



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	多項式を扱う近似処理の有効性・柔軟性の向上 : Chebyshev多項式係数の特性の活用
Author(s)	河口, 万由香; 伊達, 惇
Citation	北海道大學工學部研究報告, 147, 69-74
Issue Date	1989-07-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42198
Type	departmental bulletin paper
File Information	147_69-74.pdf



多項式を扱う近似処理の有効性・柔軟性の向上 —— Chebyshev 多項式係数の特性の活用

河 口 万由香 伊 達 惇
(平成元年 3 月 31 日受理)

Efficiency and Flexibility in Processing Polynomial Approximation —— Application of the Properties of Chebyshev Polynomial Coefficients

Mayuka F. KAWAGUCHI and Tsutomu DA-TE
(Received March 31, 1989)

Abstract

In this paper, certain properties in regard of Chebyshev polynomials have been elucidated, and utilized in estimation of computational errors in numerical methods by means of Chebyshev polynomials. These properties can be applied to estimating errors in evaluation of the polynomials. The estimation formulae we have derived are concerned with summations of the absolute values of Chebyshev coefficients and their derivatives, and are shown to be sufficiently effective by the numerical experiments in the sense that they are coincident with practical behaviors of the errors.

We show our estimation formulae with respect to computational errors in evaluating Chebyshev polynomials in Section 3, and the result of their efficiency test in Section 4.

1. ま え が き

近年、コンピュータの高速化、高性能化に伴い、これまで実用的な時間で終了しなかった大規模な数値計算がスーパーコンピュータを用いて実行され、中・大型コンピュータで行われていた数値計算についてはパーソナルコンピュータやワークステーションでも可能となるなど、数値計算をめぐる多様な計算機環境が普及しつつある。さらに、基本的な数値計算手法についてはプログラムライブラリやパッケージが整備されつつあり、従来数値計算において必要不可欠であった計算量・記憶量・計算誤差などに関する問題についてはあまり注意を払わなくなる傾向がある。特に、計算誤差については、有効桁数を大きくとりさえすれば多くの実用上の問題は回避できるという考え方もあって関心が薄れている傾向があるが、最近、1960 年代に盛んに研究された誤差評価問題に新しい成果を加えて整理され⁴⁾、誤差問題の実用性が依然として強いことを示している。

著者らは、数値計算において重要な役割を果たす Chebyshev 多項式について、計算誤差評価という観点から有用な性質を導き、既知の性質とあわせて整理した¹⁾。本研究は、その性質のいくつ

かを, Chebyshev 多項式の計算における誤差評価問題に適用したもので, 実用的な成果が得られたので報告する次第である。

多項式の計算誤差については多くの研究がなされており, Chebyshev 多項式は, 定義域 $[-1, 1]$ に対して値域の絶対値の最大値が 1 以下であり, かつ偶関数か奇関数である多項式の中で, 最も計算誤差の大きいものであることが証明されている⁷⁾。また Chebyshev 多項式を含む直交多項式は, それぞれ漸化式による計算が可能であり, 一般の多項式計算アルゴリズムよりも精度が良いことが知られているが, 両者のアルゴリズムについて, 理論的な誤差評価は充分にはなされていない。多項式計算のような基本的算法は, より大規模かつ複雑な数値計算手法の中で繰り返し利用され, わずかな誤差が最終結果に多大な影響を及ぼす性質のものである。従って, このような算法の計算誤差を理論的かつ定量的に吟味することは, あらゆる形態の数値計算結果の信頼性を向上させる上で重要な課題である。

本論文では, 2 節において Chebyshev 多項式の係数および導関数に関する必要な性質について述べ, 3 節において Chebyshev 多項式の計算誤差を理論的に評価し, 4 節において簡単な数値例による検証を行う。

2. Chebyshev 多項式の係数および導関数に関する性質の導出

本節では, 3 節における Chebyshev 多項式の計算誤差評価に必要な定理について述べる。

Chebyshev 多項式の定義および既知の基本的性質については省略する⁶⁾。以後, 本論文では n 次の Chebyshev 多項式を

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^n T_{nj} x^j \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (2.1)$$

と表す。式 (2.1) における Chebyshev 多項式の係数の絶対値 $|T_{ij}|$ は次式で表されることが知られている。

$$|T_{ij}| = \begin{cases} \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j/2-1} \{i^2 - (2k)^2\} & (i, j: \text{偶数}, j \neq 0) \\ \frac{i}{j!} \prod_{k=0}^{(j-1)/2} \{i^2 - (2k-1)^2\} & (i, j: \text{奇数}) \\ 1 & (i: \text{偶数}, j=0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (2.2)$$

また, α はつぎの定数を表す。

$$\alpha = \log_{10}(\sqrt{2} + 1) \quad (2.3)$$

[定理 1] Chebyshev 多項式係数の絶対値の和について次の関係が成り立つ。

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n/2} |T_{n-2j}| = (10^{\alpha n} + 10^{-\alpha n})/2 & (n: \text{偶数}) \\ \sum_{j=0}^{(n-1)/2} |T_{n-2j+1}| = (10^{\alpha n} - 10^{-\alpha n})/2 & (n: \text{奇数}) \end{cases} \quad (2.4)$$

(証明) 式 (2.2) より $\sum_{j=0}^n |T_{nj}|$ は次の式で表せる。

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n/2} |T_{n-2j}| = 1 + \sum_{j=1}^{n/2} \frac{1}{(2j)!} \prod_{k=1}^j \{n^2 - (2k-2)^2\} & (n: \text{偶数}) \\ \sum_{j=0}^{(n-1)/2} |T_{n-2j+1}| = n + \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{n}{(2j+1)!} \prod_{k=1}^j \{n^2 - (2k-1)^2\} & (n: \text{奇数}) \end{cases} \quad (2.5)$$

$$(x + \sqrt{1+x^2})^n = 1 + nx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^2(n^2-2^2)\cdots\{n^2-(2k-2)^2\}}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(n^2-1^2)\cdots\{n^2-(2k-1)^2\}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (2.6)$$

であること³⁾を用いて, $\{(x + \sqrt{1+x^2})^n + (-x + \sqrt{1+x^2})^n\}/2, \{(x + \sqrt{1+x^2})^n - (-x + \sqrt{1+x^2})^n\}/2$ を計算し, これに $x=1$ を代入し n が正整数であることを考慮して整理すると, 式 (2.4) が得られる。(証明終)

この定理は Reimer & Zeller⁷⁾ の式 (11) に相当するが, 本論文では全く別の証明を行った。式 (2.3) において 10^{-an} は n に対して急速に減少するので次式が成り立つ。

$$\sum_{j=0}^n |T_{nj}| \rightarrow 10^{an - \log_{10} 2} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.7)$$

[補題 1] n 次 Chebyshev 多項式の導関数 $T_n'(x) = \frac{d}{dx} T_n(x)$ は, 次のような Chebyshev 多項式の線形結合で示される。

$$T_n'(x) = \sum_{m=0}^{n-1} a_m T_m(x) \quad (2.8)$$

ただし係数 a_m は次式で与えられる。

$$a_m = \begin{cases} 0 & (n+m: \text{偶数}) \\ n & (n: \text{奇数 かつ } m=0) \\ 2n & (n+m: \text{奇数 かつ } m \neq 0) \end{cases} \quad (2.9)$$

(証明) Chebyshev 多項式に関する漸化式 $T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ の両辺を微分すると $T_n'(x)$ に関する次の関係式が得られる。

$$T_n'(x) = 2 T_{n-1}(x) + 2x T_{n-1}'(x) - T_{n-2}'(x) \quad (2.10)$$

$T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$, および式 (2.10) を用いて数学的帰納法を適用すると, 式 (2.8), (2.9) の成り立つことが示される。(証明終)

[定理 2] n 次 Chebyshev 多項式の導関数 $T_n'(x)$ について次式が成り立つ。

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n'(x)| = T_n'(1) = |T_n'(-1)| = n^2 \quad (2.11)$$

(証明) [補題 1] に示したように, $T_n'(x)$ は Chebyshev 多項式の線形結合で表され, その係数は非負であるから,

$$\begin{aligned} \max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n'(x)| &= \sum_{m=0}^{n-1} a_m \max_{-1 \leq x \leq 1} |T_m(x)| \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} a_m T_m(1) \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} a_m \end{aligned} \quad (2.12)$$

となり, [補題 1] の式 (2.9) を代入することにより式 (2.11) が得られる。(証明終)

3. Chebyshev 多項式計算の誤差評価式の導出

本節では, 次の二通りの計算法を用いた場合の Chebyshev 多項式計算の計算誤差を評価し, 比較を行う。

[計算法 1] 多項式係数をあらかじめ求めておき, その係数を用いて Horner 法⁸⁾ により計算す

表 1 Chebyshev 多項式計算における計算回数

	[計算法 1]		[計算法 2]
	n : 偶数	n : 奇数	$(n \geq 3)$
乗算	$\frac{n}{2} + 1$	$\frac{n+1}{2}$	$n-1$
加算	$\frac{n}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$n-2$

る。
[計算法 2] Chebyshev 多項式に関する漸化式⁶⁾を用いて計算する。この方法では多項式の係数は要しない。

Chebyshev 多項式は偶関数または奇関数であるので, [計算法 1], [計算法 2]を用いた場合の計算回数は, 表 1 に示すように [計算法 1]の方が少ない。しかし, [計算法 1]は交代級数であるため桁落ちが著しく, [計算法 2]は多項式の零点近傍で桁落ちを起こして相対誤差が悪化するという問題があるが, 漸化式の中ではその誤差が伝播しないため, [計算法 2]の方が精度が良いとされている。

以後, Δ は計算誤差を表すものとし, p 進 q 桁浮動小数点形式で計算する場合の計算誤差を理論的に評価する。

[定理 3] Chebyshev 多項式を [計算法 1] を用いて計算した場合の計算誤差の上限は次式で与えられる。

$$|\Delta T_n(x)| \leq (10^{an - \log_{10} 2} + n^2) p^{-q+1} + O(p^{-2(q-1)}) \quad (3.1)$$

(証明) $\Delta T_n(x)$ について次式が成り立つ。

$$\Delta T_n(x) = \sum_{j=0}^n \Delta T_{nj} x^j + \sum_{j=0}^n T_{nj} \Delta(x^j) + \sum_{j=0}^n \Delta T_{nj} \Delta(x^j) \quad (3.2)$$

ここで, 第 1 項は次のように評価できる。

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^n \Delta T_{nj} x^j \right| &\leq \sum_{j=0}^n |\Delta T_{nj}| \cdot |x^j| \\ &\leq p^{-q+1} \sum_{j=0}^n |T_{nj}| \end{aligned} \quad (3.3)$$

p 進 q 桁表示の数 $x \in [1, 1]$ については $|x| \leq p^{-q+1}$ である。また, $T_n(x)$ は偶関数または奇関数であるから, $\Delta(x^j)$ ($j = n, n-2, n-4, \dots$) は同符号となり, 式 (3.2) の第 2 項は, 次のように評価できる。

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^n T_{nj} \Delta(x^j) \right| &\leq \left| \sum_{j=0}^n T_{nj} jx \right| p^{-q+1} \\ &\leq |T_n'(1)| p^{-q+1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

式 (3.2) の第 3 項は p^{-q+1} の 2 乗のオーダーである。従って, 式 (3.3) に [定理 1], 式 (3.4) に [定理 2] の結果をそれぞれ代入して, 式 (3.2) を考慮すると式 (3.1) が得られる。(証明終)

この定理に相当する論述の一部分が文献 8) に見いだされる。本論文では独立変数 x の丸め誤差の影響も考慮に入れ, より厳密な誤差評価を行った。

[定理 4] Chebyshev 多項式を [計算法 2] により計算した場合の計算誤差の上限は次式で与えられる。

$$|\Delta T_n(x)| \leq p^{-q+1} \cdot n^2 + O(p^{-2(q-1)}) \quad (3.5)$$

(証明) $T_n(x + \Delta x)$ を Taylor 展開すると次式が得られる。

$$|\Delta T_n(x)| \leq |T_n'(x) \cdot \Delta x| + O(\Delta x^2) \quad (3.6)$$

p 進 q 桁表示の数 $x \in [-1, 1]$ については $|\Delta x| \leq p^{-q+1}$ であることおよび [定理 3] の結果を用いて式 (3.5) が得られる。(証明終)

[定理 3] および [定理 4] により, [計算法 1] を用いる場合の計算誤差は, Chebyshev 多項

式次数 n に対して指数関数的に増大し、[計算法 2]を用いる場合の計算誤差は n の 2 乗に比例するものであることが理論的に示された。

4. 誤差評価式の検証

前節で述べた二通りの計算法で計算した単精度 ($p=16$, $q=6$) の場合の Chebyshev 多項式の計算誤差 $|\Delta T_n(n)|$ を [定理 3], [定理 4] の結果と共に図 1 に示す。ただし, $x = \cos(\pi/162)$ とし, x の計算を倍精度で行った後, 単精度, 倍精度によってそれぞれ計算した $T_n(x)$ の差の絶対値を $|\Delta T_n(x)|$ とした。横軸に Chebyshev 多項式次数 n , 縦軸に計算誤差の対数値をとっており, 式 (3.1), (3.5) の結果をそれぞれ一点鎖線, 二点鎖線で, [計算法 1] および [計算法 2] による計算誤差をそれぞれプロット ● と ○ で示してある。

[定理 3] による誤差評価式 (3.1) と [計算法 1] による実験値は, n に対する増加率がほぼ一致している。また, [定理 4] による誤差評価式 (3.5) と [計算法 2] による実験値は非常に良く一致している。以上の観測結果は, 3 節における計算誤差評価方法の妥当性を示している。

実験値すなわちプロット ● と ○ を比較すると, この場合には, $n < 10$ の範囲では [計算法 1] の方がわずかに精度のよい値が得られているが, n が大きくなるにつれて, [計算法 1] による計算誤差は指数関数的に増大し, [計算法 2] による計算値の方が精度がよくなることが観察される。以上の事実は, 低次の Chebyshev 多項式の計算の際には, x の値によっては [計算法 1] の方が精度のよい場合が有り得ることを示している。3 節の理論的評価によると [計算法 2] の方が常に精度がよいことになるが, それにもかかわらず上述の現象が生じるのは, 式 (3.2) の第 1 項すなわち Chebyshev 多項式係数の丸め誤差の蓄積された部分が過大評価となっているためであると考えられる。

結果として, $n \geq 10$ の範囲では [計算法 2] の方がはるかに精度がよいこと, x の値によって計算誤差の値が大きく異なること, および [計算法 2] の計算誤差は非常に安定して見積りが容易であること等の理由により, 一般的には [計算法 2] の方が信頼性が高いといえる。

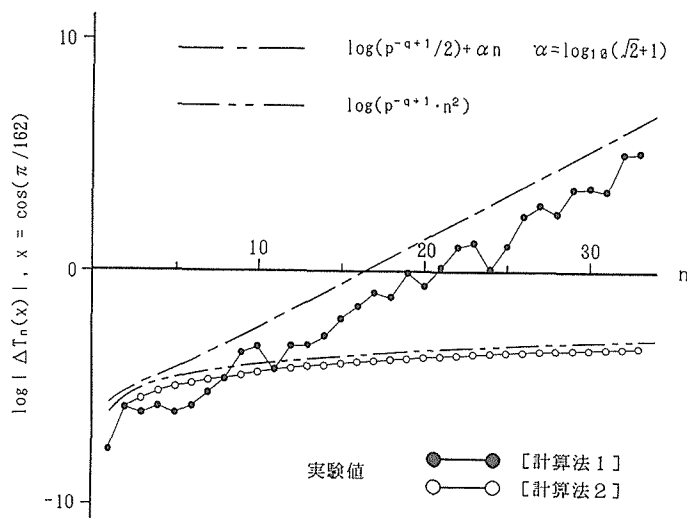


図 1 Chebyshev 多項式計算誤差 (単精度: $p=16$, $q=6$)

5. ま と め

Chebyshev 多項式係数の絶対値の和について [定理 1], および Chebyshev 多項式の導関数について [定理 2] の性質をそれぞれ導き, それらを用いて Chebyshev 多項式の計算誤差の理論的評価を行った。その結果, やや過大評価ではあるが誤差の挙動を極めてよく示す評価式が得られ, 二通りの計算法についての優劣を論じることができた。誤差評価式の中でも式 (3.1) が特に過大評価となった原因としては, 式 (3.3) において Cauchy-Schwarz の定理に基づき, 打ち消し合うはずの丸め誤差も含めて加算していることが挙げられ, 本研究で行ったような定量的誤差評価では避け難い障害である。

Chebyshev 多項式以外の直交多項式の係数や導関数などについても同様の性質を調べ, 多項式の計算および直交多項式近似などの数値計算手法の計算誤差の評価を行い, より信頼性の高い数値計算ライブラリの設計指針を与える理論的基礎を固めることを今後の課題と考えている。

文 献

- 1) 河口, 伊達: “チェビシェフ多項式係数の性質と最適補間多項式次数の決定について”, 電子情報通信学会論文誌 (投稿中)。
- 2) 河口, 伊達: “多項式による最小二乗近似の精度と多項式次数の関係について”, 電子情報通信学会論文誌, J70-A, (昭 62), 1, pp. 19-26.
- 3) 河口, 伊達: “Legendre 多項式近似誤差の拡大・縮小の様相について”, 北大工学部研究報告, 134, (昭 62), pp. 79-87.
- 4) F. Stummel: “Rounding Error Analysis of Elementary Numerical Algorithms”, Fundamentals of Numerical Computation, (1980), Springer-Verlag, pp. 169-195.
- 5) 森口, 宇田川, 一松: “数学公式 II”, (昭 32), 岩波書店.
- 6) 伏見, 赤井: “直交関数系”, (昭 56), 共立出版.
- 7) M. Reimer, K. Zeller: “Abschätzung der Teilsummen reeller Polynome”, Math. Zeitschr., 99, (1967), pp. 101-104.
- 8) M. Reimer: “Bounds for the Horner Sums”, SIAM J. Numer. Anal., 5, (1968), 3, pp. 461-469.