{\mu_o}{\epsilon_m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

は、各々光学的損失定数及びパラメトリック相互作用における結合定数である。

3. SVEA (slowly varying envelope approximation)⁹⁾

弱い非線形相互作用においては、電界の包絡線が急激に変化せず

$$\left| [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_m})^2]^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} F_m(\mathbf{f}, z) \right| \gg \left| \frac{1}{2k_m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_m(\mathbf{f}, z) \right| \quad (26)$$

が成立する。この場合、式(23a)～式(23d)は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} F_s(\mathbf{f}, z) = -\alpha_s(\mathbf{f}) F_s(\mathbf{f}, z) \\ & \quad - j\beta_s(\mathbf{f}) \cdot F_w(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_i(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p1}(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p2}(\mathbf{f}, z) \cdot \exp\left\{jk_s z [1 - (2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_s})^2]^{\frac{1}{2}}\right\} \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F_i(\mathbf{f}, z) = -\alpha_i(\mathbf{f}) F_i(\mathbf{f}, z)$$

$$-j\beta_i(\mathbf{f}) \cdot F_w(\mathbf{f}, z) * F_s(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{\beta_1}^*(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{\beta_2}^*(\mathbf{f}, z) \cdot \exp\left\{jk_i z \left[1 - \left(2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \quad (27b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} F_{\rho_1}(\mathbf{f}, z) &= -\alpha_{\rho_1}(\mathbf{f}) F_{\rho_1}(\mathbf{f}, z) \\ &- j\beta_{\rho_1}(\mathbf{f}) \cdot F_w(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_i^*(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_s(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{\beta_2}^*(\mathbf{f}, z) \cdot \exp\left\{jk_{\rho_1} z \left[1 - \left(2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_{\rho_1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \end{aligned} \quad (27c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} F_{\rho_2}(\mathbf{f}, z) &= -\alpha_{\rho_2}(\mathbf{f}) F_{\rho_2}(\mathbf{f}, z) \\ &- j\beta_{\rho_2}(\mathbf{f}) \cdot F_w(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_i^*(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{\beta_1}^*(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_s(\mathbf{f}, z) \cdot \exp\left\{jk_{\rho_2} z \left[1 - \left(2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_{\rho_2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \end{aligned} \quad (27b)$$

となる。但し

$$\alpha_m(\mathbf{f}) = \alpha_{om} \frac{1}{\left[1 - \left(2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (28)$$

及び

$$\beta_m(\mathbf{f}) = \beta_{om} \frac{1}{\left[1 - \left(2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (29)$$

である。

4. 結合波動方程式の線形化

前章で求めた結合波動方程式は、互いに結合した四つの非線形微分方程式からなるため、その解析はきわめて複雑になる。しかし、以下に述べる近似が成立する場合には、微分方程式の線形化が可能になる。

4.1 2光波近似

赤外光及び和周波数光の電力と比較してポンピング光の電力が十分に大きい場合には、パラメトリック相互作用によるポンピング光の変化（減衰）を無視できる。これを2光波近似と呼び、式(27)は赤外光及び和周波数光のフーリエスペクトルに関する連立微分方程式に線形化される。

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \alpha_s(\mathbf{f})\right) F_s(\mathbf{f}, z) = -j\beta_{\rho s}(\mathbf{f}) \cdot \underline{F}_{we}(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_i(\mathbf{f}, z) \cdot \exp\left\{jk_s z \left[1 - \left(2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_s}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \quad (30a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \alpha_i(\mathbf{f})\right) F_i(\mathbf{f}, z) = -j\beta_{\rho i}(\mathbf{f}) \cdot \underline{F}_{we}^*(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_s(\mathbf{f}, z) \cdot \exp\left\{jk_i z \left[1 - \left(2\pi \frac{\mathbf{f}}{k_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \quad (30b)$$

但し

$$\underline{F}_{we}(\mathbf{f}, z) = F_w(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{\rho_1}(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{\rho_2}(\mathbf{f}, z) \quad (31)$$

であり、 $\underline{F}_{we}(\mathbf{f}, z)$ を実効的な窓関数のフーリエスペクトルと呼ぶ。また

$$\beta_{\rho s}(\mathbf{f}) = \bar{E}_{\rho_1} \bar{E}_{\rho_2} \beta_s(\mathbf{f}) \quad (32a)$$

$$\beta_{\rho i}(\mathbf{f}) = \bar{E}_{\rho_1} \bar{E}_{\rho_2} \beta_i(\mathbf{f}) \quad (32b)$$

であり、ポンピング光のフーリエスペクトルを空間周波数上で規格化し、その振幅強度を \bar{E}_{p1} 及び \bar{E}_{p2} とおく。媒質中におけるポンピング光の光学的損失も無視できる場合には、ポンピング光 $\underline{F}_{p1}(\mathbf{f}, z)$ 及び $\underline{F}_{p2}(\mathbf{f}, z)$ の振幅は一定となり

$$\underline{F}(\mathbf{f}, z) = F(\mathbf{f}, z) \exp\left\{-jkz\left[1 - \left(2\pi\frac{\mathbf{f}}{k}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \quad (33)$$

で表わされる位相推移のみを伴うが、和周波数光 $\underline{F}_s(\mathbf{f}, z)$ 及び赤外光 $\underline{F}_i(\mathbf{f}, z)$ は、パラメトリック相互作用によって振幅も変化する。

4. 2 1 光波近似

式(27)に1光波近似を用いると、和周波数光電界のフーリエスペクトルは、次式で表される。

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \alpha_s(\mathbf{f})\right) F_s(\mathbf{f}, z) = -j\beta_{ps}(\mathbf{f}) \cdot F_w(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_i(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p1}(\mathbf{f}, z) * \underline{F}_{p2}(\mathbf{f}, z) \cdot \exp\left\{jk_s z \left[1 - \left(2\pi\frac{\mathbf{f}}{k_s}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \quad (34)$$

この近似においては、和周波数光 $F_s(\mathbf{f}, z)$ は相互作用によって変化するが、ポンピング光 $F_{p1}(\mathbf{f}, z)$ 、 $F_{p2}(\mathbf{f}, z)$ 及び赤外光 $F_i(\mathbf{f}, z)$ は変化しない。この近似は薄い媒質の解析にきわめて有効である。

ここで、媒質の前面における位相を基準にして、式(34)の右辺における convolution を

$$G(\mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''') = F_w(\mathbf{f}''') F_{p1}(\mathbf{f}'' - \mathbf{f}''') F_{p2}(\mathbf{f}' - \mathbf{f}'' - \mathbf{f}''') F_i(\mathbf{f} - \mathbf{f}' - \mathbf{f}'' - \mathbf{f}''') \quad (35)$$

及び

$$\begin{aligned} \Delta k(\mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''') &= k_s \left[1 - \left(2\pi\frac{\mathbf{f}}{k_s}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - k_{p1} \left[1 - \left(2\pi\frac{\mathbf{f}'' - \mathbf{f}'''}{k_{p1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - k_{p2} \left[1 - \left(2\pi\frac{\mathbf{f}' - \mathbf{f}'' - \mathbf{f}'''}{k_{p2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - k_i \left[1 - \left(2\pi\frac{\mathbf{f} - \mathbf{f}' - \mathbf{f}'' - \mathbf{f}'''}{k_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (36)$$

を用いて書き換えると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \alpha_s(\mathbf{f})\right) F_s(\mathbf{f}, z) \\ = -j\beta_{ps}(\mathbf{f}) \int d^2\mathbf{f}' d^2\mathbf{f}'' d^2\mathbf{f}''' G(\mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''') \exp\{j\Delta k(\mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''')z\} \end{aligned} \quad (37)$$

が得られる。但し、赤外光及びポンピング光の光学的損失も無視できると仮定した。境界条件として、媒質の前面において和周波数光が存在せず

$$F_s(\mathbf{f}; z_0 - \frac{L}{2}) = 0 \quad (38)$$

を仮定する(図1参照)。但し、 z_0 は媒質の中心の z 座標である。媒質開口の窓関数が z に対して一定であれば、関数 $G(\mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''')$ は考える積分区間で一定であるから、式(37)は簡単に積分され、媒質の後面における和周波数光電界のフーリエスペクトルは

$$\begin{aligned} F_s(\mathbf{f}; z_0 + \frac{L}{2}) &= -j\beta_{ps}(\mathbf{f}) L \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha_s(\mathbf{f})L\right\} \\ &\quad \cdot \int d^2\mathbf{f}' d^2\mathbf{f}'' d^2\mathbf{f}''' G(\mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''') \exp\left\{\frac{j\Delta k(\mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''')L}{2}\right\} \end{aligned}$$

$$\cdot \text{sinc} \left\{ \frac{1}{2} (\Delta k(\mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{f}'', \mathbf{f}''') - j\alpha_s(\mathbf{f})) L \right\} \quad (39)$$

となる。さらに、媒質が十分に薄い場合は、 $L \rightarrow 0$ の極限を考え

$$\underline{E}_s(\mathbf{f}; z_0) = -j\beta_{ps}(\mathbf{f}) L \cdot \underline{E}_{we}(\mathbf{f}; z_0) * \underline{E}_i(\mathbf{f}; z_0) \quad (40)$$

を得る。

式(40)より、媒質が十分に薄い場合には、和周波数光の光学的損失や z 軸方向の位相整合条件を無視できる。したがって、薄い媒質を用いた映像アップコンバータの像特性は実効的な窓関数のフーリエスペクトルによって評価される。

5. む す び

2光子共鳴励起形映像アップコンバータにおける空間周波数領域表示の結合波動方程式をマクスウェル方程式から導出した。得られた結果に対し SVEA を適用し、さらに2光波近似及び1光波近似を行った結果を示した。また、1光波近似における一般解と、薄い媒質の空間周波数伝達方程式を導出した。これらの結果は文献7の内容を詳しく述べたものである。

本結合波動方程式によって、映像変換系の空間周波数特性と、その結像、収差、回折及び位相整合などとの関係を明らかにすることができ、それが今後の課題である。また、フーリエモード光学系¹¹⁾ならびにガウスビームポンピングなどの空間周波数多重モード系の解析にも応用可能である。終わりに、ご助言いただいた小川吉彦教授に深謝する。

参考文献

- 1) 桜庭一郎：光学, 11 (1982), 3, pp. 261-266
- 2) 岡本, 久留, 三島, 桜庭：信学技報, OQE 85-144 (1986)
- 3) K. S. Krishnan, J. S. Ostrem, E. A. Stappaerts : Opt. Eng. (1978), 17, 2, pp. 108-112
- 4) 佐藤, 伊藤, 桜庭：信学論(C), J 66-C (昭58), 8, pp. 545-552
- 5) 佐藤, 桜庭：信学論(C), J 67-C (昭59), 4, pp. 353-360
- 6) 岡本, 三島, 桜庭, 電気関係学会北海道支部連大, 202~204 (昭61)
- 7) 岡本, 佐藤, 三島, 桜庭：信学論(C), J-71 C (昭63), 1, pp. 155-156
- 8) 岡本, 佐藤, 三島, 桜庭：信学技報, EID 87-16 (1987)
- 9) R. A. Fisher ed. : Optical phase conjugation, (1983), p. 7, Academic press
- 10) J. H. Newton and J. F. Young : IEEE J. Quantum Electron., QE-16 (1980), 3, pp. 268-276
- 11) Andrews R. A. : IEEE J. Quantum Electron., QE-6 (1970), 1, pp. 68-80