



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ポテンシャル法による補間曲面ソリッドのCSG表現化に関する研究
Author(s)	城間, 祥之; Shiroma, Yoshiyuki; 三原, 和博 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 147, 19-33
Issue Date	1989-07-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42196
Type	departmental bulletin paper
File Information	147_19-34.pdf



ポテンシャル法による補間曲面ソリッドの CSG 表現化に関する研究

城 間 祥 之* 三 原 和 博** 嘉 数 侑 昇

(平成元年 3 月 31 日受理)

A Study on the CSG Based Solid Modeling of Blending Surfaces by the Potential Method

Yoshiyuki SHIROMA*, Kazuhiro MIHARA**, and Yukinori KAKAZU

(Received March 31, 1989)

Abstract

This paper describes a method to represent blending surfaces using the CSG based solid modeling. As an implicit representation of surfaces is essential to handle the surfaces with the CSG modeling, the Potential Method is applied in this paper to define blending surfaces by implicit functions in 3-D orthogonal coordinate system. The method requires a couple of ordinary surfaces to be blended and their offset surfaces for calculation of the potential values. Functional equations between the potential values and the offset parameters are derived mathematically for PLANE, CYLINDER, CONE, and SPHERE in this paper. Computational algorithm based on this work has been developed and implemented in the CSG modeling system TIPS-1. According to these experiments, it is clear that work is effective for modeling the fillet volumes which round corners such as edges or vertices of the solid object shapes.

1. ま え が き

稜線, 交線, 及び頂点のような形状の角は, 複数の曲面が交差する部分に形成されるので組み合わせる曲面の種類及びその幾何学的位置関係により形が種々変化する。それ故, このような角を丸める場合の丸め部の曲面 (以下, フィレット曲面と呼ぶ) 形状は極めて複雑になり初等幾何形状だけでは表現できないことが多い。このためフィレット曲面の形状モデリングには, 関係する曲面を混ぜ合わせて (ブレンディング) 作る補間曲面が一般に用いられている。ところで, 補間曲面のコンピュータ内部での表現方法について考えてみると, 従来は, 対象とする曲面全体をいくつかの曲面パッチに分割し, これらをパラメトリック曲面式で表現する, いわゆる, サーフェスモデル表現法が適用されてきた^{1,2)}。これに対し, 初等幾何形状要素から成るプリミティブ・ソ

精密工学科精密機器学第一講座

*現在: 北海道東海大学工学部電子情報工学科勤務

**現在: 松下電器産業株式会社勤務

リッドの集合演算により要求形状をモデリングする、いわゆる、CSG 表現法³⁾では、補間曲面の表現は一部の単純な場合を除いて非常に困難である。その主な理由は、補間曲面を集合演算向き関数式により表現する方法が未だ確立されていないことにある。しかしながら、対象形状をより実物的にモデリングするためには補間曲面が必要不可欠であり、CSG 表現法でも補間曲面を取り扱えるようにすることが望まれている。そこで本研究では、コーネル大学の C. Hoffmann, J. Hopcroft らが提案しているポテンシャル法^{4,5)}と呼ばれる補間曲面表現法を適用し補間曲面の CSG 表現化を試みた。すなわち、ここでは、まず、ポテンシャル法を適用しフィレット曲面の CSG 向き関数式定義を行った。次に、関数式定義に必要なポテンシャル値と曲面の法線方向オフセット値との関係式を平面、円柱・円錐面、及び球面の場合について導出した。そして、これらのアルゴリズムを CSG ベースの CAD/CAM システム TIPS-1^{6,7)}に組み込み簡単な計算機実験を行ったので報告する。

2. 補間曲面関数式化問題

補間曲面の関数式化問題を具体的に論ずる前に、問題のもつ性質を明らかにし整理する意味で一般化問題を記述する。今、3次元直交座標系空間 (\mathbf{X} と記す)において二つの曲面 S_1, S_2 を想定し、それらが式(1)の関数で記述されるとする(図1参照)。

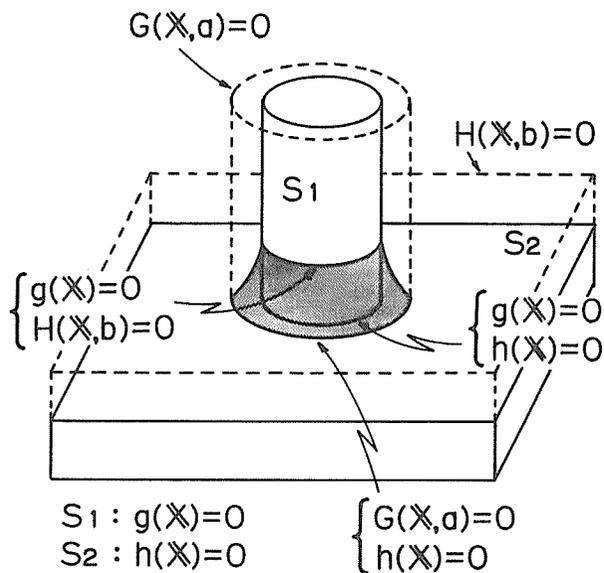


Fig. 1 Functional expression of related surfaces for defining the mathematical function of the blending surface

$$\left. \begin{array}{l} S_1 : g(\mathbf{X}) = 0 \\ S_2 : h(\mathbf{X}) = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

また、曲面 S_1, S_2 をその法線方向へオフセットした曲面は次のように表されるものとする。

$$\left. \begin{array}{l} S_{1\ off} : G(\mathbf{X}, a) = 0 \\ S_{2\ off} : H(\mathbf{X}, b) = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

ここで、変数 a, b はオフセット値とする。オフセット値がゼロの場合、オフセット曲面は当然、

元の曲面に一致するので次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} G(\mathbf{X}, 0) &= g(\mathbf{X}) \\ H(\mathbf{X}, 0) &= h(\mathbf{X}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

曲面 S_1, S_2 が交差するものとする、その交線は次の連立方程式を解くことによって得られる。

$$\left. \begin{aligned} g(\mathbf{X}) &= 0 \\ h(\mathbf{X}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

同様に、曲面 S_1, S_2 を混ぜ合わせて補間する場合の補間すべき範囲は次の二つの連立方程式で指定できる。

$$\left. \begin{aligned} G(\mathbf{X}, a) &= 0 \\ h(\mathbf{X}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} g(\mathbf{X}) &= 0 \\ H(\mathbf{X}, b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

すなわち、式(5)の解は曲面 S_2 上、式(6)の解は曲面 S_1 上の補間範囲を規定する。言い換えれば、式(5)の解は曲面 S_2 と補間曲面の接合線、同様に、式(6)の解は曲面 S_1 と補間曲面の接合線である。以上のように補間曲面の一部である接合線は記述できた。しかし、これらの式から補間曲面の関数式を直接導出することは困難である。そこで本研究では、ポテンシャル法を適用して補間曲面の関数式化を図る。

3. ポテンシャル法

3.1 稜・交線まわりフィレット曲面式

前節の関数式化問題を図2に示す関数平面 $g(\mathbf{X})-h(\mathbf{X})$ 上（ただし、 $g(\mathbf{X}), h(\mathbf{X})$ は平面上の軸とする）で考えると、上記の式(4), (5), (6)を解くことは、点 $(0, 0), (a_p, 0), (0, b_p)$

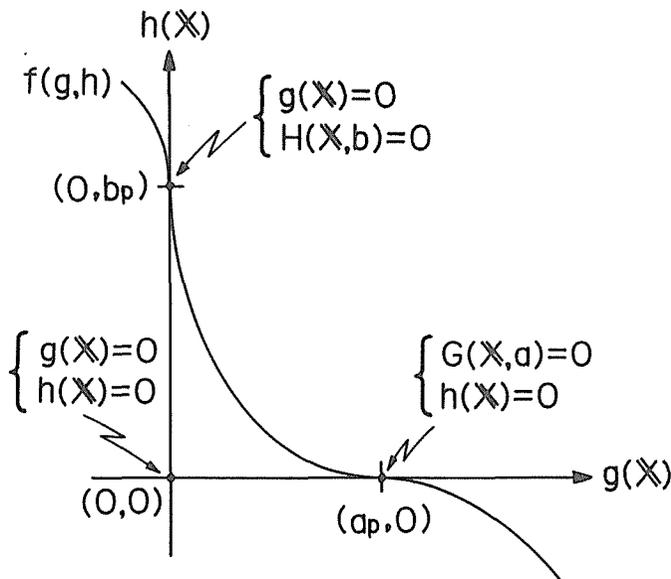


Fig. 2 Concept of the blending function $f(g, h)$ passing through the two points on the Functional Plane $g(x)-h(x)$

をそれぞれ求めることに相当し、同様に、曲面 S_1 , S_2 の補間曲面を関数式化することは、2点 $(a_p, 0)$, $(0, b_p)$ を通る関数を決定することに相当する。ただし、 a_p はオフセット曲面 $S_{1\text{off}}$ 上の点に対する元の曲面 S_1 の関数値、また、 b_p はオフセット曲面 $S_{2\text{off}}$ 上の点に対する元の曲面 S_2 の関数値とする。ポテンシャル法とは、この関数値（以下、これをポテンシャル値と呼ぶ）を利用して補間曲面を関数式化する方法である。これを前章の例で説明すると、オフセット曲面 $S_{1\text{off}}$ は曲面 S_1 に対してポテンシャル値 a_p （ただし、 $a_p \geq 0$ とする）を持ち、同様に、オフセット曲面 $S_{2\text{off}}$ は曲面 S_2 に対してポテンシャル値 b_p （ただし、 $b_p \geq 0$ ）を持つのでポテンシャル法では、オフセット曲面 $S_{1\text{off}}$, $S_{2\text{off}}$ は次のように定義される。

$$\begin{cases} S_{1\text{off}} : G(\mathbf{X}, a_p) \equiv g(\mathbf{X}) - a_p = 0 \\ S_{2\text{off}} : H(\mathbf{X}, b_p) \equiv h(\mathbf{X}) - b_p = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式 (2) のオフセット値とポテンシャル値は一般に関数関係にある。すなわち、

$$a_p = R_1(a), \quad b_p = R_2(b) \quad (8)$$

従って、式 (2) のオフセット値 a , b をポテンシャル値 a_p , b_p にそれぞれ置換して考えるとポテンシャル法においても一般式 (3), (4), (5), (6) は当然成立する。前述のように曲面 S_1 , S_2 の補間曲面を関数式化することは、関数平面 $g(\mathbf{X}) - h(\mathbf{X})$ 上において2点 $(a_p, 0)$, $(0, b_p)$ を通る関数を決定することと見なせるので補間曲面式には種々の初等幾何関数が適用可能である。例えば、2点 $(a_p, 0)$, $(0, b_p)$ を通り、点 $(1_p, b_p)$ を中心とする楕円の式を適用する場合は次式のようになる。

$$f(g, h) = \frac{\{g(\mathbf{X}) - a_p\}^2}{a_p^2} + \frac{\{h(\mathbf{X}) - b_p\}^2}{b_p^2} - 1 = 0 \quad (9)$$

式 (9) は2曲面 S_1 , S_2 の交線まわりの補間曲面として定義されたが実際には稜・交線まわりフィレット曲面を表す。

3.2 補間曲面と元の曲面との連続性

補間曲面と元の曲面との接合位置での連続性を吟味する。3次元直交座標系空間の座標は $\mathbf{X} = (x, y, z)$ のように成分表示できるので補間曲面の関数式 (9) を x , y , z でそれぞれ微分すると、その微係数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2}{a_p^2} \{g(\mathbf{X}) - a_p\} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{2}{b_p^2} \{h(\mathbf{X}) - b_p\} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2}{a_p^2} \{g(\mathbf{X}) - a_p\} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{2}{b_p^2} \{h(\mathbf{X}) - b_p\} \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{2}{a_p^2} \{g(\mathbf{X}) - a_p\} \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{2}{b_p^2} \{h(\mathbf{X}) - b_p\} \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \quad (10)$$

ところで、式 (9) の補間曲面は $g(\mathbf{X}) = a_p$ 、すなわち、 $g(\mathbf{X}) - a_p = 0$ の曲面上では、

$$f(a_p, h) = h(\mathbf{X}) = 0 \quad (11)$$

となり、曲面 S_2 と一致し、同様に、 $h(\mathbf{X}) - b_p = 0$ の曲面上では、

$$f(g, b_p) = g(\mathbf{X}) = 0 \quad (12)$$

となり、曲面 S_1 と一致するので両接合位置において C^0 級の接続が保証される。また、微係数については、 $g(\mathbf{X}) - a_p = 0$ の曲面上では式 (10) より、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{2}{b_p} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{2}{b_p} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -\frac{2}{b_p} \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となる。微係数の比をとると、次式に示すように曲面 S_2 の微係数比と一致する。

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x} : \frac{\partial h}{\partial y} : \frac{\partial h}{\partial z} \right\} \quad (14)$$

これは、補間曲面が $g(\mathbf{X}) - a_p = 0$ の曲面上で曲面 S_2 と C^1 級のなめらかさで接続されることを意味する。同様に、 $h(\mathbf{X}) - b_p = 0$ の曲面上では次のようになり、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{2}{a_p} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{2}{a_p} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -\frac{2}{a_p} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial x} : \frac{\partial g}{\partial y} : \frac{\partial g}{\partial z} \right\} \quad (16)$$

補間曲面が曲面 S_1 と C^1 級のなめらかさで接続されるのは自明である。以上のように補間曲面式に楕円の式を適用した場合は補間曲面と元の曲面の接続は C^1 級のなめらかさが保証されるが、他の初等幾何関数を適用する場合はその限りではない。適用する関数ごとにその連続性を吟味する必要がある。

3.3 オフセット値とポテンシャル値の関係

曲面をその法線方向へオフセットした場合のオフセット値 a とポテンシャル値 a_p の関係式(8)

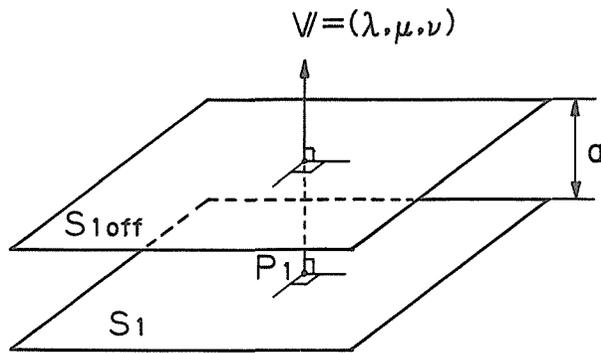


Fig. 3 Parameters for the original/offset surfaces:
PLANE

を平面、円柱・円錐面、及び球面について導出する。便宜上、オフセット曲面を $S_{1\ off}$ 、元の曲面を S_1 と記す。

- (1) 平面の場合 (図3参照)

$$S_1 : \left. \begin{aligned} g(\mathbf{X}) &= \lambda(x-x_1) + \mu(y-y_1) + \nu(z-z_1) = 0 \\ \text{ただし, } (\lambda, \mu, \nu) &: \text{平面の単位法線ベクトル} \\ (x_1, y_1, z_1) &: \text{平面上の一点 } P_1 \text{ の座標} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

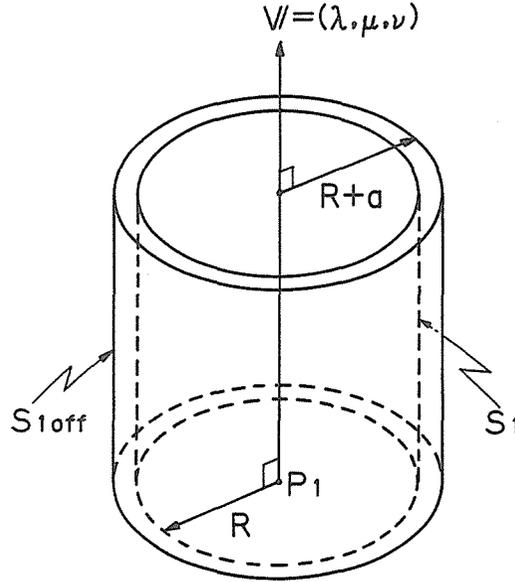


Fig. 4 Parameters for the original/offset surfaces: CYLINDER

$$S_{1off} : \left. \begin{aligned} G(\mathbf{X}, a) &= \lambda(x-x_1) + \mu(y-y_1) + \nu(z-z_1) - a = 0 \\ \therefore G(\mathbf{X}, a) &= g(\mathbf{X}) - a = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式 (7), 及び式 (18) より,

$$a_p = a \quad (19)$$

(2) 円柱面の場合 (図 4 参照)

$$S_1 : \left. \begin{aligned} g(\mathbf{X}) &= (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 \\ &- \{ \lambda(x-x_1) + \mu(y-y_1) + \nu(z-z_1) \}^2 \\ &- R^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ただし, (λ, μ, ν) : 円柱中心軸方向の単位ベクトル, R : 円柱半径

(x_1, y_1, z_1) : 円柱中心軸上の一点 P^1 の座標

$$S_{1off} : \left. \begin{aligned} G(\mathbf{X}, a) &= (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 \\ &- \{ \lambda(x-x_1) + \mu(y-y_1) + \nu(z-z_1) \}^2 \\ &- (R+a)^2 = 0 \\ \therefore G(\mathbf{X}, a) &= g(\mathbf{X}) - (2R \cdot a + a^2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式 (7), 及び式 (21) より,

$$a_p = 2R \cdot a + a^2 \quad (22)$$

(3) 円錐面の場合 (図 5 参照)

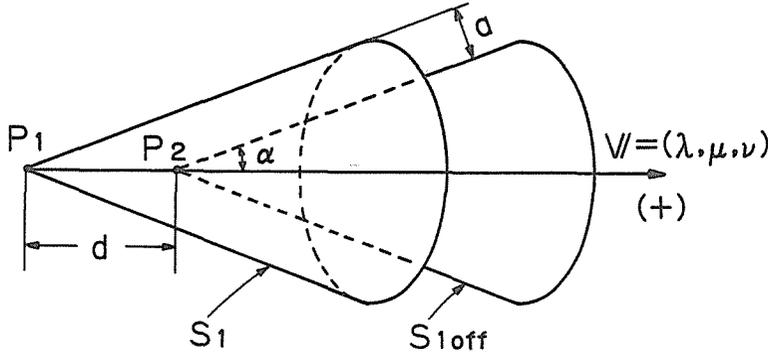


Fig. 5 Parameters for the original/offset surfaces: CONE

$$\begin{aligned}
 S_1 : g(\mathbf{X}) = & (1 + \tan^2(\alpha)) \{ \lambda(x - x_1) + \mu(y - y_1) \\
 & + \nu(z - z_1) \}^2 \\
 & - \{ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \} = 0
 \end{aligned} \quad (23)$$

ただし、 (λ, μ, ν) : 円錐中心軸方向の単位ベクトル
 (x_1, y_1, z_1) : 円錐の頂点 P_1 の座標, 2α : 円錐の頂角

円錐面をその法線方向へ a だけオフセットすることは、頂点を $d = |a/\sin(\alpha)|$ の距離だけ移動させることと同じである。移動後の頂点 P_2 の座標は、

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1 \pm \lambda \cdot d \\
 y_2 &= y_1 \pm \mu \cdot d \\
 z_2 &= z_1 \pm \nu \cdot d
 \end{aligned} \quad (24)$$

ただし、 $d = |a/\sin(\alpha)|$

ここで、符号の付け方は、頂点 P_1 から P_2 への移動が円錐中心軸の正方向へ向かう場合を正 (+) とし、その逆の場合は負 (-) とする。

$$\begin{aligned}
 S_{1 \text{ off}} : G(\mathbf{X}, a) = & (1 + \tan^2(\alpha)) \{ \lambda(x - x_2) + \mu(y - y_2) \\
 & + \nu(z - z_2) \}^2 \\
 & - \{ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 \} = 0
 \end{aligned} \quad (25)$$

式 (24) を式 (25) に代入・整理し、式 (7) と比較すると次式が得られる。

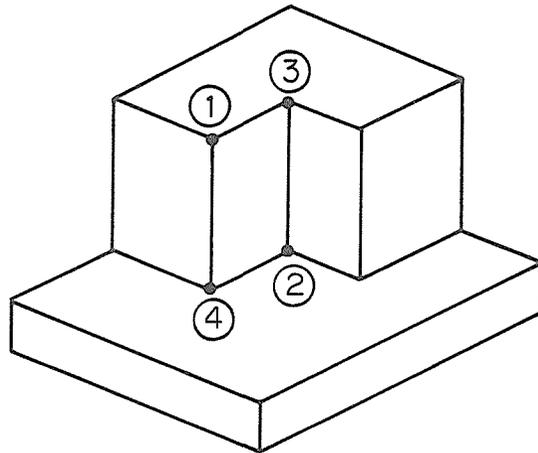
$$\begin{aligned}
 a_p = & \pm \{ 2d \cdot \tan^2(\alpha) \{ \lambda(x - x_1) + \mu(y - y_1) \\
 & + \nu(z - z_1) \} + d^2 \cdot \tan^2(\alpha) \}
 \end{aligned} \quad (26)$$

ただし、符号の付け方は、式 (24) に準じる。紙面の都合上、球面の場合は曲面式の記述は省略するがオフセット値とポテンシャル値の関係は円柱面の場合と同様、式 (22) で与えられる。

4. 頂点まわりフィレット曲面式

4.1 頂点の分類

頂点は3本以上の稜線によって構成されるため一般に頂点まわりフィレット曲面は稜線まわりフィレット曲面に比較して複雑な形状になる。しかも、この形状は頂点の形態により種々変化するのでこれを表現するには、あらかじめ頂点を類別化してそれに対応づけて個別に取り扱うが好ましい。ここでは、そのための分類を行う。稜線には形状の凸部分の角を構成するもの（以下、



- ① : 3 Convex Vertex
- ② : 3 Concave Vertex
- ③ : 2 Convex 1 Concave Vertex
- ④ : 2 Concave 1 Convex Vertex

Fig. 6 Types of vertex constructed by three edges

凸稜線と呼ぶ)と凹部分の角を構成するもの(凹稜線)がある。頂点はそこに集まる3本の稜線形態により次のように分類する(図6参照)。

- ① 凸稜線3本によってできる頂点(以下、3凸頂点と呼ぶ)。
- ② 凹稜線3本の集まる稜線(3凹頂点)。
- ③ 凸稜線2本と凹稜線1本によってできる頂点(2凸1凹頂点)。
- ④ 凹稜線2本と凸稜線1本の集まる頂点(2凹1凸頂点)。

4本以上の稜線が集まる頂点はここでは対象としない。

4.2 フィレット曲面式

前章において、稜線・交線まわりフィレット曲面式を定義するのに関数平面 $g(\mathbf{X})-h(\mathbf{X})$ を導入した。ここでは、これを空間に拡張する。すなわち、関数 g, h, q を3軸とする直交座標系空間を考え、この上で頂点まわりフィレット曲面式を定義する。便宜上、この空間を関数空間と呼ぶことにする(ただし、数学で言う関数空間とは異なる)。今、対象とする頂点は次式のように定義される3曲面 S_1, S_2, S_3 の交点として与えられるものとする。

$$\left. \begin{array}{l} S_1 : g(\mathbf{X})=0 \\ S_2 : h(\mathbf{X})=0 \\ S_3 : q(\mathbf{X})=0 \end{array} \right\} \quad (27)$$

頂点まわりフィレット曲面の形状が頂点形態により種々変化するのでフィレット曲面式を定義するためのオフセット曲面は頂点形態に基づいて設定する必要がある。紙面の都合上、ここでは3凸頂点、及び2凹1凸頂点の場合だけについてオフセット曲面の設定、及びフィレット曲面式の定義方法を記述する。

- (1) 3凸頂点の場合

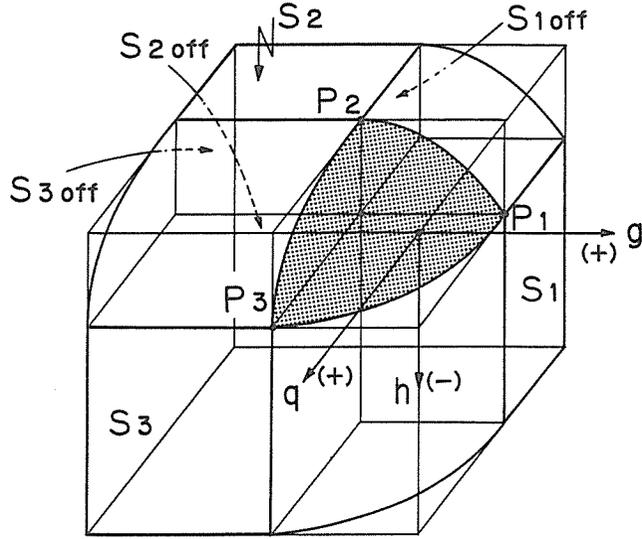


Fig. 7 The blending surface rounding the 3 Convex Vertex

今、図7に示す3凸頂点の場合、頂点を構成する3曲面 S_1 , S_2 , S_3 をそれぞれの関数軸の負の方向へオフセットした曲面は次のように定義されたとする。

$$\left. \begin{aligned} S_{1\ off} : G(\mathbf{X}, a_p) &\equiv g(\mathbf{X}) + a_p = 0 \\ S_{2\ off} : H(\mathbf{X}, b_p) &\equiv h(\mathbf{X}) + b_p = 0 \\ S_{3\ off} : Q(\mathbf{X}, c_p) &\equiv q(\mathbf{X}) + c_p = 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ただし、 $a_p \geq 0, b_p \geq 0, c_p \geq 0$

3凸頂点まわりフィレット曲面を定義することは、関数空間上において3点 $(-a_p, -b_p, 0)$, $(-a_p, 0, -c_p)$, $(0, -b_p, -c_p)$ を通る関数を決定することと見なせる。適用可能な初等幾何関数には球、楕円球、トーラスや楕円トーラス等の関数式があるが、例えば、楕円球を適用する場合のフィレット曲面式 f_v は次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} f_v(g, h, q) &= \frac{\{g(\mathbf{X}) + a_p\}^2}{a_p^2} + \frac{\{h(\mathbf{X}) + b_p\}^2}{b_p^2} \\ &+ \frac{\{q(\mathbf{X}) + c_p\}^2}{c_p^2} - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

このフィレット曲面に接合する三つの稜線まわりフィレット曲面 f_{e1} , f_{e2} , f_{e3} は、

$$f_{e1}(g, h) = \frac{\{g(\mathbf{X}) + a_p\}^2}{a_p^2} + \frac{\{h(\mathbf{X}) + b_p\}^2}{b_p^2} - 1 = 0 \quad (30)$$

$$f_{e2}(g, q) = \frac{\{g(\mathbf{X}) + a_p\}^2}{a_p^2} + \frac{\{q(\mathbf{X}) + c_p\}^2}{c_p^2} - 1 = 0 \quad (31)$$

$$f_{e3}(h, q) = \frac{\{h(\mathbf{X}) + b_p\}^2}{b_p^2} + \frac{\{q(\mathbf{X}) + c_p\}^2}{c_p^2} - 1 = 0 \quad (32)$$

フィレット曲面式(29)の微係数を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial x} &= \frac{2}{a_p^2} \left\{ g(\mathbf{X}) + a_p \right\} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{2}{b_p^2} \left\{ h(\mathbf{X}) + b_p \right\} \frac{\partial h}{\partial x} \\ &\quad + \frac{2}{c_p^2} \left\{ q(\mathbf{X}) + c_p \right\} \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial y} &= \frac{2}{a_p^2} \left\{ g(\mathbf{X}) + a_p \right\} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{2}{b_p^2} \left\{ h(\mathbf{X}) + b_p \right\} \frac{\partial h}{\partial y} \\ &\quad + \frac{2}{c_p^2} \left\{ q(\mathbf{X}) + c_p \right\} \frac{\partial q}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial z} &= \frac{2}{a_p^2} \left\{ g(\mathbf{X}) + a_p \right\} \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{2}{b_p^2} \left\{ h(\mathbf{X}) + b_p \right\} \frac{\partial h}{\partial z} \\ &\quad + \frac{2}{c_p^2} \left\{ q(\mathbf{X}) + c_p \right\} \frac{\partial q}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

頂点まわりフィレット曲面 \mathbf{f}_v と元の曲面 S_1, S_2, S_3 , 及び稜線まわりフィレット曲面 $\mathbf{f}_{e1}, \mathbf{f}_{e2}, \mathbf{f}_{e3}$ の接合点・線での連続性を吟味する。式 (29) において,

$$\mathbf{f}_v(-a_p, -b_p, q) = \frac{\{q(\mathbf{X}) + c_p\}^2}{c_p^2} - 1 = 0 \text{ より, } q(\mathbf{X}) = 0 \quad (34)$$

$$\mathbf{f}_v(-a_p, h, -c_p) = \frac{\{h(\mathbf{X}) + b_p\}^2}{b_p^2} - 1 = 0 \quad (35)$$

$$\mathbf{f}_v(g, -b_p, -c_p) = \frac{\{g(\mathbf{X}) + a_p\}^2}{a_p^2} - 1 = 0 \text{ より, } g(\mathbf{X}) = 0 \quad (36)$$

式 (34) より, 式 (29) のフィレット曲面は, 曲面 $g(\mathbf{X}) + a_p = 0$ と曲面 $h(\mathbf{X}) + b_p = 0$ の交線上において, $q(\mathbf{X}) = 0$ の曲面と一致する。言い換えれば, 次の連立方程式,

$$\left. \begin{aligned} G(\mathbf{X}, a_p) &= 0 \\ H(\mathbf{X}, b_p) &= 0 \\ q(\mathbf{X}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

を解いて得られる接点 P_{t3} において曲面 S_3 と一致する。同様に, 式 (35), (36) より,

$$\left. \begin{aligned} G(\mathbf{X}, a_p) &= 0 \\ h(\mathbf{X}) &= 0 \\ Q(\mathbf{X}, a, c_p) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$\left. \begin{aligned} g(\mathbf{X}) &= 0 \\ H(\mathbf{X}, b_p) &= 0 \\ Q(\mathbf{X}, c_p) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

式 (29) のフィレット曲面は連立方程式 (38), (39) それぞれ解いて得られる接点 P_{t2}, P_{t1} で曲面 S_2, S_1 とそれぞれ一致する。これは, 接点 P_{t1}, P_{t2}, P_{t3} において C^0 級の接続が保証されることを意味する。次に微係数について調べてみる。例えば, 接点 P_{t3} では,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial x} &= \frac{2}{c_p} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial y} &= \frac{2}{c_p} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial z} &= \frac{2}{c_p} \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial x} : \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial y} : \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} : \frac{\partial q}{\partial y} : \frac{\partial q}{\partial z} \right\} \quad (41)$$

となり、曲面 S_3 の微係数比と一致する。これは、フィレット曲面 \mathbf{f}_v と曲面 S_3 が接点 P_{t3} で C^1 級のなめらかさで接続されることを意味する。他の接点 P_{t1} , P_{t2} でも同様である。さて、次に稜線まわりフィレット曲面との接続関係を見てみる。例えば、曲面 $q(\mathbf{X}) = -c_p$, すなわち、 $q(\mathbf{X}) + c_p = 0$ の曲面上では式 (29) のフィレット曲面は、

$$\mathbf{f}_v(g, h, -c_p) = \left\{ \frac{g(\mathbf{X}) + a_p}{a_p^2} + \frac{h(\mathbf{X}) + b_p}{b_p^2} - 1 = 0 \right\} \quad (42)$$

であるから、式 (30) に示す稜線まわりフィレット曲面 \mathbf{f}_{e1} と一致する。また、曲面 $q(\mathbf{X}) + c_p = 0$ 上ではフィレット曲面 \mathbf{f}_v の微係数は次式のようになり、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial x} &= \frac{2}{a_p^2} \left\{ g(\mathbf{X}) + a_p \right\} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{2}{b_p^2} \left\{ h(\mathbf{X}) + b_p \right\} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial y} &= \frac{2}{a_p^2} \left\{ g(\mathbf{X}) + a_p \right\} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{2}{b_p^2} \left\{ h(\mathbf{X}) + b_p \right\} \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial z} &= \frac{2}{a_p^2} \left\{ g(\mathbf{X}) + a_p \right\} \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{2}{b_p^2} \left\{ h(\mathbf{X}) + b_p \right\} \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

稜線まわりフィレット曲面 \mathbf{f}_{e1} の微係数と一致する。故に、頂点まわりフィレット曲面 \mathbf{f}_v と稜線まわりフィレット曲面 \mathbf{f}_{e1} は C^1 級のなめらかさで接続される。他の稜線まわりフィレット曲面 \mathbf{f}_{e2} , \mathbf{f}_{e3} とも C^1 級の接続が保証されるのは明白である。

(2) 2凹1凸頂点の場合

2凹1凸頂点については、フィレット曲面に楕円トーラスを適用する場合を例として記述する。今、 $g(\mathbf{X}) - h(\mathbf{X})$ 平面、または $q(\mathbf{X}) - h(\mathbf{X})$ 平面上に定義された楕円が h 軸に平行な軸 (h' 軸と記す) まわりに回転 (ただし、楕円軌道に沿って) してできる楕円トーラスを2凹1凸頂点まわり

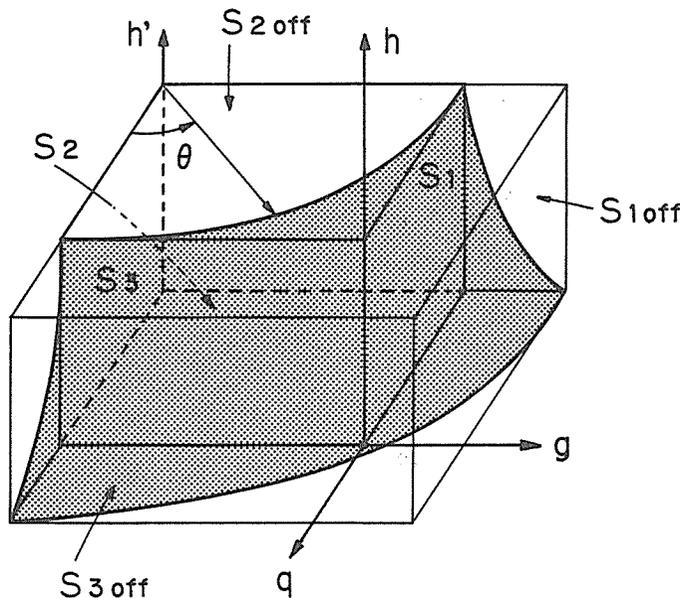


Fig. 8 The blending surface rounding the 2 Concave 1 Convex Vertex

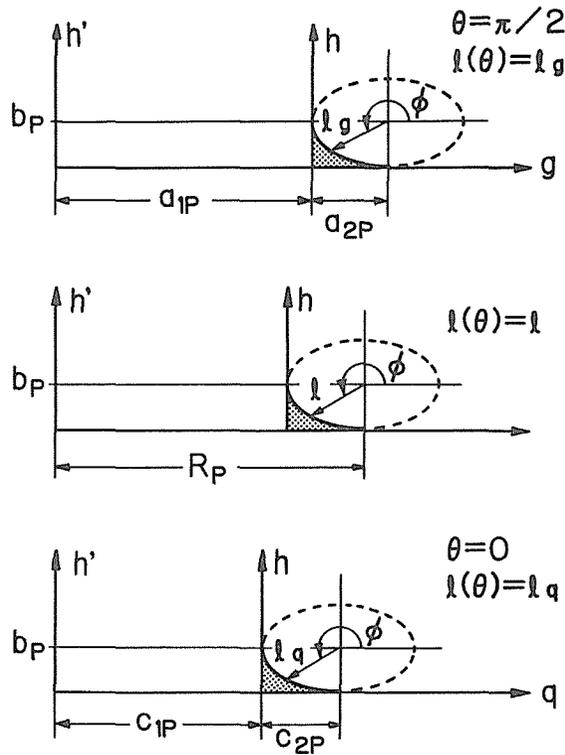


Fig. 9 Parameters on the g-h and the q-h planes for the blending surface rounding the 2 Concave 1 Convex Vertex

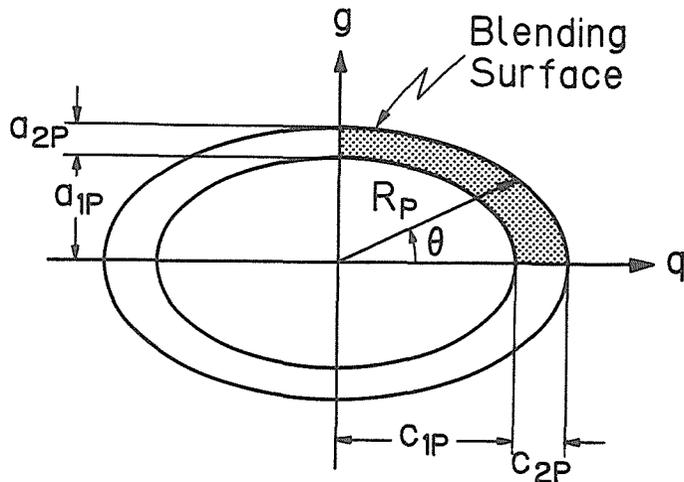


Fig. 10 Parameters on the q-g plane for the blending surface rounding the 2 Concave 1 Convex Vertex

に設定する(図 8 参照)。このとき、パラメトリックに定義される 2 凹 1 凸頂点まわりフィレット曲面式の g , h , q 各軸成分は次のようになる(図 9, 10 参照)。

$$\left. \begin{aligned} g &= \{R_p + l \cdot \cos(\phi)\} \cdot \cos(\theta) \\ h &= \{R_p + l \cdot \cos(\phi)\} \cdot \sin(\theta) \\ q &= l \cdot \sin(\phi) \\ \text{ただし, } 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ R_p &> l \cdot \cos(\phi) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

ここで、 θ は h' 軸まわりの回転角、 ϕ は楕円を定義する平面内での横軸(例えば、 g 軸、 q 軸)からのなす角である。 h' 軸上の回転中心から h' 軸まわりに回転する平面上の楕円の中心までの距離 R_p (回転半径と呼ぶ)は、

$$\left. \begin{aligned} R_p &= (a_{1p} + a_{2p}) \cdot (c_{1p} + c_{2p}) / d_R \\ \text{ただし, } d_R &= \sqrt{(a_{1p} + a_{2p})^2 \cdot \cos^2(\theta) + (c_{1p} + c_{2p})^2 \cdot \sin^2(\theta)} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

楕円の中心からその表面までの距離 l は、

$$\left. \begin{aligned} l &= l_q + 2\theta(l_g - l_q) / \pi \\ \text{ただし, } l_g &= a_{2p} \cdot b_p / \sqrt{b_p^2 \cdot \cos^2(\phi) + a_{2p}^2 \cdot \sin^2(\phi)} \\ l_q &= c_{2k} \cdot b_p / \sqrt{b_p^2 \cdot \cos^2(\phi) + c_{2p}^2 \cdot \sin^2(\phi)} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

ここで、 l_g は楕円の主軸のうち、 g 軸での軸半径、同様に l_q は q 軸での軸半径である。式(44)から θ , ϕ を消去すると次式が得られる。

$$f(g, h, q) = (\sqrt{g^2 + q^2} - R_p)^2 + h^2 - l^2 = 0 \quad (47)$$

これが 2 凹 1 凸頂点まわりのフィレット曲面式である。2 凹 1 凸頂点まわり、及び 2 凸 1 凹頂点

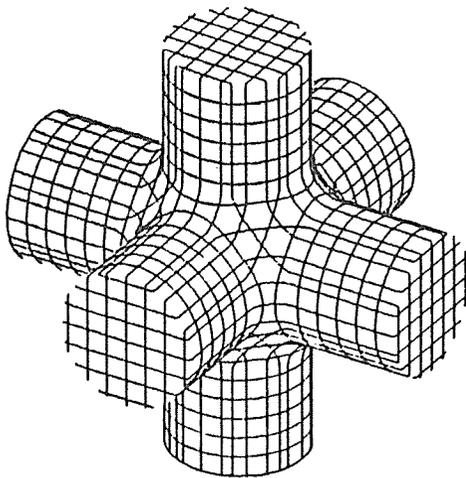


Fig. 11 Experimental result

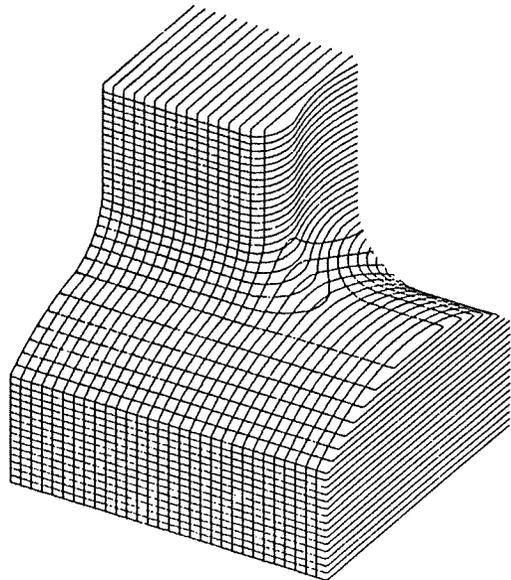


Fig. 12 Experimental result

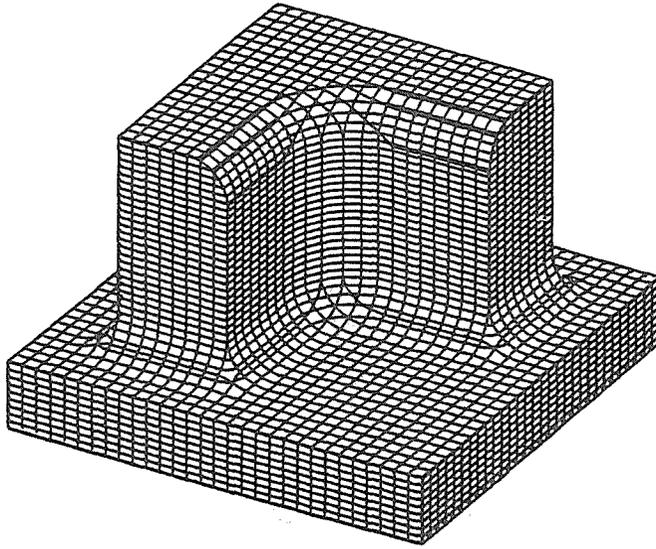


Fig. 13 Experimental result

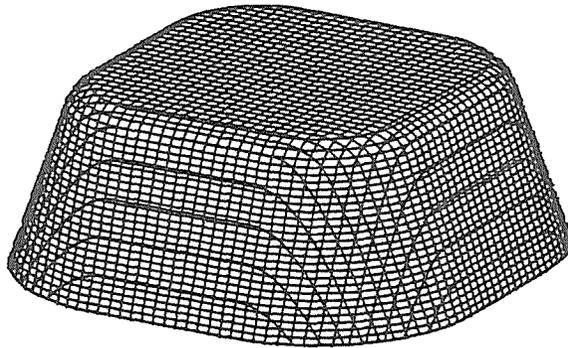


Fig. 14 Experimental result

まわりフィレット曲面は同一の曲面の外側，内側に割り当てることができるので式(47)は両フィレット曲面表現に適用できる。同様に，式(29)は3凹頂点まわりフィレット曲面に適用できる。

5. 実験結果

本手法の有効性を確認するため，導出したフィレット曲面式に基づくアルゴリズムをCSGベースのCAD/CAMシステム TIPS-1^{6,7)}に組み込み計算機実験を行った。結果の一部を図11から図14に示す。図11は直交する3本の円柱面にフィレット曲面を発生させた例であり，フィレット曲面には楕円球の一部が用いられている。図12は二つの円柱面と平面一つからなる2凹1凸頂点まわりフィレット曲面を創成したものである。3凹頂点まわり，及び2凸1凹頂点まわりフィレット曲面を使用した例は図13に示すが，これはバス・タブ(1/4モデル)形状をモデリングしたものである。また，図14は3凸頂点まわりフィレット曲面にトーラスの一部を使用しサラダ・ボール形状をモデリングしたものである。

6. 結 言

本研究をまとめると次のようになる

- (1) 補間曲面表現法の一つであるポテンシャル法を適用してフィレット曲面を CSG 表現法向きの関数式で定義する方法を明かにした。
- (2) フィレット曲面の関数式定義パラメータであるポテンシャル値と対象とする曲面の法線方向へのオフセット値との関係式を平面、円柱・円錐面、及び球面について導出した。
- (3) 一般の曲面とフィレット曲面との接合点・線における曲面の連続性を吟味し、 C^1 級のなめらかさで接続できることを明かにした。
- (4) 定義したフィレット曲面式が CSG 表現法で取り扱えることを計算機実験により確認した。

なお、平面、円柱・円錐面、及び球面以外の初等幾何曲面を持つプリミティブ・ソリッドが組み合わされる場合のフィレット曲面式、及びポテンシャル値とオフセット値との関係式等を定義・導出することが今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) 千代倉弘明：ソリッドモデリング，工業調査会（1985）。
- 2) 藤井省：N 辺ボカン面創成機能の開発，UNIVAC TECHNOLOGY REVIEW, VOL. 16, FEB. (1988)15.
- 3) 沖野教郎：自動設計の方法論，養賢堂（1982）。
- 4) Christoph Hoffmann and John Hopcroft：Automatic surface generation in computer aided design, The Visual Computer, Vol.1(1985) 92.
- 5) Christoph Hoffmann and John Hopcroft：Quadratic blending surfaces, Computer-aided design, Vol. 18, No. 6 (1986) 301.
- 6) 沖野教郎，嘉数侑昇，久保洋：自動設計プロセッサ TIPS-1 の開発，精密機械，Vol. 44, No. 3 (1978) 37.
- 7) 城間祥之，渡部広一，嘉数侑昇，沖野教郎：フィレットの CSG 表現法に関する研究——二次曲面間相貫線まわりの場合——，精密工学会誌，Vol. 53, No. 2 (1987) 308.