



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	外部磁場変動下のピンチプラズマの径方向振動
Author(s)	岩松, 勝; 谷津, 茂男; 岩崎, 千里 他
Citation	北海道大学工学部研究報告, 144, 75-83
Issue Date	1988-12-27
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42151
Type	departmental bulletin paper
File Information	144_75-84.pdf



外部磁場変動下のピンチプラズマの径方向振動

岩松 勝* 谷津 茂男** 岩崎 千里*** 笠原 達雄*

(昭和 63 年 9 月 30 日受理)

Radial Oscillations of a Pinch Plasma under the Alternating External Magnetic Field

Masaru IWAMATSU, Shigeo YATSU, Chisato IWASAKI
and Tatsuo KASAHARA

(Received September 30, 1988)

Abstract

Radial oscillations of a pinch plasma under an alternating external magnetic field are analyzed numerically. The external magnetic field consists of a constant bias field and a periodically alternating field. On the assumption that the plasma is confined in a thin cylindrical annulus and plasma conductivity is infinite, the non-linear equation of motion is solved numerically by Runge-Kutta-Gill(RKG) method. The solution of the equation is shown in phase space, including Poincaré map. Poincaré map is utilized to specify the oscillations. The frequency of oscillations is estimated by Fast Fourier Transform(FFT) spectral analysis.

From the results of the analysis, stable radial oscillations make almost periodic oscillations and have several modes, including an eigenfrequency of radial oscillations, a frequency of the external field and their higher harmonics. The stable-unstable diagram is shown for typical parameters. It is also shown by the linear analysis using the perturbation method that unstable solutions occurred at specified parameters are caused by resonance.

1. ま え が き

テータピンチプラズマの動的過程におけるプラズマと磁場の複雑な相互作用によって起こる興味深い現象の一つに、プラズマの径方向振動現象がある。これはプラズマが径方向に圧縮される際にプラズマの内部と外部に圧力差が生じ、それを緩和させようとして起こる巨視的振動で、 $m=n$ (m : ポロイダルモード数, n : トロイダルモード数) の磁気音響モードとしてもよく知られている。この振動現象は古くから実験において観測され、Ito と Kawasaki は磁場変化のみならずプラズマ密度及び温度においてもこの振動を観測している¹⁾。また、Mimura と Hirano は散逸機構を取り込んだ径方向振動について説明しており、温度が低温の場合はプラズマ抵抗率が、高温の場合はイオンの粘性が散逸に対して重要であり、ジュール加熱が必ずしも有効ではない高温高密

* 工学部原子工学科原子炉材料学講座

** 工学部附属先端電磁流体実験施設

*** アルプス電気中央研究所

度プラズマの加熱法として径方向振動の散逸が有効である可能性を示唆している²⁾。一方、モデル解析として、Niblett と Green は薄厚円筒プラズマを仮定して雪かきモデルを用いて径方向振動周期を導出し、流し写真から得たプラズマ発光層の振動周期がこのモデルで説明できることを示した³⁾。また、Bodin と McNamara は前者のモデルに任意の径方向質量密度分布を与えて変分法により計算した⁴⁾。Schoorman は理想化 MHD 方程式から磁気音響振動について第二次項まで含めて摂動計算を行っている⁵⁾。

しかしながら、前述した従来の解析では印加磁場が時間的に一定であり、多くのテータピンチ実験装置において実際に用いられている時間とともに正弦的に変化する印加放電磁場の場合の現象に対しては、短い時間範囲にしか適応出来ない。印加磁場が時間的に変動する場合についての径方向振動の解析は筆者の知る限り報告例はない。以前より、我々はバイアス磁場印加条件下のテータピンチプラズマの径方向振動現象に注目してきた。今回、径方向振動に対する印加磁場の振動周期及び振幅の効果を明らかにする目的で、導電率無限大を仮定した Niblett-Green らが用いたモデルを用いて数値解析を行った。その結果、径方向振動は印加磁場が時間的に一定の場合と比較して多様な振る舞いを示すことが確認されたのでそのあらましを報告する。

2. 計算モデル

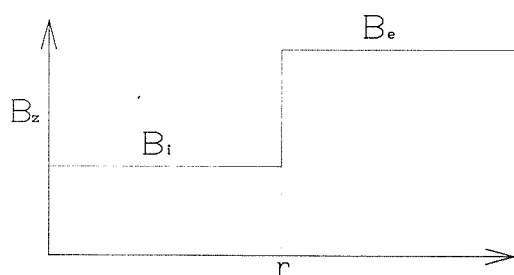


図1 径方向磁場分布モデル

B_e : 外部磁場

B_i : 内部磁場

r : プラズマ半径

プラズマモデルは Niblett-Green モデルを採用した³⁾。径方向磁場分布モデルを図1に示す。プラズマは軸方向磁場の間に閉じ込められ、軸方向に長さ無限大、径方向に薄厚円筒状を仮定する。弱电離プラズマの状態でプラズマ電流が増加している間、印加磁場はプラズマ中へ浸透するが、プラズマ温度が上昇して導電率が増加するとプラズマ中へ浸透した磁束は捕捉され、結果として電流シースの内縮に伴い圧縮される。プラズマは圧縮されて内側へ向かい、プラズマは外部磁場と内部磁場が等しくなる地点、つまり磁気圧が釣り合う半径位置(平衡半径 r_e)に至っても静止せずにオーバシュートして結果的にその半径を中心に振動するようになる。

薄厚円筒プラズマを仮定するということは、径方向振動を単純化した運動方程式で記述することを可能にする。また、このモデルでは導電率を無限大に仮定しているため、プラズマからの磁場の拡散は無視されている。磁気ピストンによりかき集められたプラズマはすべて薄厚領域内に存在すると仮定する(雪かきモデル)。

3. 運動方程式

プラズマにかかる磁気圧 P_M は径方向を正にとると、

$$P_M = \frac{1}{2\mu_0} (B_i^2 - B_e^2) \quad (1)$$

但し、 μ_0 は真空中の透磁率、 B_i は内部磁場、 B_e は外部磁場である。

プラズマの運動はプラズマ圧力を無視すると磁気圧だけに支配されるので、運動方程式は次の

ように書き表わされる。

$$\frac{d}{dt} \left(M \frac{dr}{dt} \right) = 2\pi r P_M = \frac{1}{2\mu_0} (B_i^2 - B_e^2) 2\pi r \quad (2)$$

但し、 M はプラズマ線質量、 r はプラズマ半径である。

最初に、外部磁場が時間的に変動しない場合 ($B_e = B_b = \text{const.}$) について考える。磁束保存則が成立するので、内部捕捉磁束 ϕ_i は、

$$\phi_i = \pi r^2 B_i = \pi r_e^2 B_b = \text{const.} \quad (3)$$

となる。次に、プラズマ半径を平衡半径で規格化する。

$$\beta = \frac{r}{r_e} \quad (4)$$

プラズマ線質量は時間的に変化しないと仮定する。式(3)、式(4)を用いて式(2)を書き換えると、運動方程式は、

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{\alpha^2}{4}\beta(1-\beta^{-4}) \quad (5)$$

となる。但し、 α はプラズマ径方向振動角周波数³⁾で次のように定義される。

$$\alpha^2 = \frac{4\pi B_b^2}{\mu_0 M} \quad (6)$$

式(5)は、Niblett-Green により解析的に解かれており、その解は、

$$\beta^2 = k^2 + (k^4 - 1)^{1/2} \sin \alpha t \quad (7)$$

と与えられる。但し、 k は任意定数であり、

$$k = (1/2(\beta_{\max}^2 + \beta_{\min}^2))^{1/2} \quad (8)$$

$$(\beta_{\max})^2 (\beta_{\min})^2 = 1 \quad (9)$$

を満足する。ここで、 $\beta_{\max}$ 、 $\beta_{\min}$ はそれぞれ規格化半径の最大値、最小値である。

次に、外部磁場が時間的に変動する場合について考える。

外部磁場 B_e は時間的に変化しないバイアス磁場 B_b と角周波数 ω で正弦的に時間変化する変動磁場 B_M の和から成るとする。即ち、

$$\begin{aligned} B_e &= B_b + B_M \\ &= B_b + B_m \sin \omega t \\ &= B_b (1 + \epsilon_b \sin \omega t) \end{aligned} \quad (10)$$

但し、 $\epsilon_b = B_m/B_b$ である。

式(3)と同様に磁束保存則より、

$$\pi r^2 B_i = \pi r_e^2 B_b = \text{const.} \quad (11)$$

が成立する。

式(4)、式(10)、式(11)より式(2)を書き換えると、運動方程式は、

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{\alpha^2}{4}\beta\{(1 + \epsilon_b \sin \omega t)^2 - \beta^{-4}\} \quad (12)$$

となる。

式(12)において $\omega t = 2\pi\tau$ とおいて変数変換し、次のように一階連立微分方程式系に書き直す。

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{d\tau} &= \gamma \quad \gamma: \text{規格化速度} \\ \frac{d\gamma}{d\tau} &= -\left(\frac{\pi\alpha}{\omega}\right)^2 \beta \{ (1 + \epsilon_b \sin 2\pi\tau)^2 - \beta^{-4} \}\end{aligned}\quad (13)$$

ここで、以後の記述の簡便さを図るため式(5)を Niblett-Green 方程式 (N G eq.), 式(12)を Modified Niblett-Green 方程式 (M N G eq.) と命名することにする。

4. 結果と考察

4-1. 数値解析

M N G eq. は、所謂非線形 Hill 方程式である。線形 Hill 方程式はパラメトリック励振を記述する微分方程式として数学的にも詳細に調べられ、特に Hill 方程式の一種である Mathieu 方程式は、McLachlan⁶⁾ が詳しい解析を行っている。しかし、非線形微分方程式の場合には、一般に解析的に解くことがほとんどの場合困難であるため数値解析に頼らざるを得ない。本研究においても微分方程式の最も一般的な数値解法の一つである RKG 法を用いて数値的に解き、結果をプラズマ半径 $r (=r_0 \beta)$ 及び速度 $v (=r_0 \gamma \omega / 2\pi)$ の時間変化として出力した。外部磁場振動周期は実験⁷⁾ に用いている放電磁場の周期と一致させるため $6 \mu\text{sec}$ とした。積分ステップは、外部磁場振動周期の 512 分の 1 を採用した。これは、第一に M N G eq. の解が外部磁場振動周期に依存することが予想されること、第二にポアンカレ・マップの基準周期としてその周期を選ぶこと、第三にスペクトル解析法として FFT (Fast Fourier Transform) を採用するため解の個数を 2 のべき乗個にする必要があることによる。

ポアンカレ・マップとは変換理論 (付録参照) を用いて作成された図である。この図はある周期毎に微分方程式の解を位相平面上にプロットすることにより得られる。ポアンカレ・マップにより、振動を幾つかの種類に分類することができる。これを表 1 に示す⁸⁾。

表 1 ポアンカレ・マップによる振動の分類

有限個の点	周期振動または調和振動
閉曲線	2 種類の周波数より構成される概周期振動
フラクタル構造を持つ点群	3 次元位相空間中のストレンジアトラクタ (カオス振動)
ファジィ構造を持つ点群	(1) 入力が非常にランダムまたはノイズの多い力学系 (2) 非常に微小な散逸を含むストレンジアトラクタ (3) 3 次元以上の位相空間中のストレンジアトラクタ (4) 3 種類以上の周波数より構成されるまたは優勢な周波数を含む概周期振動

前述したスペクトル解析を用いることにより径方向振動に寄与している振動周波数を推定できる。また、スペクトル解析は後述する概周期振動とカオス振動の識別に有効である。スペクトル解析を用いた径方向振動の解析は筆者の知る限り報告例はない。

数値解は α/ω , ϵ_b をパラメータとして求めた。調査したパラメータ範囲は $0 \leq \alpha/\omega \leq 3$, $0 \leq \epsilon_b \leq 3$ である。平衡半径は 1 cm とし、初期値は N G eq. の解の不動点である $(r, v) = (1 \text{ cm}, 0 \text{ cm/sec})$ に設定した。

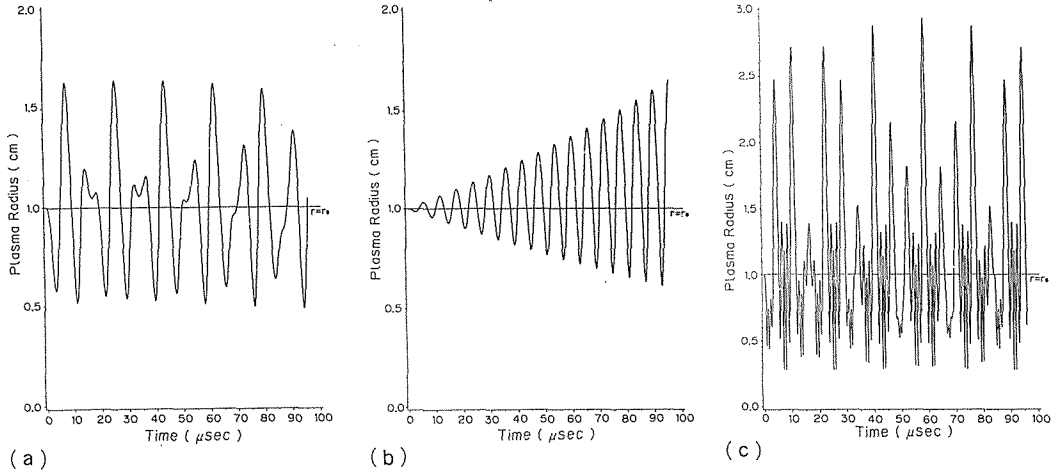


図2 プラズマ半径の時間変化

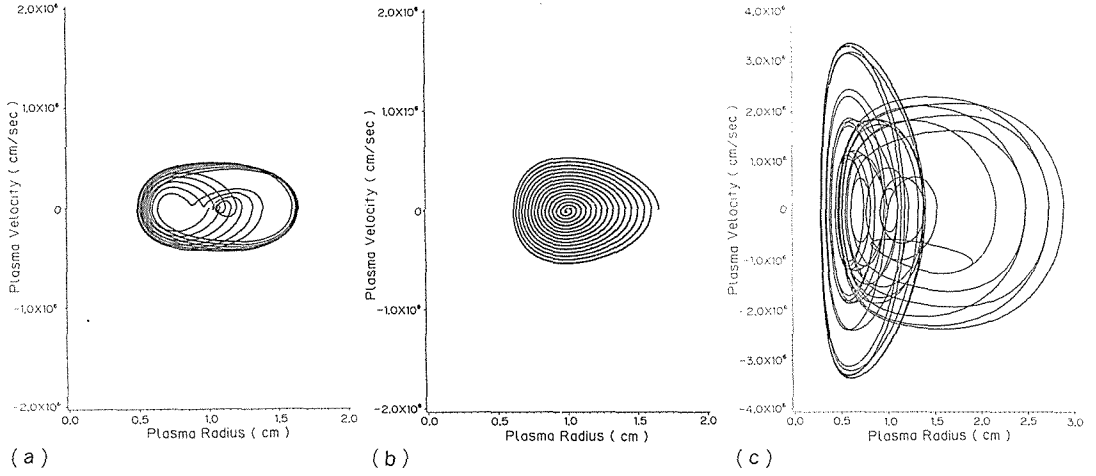


図3 プラズマ半径-速度位相空間図

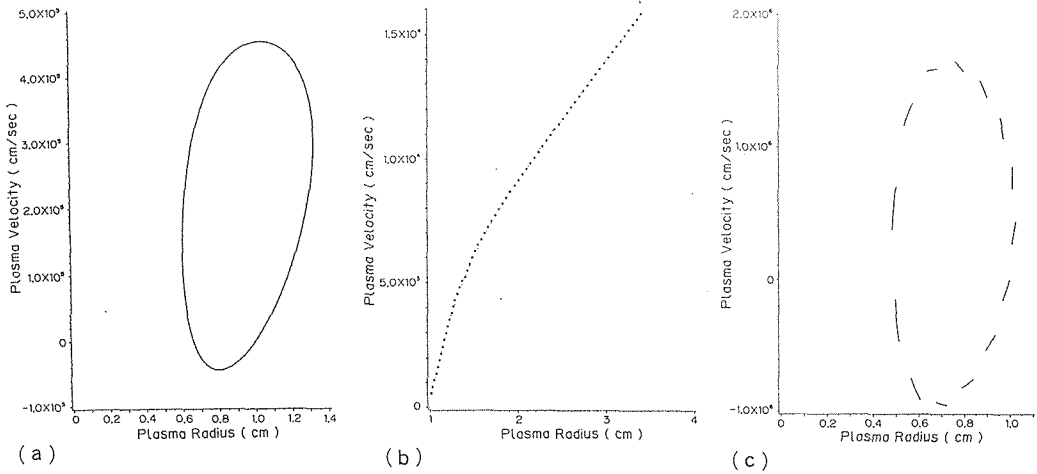


図4 ボアンカレ・マップ ((a), (c): 2000 点プロット (b) 40 点プロット)

パラメータ (α/ω , ϵ_b) (a): (0.5, 1.0), (b): (1.0, 0.02), (c): (2.3, 2.1)

4-2. 計算結果

数値解析の代表例として、パラメータ $(\alpha/\omega, \epsilon_0) = (0.5, 1.0), (1.0, 0.02), (2.3, 2.1)$ の場合についてプラズマ半径の時間変化、プラズマ半径一速度位相空間図及び外部磁場振動周期を基準周期としたポアンカレ・マップをそれぞれ図2～図4に示す。

得られた解の中で前述の初期値から出発し、外部磁場の2000周期分の経過時間内において有限な値を保持する解を安定解、解が発散してしまうものを不安定解と定義する。安定解は、パラメータが $(\alpha/\omega, \epsilon_0) = (0.5, 1.0), (2.3, 2.1)$ の場合でポアンカレ・マップより表1から前者は2種類の周波数より構成される概周期振動、後者は3種類以上の周波数より構成される概周期振動を呈することがわかる。概周期振動については次節において詳説する。パラメータ $(\alpha/\omega, \epsilon_0) = (1.0, 0.02)$ は、不安定解の例である。

次に、パラメータ範囲 $0 \leq \alpha/\omega \leq 3, 0 \leq \epsilon_0 \leq 3$ における解について求めた安定-不安定境界曲線を図5に示す。安定解は調査したパラメータ範囲では全て概周期振動となる。安定-不安定境界曲線近傍の安定解はポアンカレ・マップが最初の数百周期にわたり奇妙な図形となる場合がある

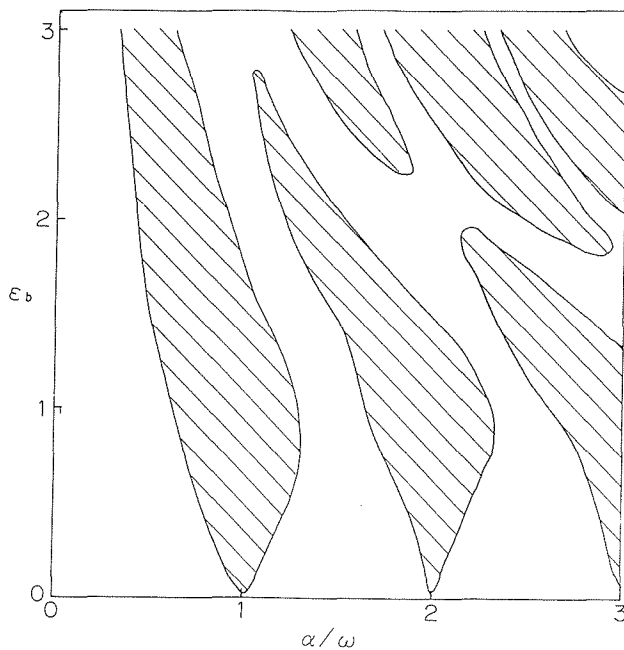


図5 解の安定-不安定境界曲線
(ハッチング領域は不安定領域であり、それ以外は安定領域である)。

表2 振動の種類

周 期 解	高 調 和 振 動	$(f_0 = mf)$
	垂 調 和 振 動	$(f_0 = f/n)$
	分数調和振動	$(f_0 = mf/n)$
非 周 期 解	概 周 期 振 動	$(f_0/f : \text{無理数})$
	カオス振動	

f_0 : ある力学系の固有振動周波数

f : 外力の強制振動周波数

m, n : 互いに素の自然数

(図4参照)。また、 ϵ_0 の微小な領域においては解はN G eq. 解に漸近することが予想されるが、 α/ω が整数比となる場合は解が不安定になることがわかる。

4-3. スペクトル解析による径方向振動周波数の推定

微分方程式の安定な振動解について議論するため、単振動に強制振動が加わった場合の微分方程式を例にとる。系の固有振動周波数と強制振動周波数の比により、振動現象の分類が可能である。これにカオス振動を加えて一般的な振動の分類を表2に示す⁹⁾。

概周期振動は、一般に相互の周波数比が無理数となるような周波数をもった項の重ね合わせにより生じる振動である。非線形微分方程式においては線形の場合とは異なり(パラメトリック励振系を除く)安定な非周期解を呈する場合がある。その場合には、概周期振動とカオス振動の識別が重要になる。

両者の識別法としては前述したポアンカレ・マップも有効な手段であるが、ここではスペクトル解析による識別を取り上げ、前節に示した数値解のスペクトルについて考察する。概周期振動とカオス振動のフーリエ・スペクトルの相違点は、前者が複数の鋭いスペク

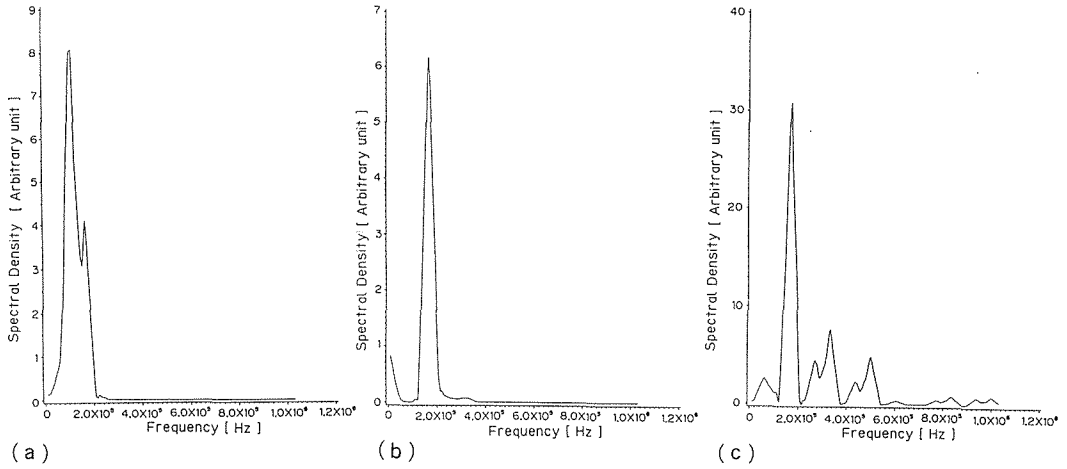


図6 プラズマ半径のスペクトル密度

パラメータ (α/ω , ϵ_b) (a) : (0.5, 1.0), (b) : (1.0, 0.02), (c) : (2.3, 2.1)

トルになるのに対し、後者のスペクトルは広い周波数範囲の連続スペクトルになることである。具体例として先に示したプラズマ半径の時間変化のフーリエ・スペクトルを図6に示す。ポアンカレ・マップによりこれらの例が概周期振動の定義に該当することは明らかであるが、図6より明らかなようにスペクトルに幅が見られる。この理由の一つとして、N G eq. の解が厳密な正弦波ではないためその解に対して変調された M N G eq. の解も正弦波の重ね合わせとしては十分に表現されないためと考えられる。各例とも外部磁場振動周波数に優勢なピークがあり径方向振動が外部磁場振動に大きく依存していることがわかる。パラメータ (α/ω , ϵ_b) = (2.3, 2.1) の場合、外部磁場が時間変動しない場合の径方向固有振動周波数 (383 kHz) の他にその2倍高調波及び1 MHz 近傍の高周波も発生しており前者は Schuurman⁵⁾ の解析と一致し、後者は磁場の最大圧縮の際に生じる磁場の異常隆起現象¹⁰⁾ との関連を予想させる。このように、外部磁場が時間変動することにより種々の径方向振動モードが励起されることが推測される。

4-4. 共鳴効果

これまでの結果で特定のパラメータ領域では不安定な解が得られることがわかったが (図5参照), その原因を解明するため線形解析を行った。

外部磁場 B_e , 内部磁場 B_i , プラズマ半径 r を

$$\begin{aligned} B_e &= B_b + B_M \\ B_i &= B_b + B_1 \\ r &= r_e + r_1 \quad (B_b, r_e \text{ は定数}) \end{aligned} \quad (15)$$

とおき, B_M , B_1 , r_1 を微小量として式(2)を線形化すると,

$$M \frac{d^2 r_1}{dt^2} = \frac{2\pi}{\mu_0} B_b r_e (B_1 - B_M) \quad (16)$$

となる。また、式(3)も同様に線形化すると次のようになる。

$$\pi (B_b r_e^2 + 2B_b r_e r_1 + B_1 r_e^2) = \Phi = \text{const.} \quad (17)$$

式(16), 式(17)より次のような微分方程式を導ける。

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \alpha^2 r_1 = \frac{2r_0 \alpha^2}{B_0} \left(\frac{\Phi}{\pi r_0^2} - B_0 - B_M \right) \quad (18)$$

但し、 α は式(6)で定義されている角周波数である。

式(18)において B_M の振動周期と α が等しい場合、解は共鳴を起こす。共鳴を起こした場合の解の時間発展は数値解析に頼らざるをえないが、図 2-(b)とこの線形解析の結果より、 ϵ_0 の微小な領域において α/ω が整数比となる場合の解が不安定になるのは共鳴によるものと結論づけられる。 ϵ_0 の大きな領域についての解の不安定性については現在検討中である。

この結果は共鳴効果を有効に利用できれば、プラズマ半径の増大化が可能となることを示唆している。また、同様の線形解析がプラズマ導電率が有限の場合でも可能であり、現在解の時間発展を調べるため数値解析を行っている。

5. 結 論

外部磁場が時間的に変動する場合のプラズマの径方向振動現象について M N G eq. を数値解析し以下の知見を得た。

- (1) 安定な径方向振動は概周期振動を呈する。スペクトル解析の結果より、径方向振動は種々のモードから構成されていることがわかった。外部磁場振動が振動モードとして優勢な場合、プラズマ径方向固有振動及びその倍振動を含む種々のモードが励起されると予想できる。
- (2) 径方向振動の安定不安定境界曲線を得た。 ϵ_0 の微小な領域において M N G eq. の解は N G eq. の解に漸近することが予想されるが、径方向振動周波数と外部磁場振動周波数が整数比となる場合には不安定となる。その理由として共鳴効果が考えられ、摂動法を用いた線形解析により説明可能である。

最後に、本研究を遂行するにあたり、阿部 寛教授（原子工学科量子計測工学講座）及び榎戸武揚助教授（瞬間強力パルス状放射線発生装置研究室）には貴重な御指導、御援助を賜りました。また、作図等で御協力頂きました本研究室の中村直人君に感謝申し上げます。

付録一変換理論について

解の時間的挙動を追跡する際、横軸を距離、縦軸を速度にとった位相空間図に解をプロットすると定性的な様子が明確になる場合がある。ここでは、それを一歩進めた解の位相的性質を大域的に調べるための変換理論¹¹⁾について触れる。

式(13)において、 $t=0$ のとき $r-v$ 平面上の任意の点 $P_0 (r_0, v_0)$ を通る解を $(r(r_0, v_0, t), v(r_0, v_0, t))$ とする。ここで、

$$r_n = r(r_0, v_0, nL), \quad v_n = v(r_0, v_0, nL); \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

L : 外部磁場振動周期

とおけば、 $r-v$ 平面上の点 $P_0 (r_0, v_0)$ を点 $P_n (r_n, v_n)$ へ移す変換 T

$$P_n = T^n P_0 \quad (19)$$

が定義される。

このようにして定義された変換 T は、微分方程式の解の性質より一対一で、向きを変えない連続変換であることが知られている。 $r-v$ 平面上の変換 T によって不変な点、すなわち $P_0 = P_1 (= T P_0)$ を不動点と呼び、 $P_0 \neq P_i$ ($i=1, 2, \dots, m-1$) で $P_0 = P_m (= T^m P_0)$ なる点を m 周期点と呼ぶ。更に、 m 個の周期点の集合を周期群と呼ぶ。

参考文献

- 1) Y. Ito, K. Kawasaki et al.: Jpn. J. Appl. Phys., 18(1979), 11, p. 212.
- 2) M. Mimura, K. Hirano: J. Phys. Soc. Jpn., 44(1978), 1, p. 309.
- 3) G. B. F. Niblett, T. S. Green: Proc. Phys. Soc., 74 (1959), p. 737.
- 4) H. A. B. Bodin, B. McNamara: Plasma Physics., 9 (1967), p. 505.
- 5) W. Schuurman: Rijnhuizen Report 68-48 (1968).
- 6) N. M. McLachlan: *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford (1947).
- 7) 谷津, 岩松他: プラズマ核融合学会第4回秋期講演会予稿集, (1987), p. 120.
- 8) F. C. Moon: *Chaotic Vibration*, Wiley and Sons (1987).
- 9) 佐藤: 非線形振動論 (基礎物理学シリーズ2), 朝倉書店 (1970) .
- 10) 小城, 吉村他: 九大工学集報, 59 (1986), 3, p. 225.
- 11) 林, 上田: 信学論, 53-A (1970) , p. 150.