



Title	統計量を用いた樹枝状管網の状態推定
Author(s)	船水, 尚行; 高桑, 哲男
Citation	北海道大學工學部研究報告, 148, 33-40
Issue Date	1989-10-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42206
Type	departmental bulletin paper
File Information	148_33-40.pdf



統計量を用いた樹枝状管網の状態推定

船水 尚行 高桑 哲男

(平成元年 7 月 25 日受理)

Estimation of the State of a Tree-type Water Distribution Network by a Statistical Method

Naoyuki FUNAMIZU and Tetsuo TAKAKUWA

(Received July 25, 1989)

Abstract

In order to control a water distribution system, estimation of the state of the pipe network is required. The state of network having N nodes and J pipes can be specified by energy grade E and withdrawal rate P at each node and flow rate Q and pipe constant S in each pipe.

The present paper deals with the case when the hydraulic pressure alone at each node is monitored but P , Q and S are unknown in a tree-type network.

Statistical analysis of a network shows that the variance of withdrawal rate P at any node i calculated by the true values of pipe constants is minimal when the correlation coefficient between P at node i and the other node is 0. This special character of the variance provides an estimating method of pipe constants.

The validity of the method is confirmed by the Monte-Carlo simulation using a model network. The estimation error of the method is also discussed.

1. はじめに

節点数 N , 管路数 J の配水管網の状態は管径・管路長・流速係数より成る管路係数 S_j , 管路流量 Q_j ($j=1, 2, \dots, J$), 節点エネルギー位 E_i , 節点流出水量 P_i ($i=1, 2, \dots, N$) によって記述される。従来より提案されている管網の解析法¹⁾は N 本の節点方程式と J 本の管路流量式を用い、本来は未知扱いすべき S , P を既知として E , Q を計算するものであり、既存管網の配水コントロールや拡張設計には直接的に利用することができない。ここでは、管網の状態推定、すなわち各節点の流出水量や管路能力を推定する方法のひとつとして、全節点の動水位をモニターする場合²⁾をとりあげ、節点流出水量の変動にともなう各節点の動水位の変動データをもとに $2N+J$ 個の未知量 S_j , Q_j , P_i を推定する方法を樹枝状管網を対象に示す。

2. E の統計量を用いた S , Q , P の推定法

2-1 推定法 I — 逐次推定法

状態推定法の導出にあたり以下のような状況を設定する。

衛生工学科 下水工学講座

- (1) 動水位はエネルギー位によって代替でき、すべての節点のエネルギー位は既知である。
 - (2) 流出水量の総和は既知である。これにより、配水基地に接続する管路の管路係数が既知となる。
 - (3) 各節点の流出水量の変動は節点ごとに独立で節点間に相関はない。
- このような管網について配水基地より順次下流の管路の管路係数を推定する方法を考察する。

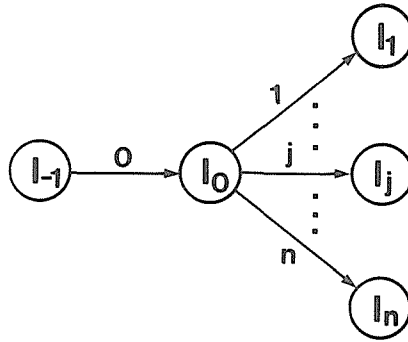


図1 節点と接続管路

図-1のように樹枝状管網の一部をとりだし、注目する節点を I_0 、上流の節点を I_{-1} 、下流の節点を $I_i (i=1, \dots, n)$ とする。また、これらの節点を接続する管路を図のように定める。図-1において既知の量は管路0の管路係数 S_0 、管路流量 Q_0 と M 組の各節点のエネルギー位のデータ $(E_{-1}, E_0, E_1, \dots, E_n)_k (k=1, \dots, M)$ であり、推定する量は管路係数 S_j 、管路流量 $Q_j (j=1, \dots, n)$ 、節点 I_0 の流出水量 P_0 である。

節点 I_0 の流出水量の真値を P_0^* 、推定値を P_0 、管路流量の真値を Q_j^* 、推定値を Q_j とすると、

$$\left. \begin{aligned} P_0^* &= Q_0 - \sum_{j=1}^n Q_j^* \\ P_0 &= Q_0 - \sum_{j=1}^n Q_j \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

の関係がある。よって P_0^* と P_0 の関係は

$$P_0 = P_0^* + \sum_{j=1}^n (Q_j^* - Q_j) \quad (2)$$

となる。ここで、指数型流量式に従って式(2)中の Q_j^* 、 Q_j がそれぞれ管路係数の真値 S_j^* 、推定値 S_j と節点エネルギー位 $E_j (j=0, 1, \dots, n)$ によって

$$\left. \begin{aligned} Q_j^* &= S_j^* |E_0 - E_j|^{a-1} (E_0 - E_j) \\ Q_j &= S_j |E_0 - E_j|^{a-1} (E_0 - E_j) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

と表現されたとすると、式(2)の P_0 は

$$P_0 = P_0^* + \sum_{j=1}^n (1 - S_j/S_j^*) Q_j^* \quad (4)$$

と表現される。式(4)を用いて P_0 の分散の推定値 $\overline{(P_0 - \bar{P}_0)^2}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \overline{(P_0 - \bar{P}_0)^2} = & \overline{(P_0^* - \bar{P}_0^*)^2} + \left\{ \sum_{j=1}^n (1 - S_j/S_j^*) (Q_j^* - \bar{Q}_j^*) \right\}^2 \\ & + 2 \sum_{j=1}^n (1 - S_j/S_j^*) \overline{(P_0^* - \bar{P}_0^*) (Q_j^* - \bar{Q}_j^*)} \end{aligned} \quad (5)$$

を得る。式(5)の右辺3項目の $\overline{(P_0^* - \bar{P}_0^*) (Q_j^* - \bar{Q}_j^*)}$ は節点 I_0 の流出水量と管路 j の流量の共分散の真値である。 Q_j^* は管路 j の下流の節点の流出水量の総和と等しく、各節点間の流出水量の変動が独立であることから、 Q_j^* と P_0^* の間には相関が存在しないことになる。すなわち、式(5)の右辺3項目は常に0となる。以上のことから、 $S_j/S_j^*=1$ すなわち管路係数の推定値が真値と一致するとき、節点 I_0 の流出水量の分散の推定値は最小になることがわかる。よって、管路係数 S_j は節点 I_0 の流出水量の分散の推定値を最小化することによって計算される。

既知の Q_0 の値と節点エネルギー位のデータを用いて節点 I_0 の流出水量の分散の推定値を表現すると

$$P_0 = Q_0 - \sum_{j=1}^n S_j |E_0 - E_j|^{a-1} (E_0 - E_j) \quad (6)$$

であることから

$$\begin{aligned} \overline{(P_0 - \bar{P}_0)^2} = & \overline{(Q_0 - \bar{Q}_0)^2} - 2 \sum_{j=1}^n S_j \overline{(Q_0 - \bar{Q}_0) (e_j - \bar{e}_j)} \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n S_j S_k \overline{(e_j - \bar{e}_j) (e_k - \bar{e}_k)} \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。ここで $e_j = |E_0 - E_j|^{a-1} (E_0 - E_j)$ であり、指数 a は流量式に固有の値である。よって

$$\partial \overline{(P_0 - \bar{P}_0)^2} / \partial S_j = 0 \quad (j=1, \dots, n)$$

すなわち、

$$\sum_{p=1}^n S_p \overline{(e_j - \bar{e}_j) (e_p - \bar{e}_p)} = \overline{(Q_0 - \bar{Q}_0) (e_j - \bar{e}_j)} \quad (8)$$

の線形 n 元連立方程式の根として $S_j (j=1, \dots, n)$ が計算される。管路流量は管路係数の推定値とエネルギー位のデータにより推定され、最後に節点 I_0 の流出水量が計算される。

2-2 推定法Ⅱ—直接推定法

2-1 で述べた推定法は配水基地より順次下流の管路係数を推定するものであり、図-2 に示す

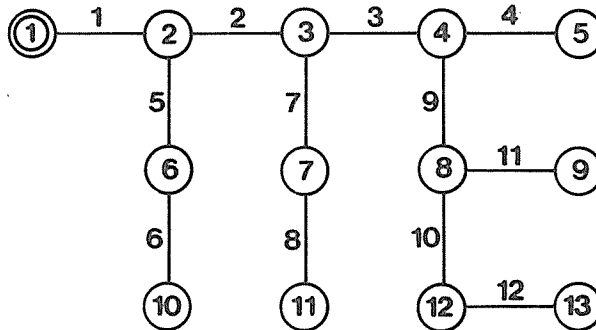


図2 計算対象管網

管網ではまず節点2に注目し、管路2，5の管路係数を推定し、続いて、節点3に注目し、管路2の管路係数の推定値を用いて管路3，7の管路係数を推定するという手順をとる。このため下流の管路の管路係数の推定においては推定誤差が蓄積する可能性がある。そこで、本節では上流の管路の管路係数の推定値を使用しないで特定の管路の管路係数を推定する方法を図-2の管網を対象として述べる。

図-2の管路9の管路係数の推定を考える。図-2の管網を管路9で切断し、上流の節点を一括して節点U，下流の節点を一括して節点Dとすると図-3のような簡略化された管網となる。



図3 管網の簡約化

節点Uの流出水量の真値を P_U^* ，推定値を P_U とすると

$$P_U = P_U^* + (1 - S_9/S_9^*)Q_9^* \quad (9)$$

の関係が成り立ち、 P_U の分散の推定値 $\overline{(P_U - \bar{P}_U)^2}$ は

$$\begin{aligned} \overline{(P_U - \bar{P}_U)^2} &= \overline{(P_U^* - \bar{P}_U^*)^2} + (1 - S_9/S_9^*)^2 \overline{(Q_9^* - \bar{Q}_9^*)^2} \\ &\quad + 2(1 - S_9/S_9^*) \overline{(P_U^* - \bar{P}_U^*)(Q_9^* - \bar{Q}_9^*)} \end{aligned} \quad (10)$$

となり、 P_U の分散の最小値が真値と一致することがわかる。そこで節点 P_U の流出水量の分散の推定値を既知の Q_1 の値と節点エネルギー位のデータを用いて表現すると

$$\overline{(P_U - \bar{P}_U)^2} = \overline{(Q_1 - \bar{Q}_1)^2} - 2S_9 \overline{(Q_1 - \bar{Q}_1)(e_9 - \bar{e}_9)} + S_9^2 \overline{(e_9 - \bar{e}_9)^2} \quad (11)$$

を得る。ここで $e_9 = |E_4 - E_8|^{a-1}(E_4 - E_8)$ である。よって S_9 は

$$\partial \overline{(P_U - \bar{P}_U)^2} / \partial S_9 = 0$$

すなわち、

$$S_9 = \overline{(Q_1 - \bar{Q}_1)(e_9 - \bar{e}_9)} / \overline{(e_9 - \bar{e}_9)^2} \quad (12)$$

として計算される。

2-3 推定誤差の評価

各節点の流出水量の変動が偶然性に支配されるように、管網の各節点のエネルギー位の測定を1日のうちのある特定の時刻に行う等の配慮をしても、流出水量の変動は節点ごとに完全に独立とはならない場合も予想される。そこで、以下では流出水量の変動が各節点間で相関をもつ場合の推定誤差について検討する。

(1) 逐次推定法の場合

ここでは図-2中の節点2に注目し、管路2，5の管路係数を推定する場合をとりあげる。

式(5)をそれぞれ S_2 ， S_5 で微分して0とおくと

$$\sigma_{0,2} + (1 - S_2/S_2^*)\sigma_{2,2} + (1 - S_5/S_5^*)\sigma_{2,5} = 0 \quad (13)$$

$$\sigma_{0,5} + (1 - S_5/S_5^*)\sigma_{5,5} + (1 - S_2/S_2^*)\sigma_{2,5} = 0 \quad (14)$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned}\sigma_{0,i} &= \overline{(P_2^* - \bar{P}_2^*)(Q_i^* - \bar{Q}_i^*)} \quad (i=2, 5) \\ \sigma_{j,p} &= \overline{(Q_j^* - \bar{Q}_j^*)(Q_p^* - \bar{Q}_p^*)} \quad (j=2, 5, p=2, 5)\end{aligned}$$

である。管路係数の推定では節点の流出水量の変動は独立であるとして、 $\sigma_{0,2}$, $\sigma_{0,5}$, $\sigma_{2,5}$ を 0 としたが、ここでは誤差の評価のためにこれらの共分散の値が 0 でないとし、式(13), (14)を満たす S_2 , S_5 を求めると

$$\frac{S_2}{S_2^*} = 1 + \frac{r_{0,2} - r_{2,5} r_{0,5}}{\frac{1 - r_{2,5}^2}{\textcircled{1}}} \frac{\sigma_{0,0}}{\frac{\sigma_{2,2}}{\textcircled{2}}} \quad (15)$$

$$\frac{S_5}{S_5^*} = 1 + \frac{r_{0,5} - r_{2,5} r_{0,2}}{1 - r_{2,5}^2} \frac{\sigma_{0,0}}{\sigma_{5,5}} \quad (16)$$

を得る。ここで、 $r_{0,2}$, $r_{0,5}$ はそれぞれ P_2^* と Q_2^* , Q_5^* の相関係数、 $r_{2,5}$ は Q_2^* と Q_5^* の相関係数、 $\sigma_{0,0}$ は P_2^* の分散である。式(15), (16)より、管路係数の推定値の相対誤差は注目節点の流出水量と管路流量の相関係数、管路流量間の相関係数の関係（式(15)右辺①項）と節点流出水量の分散と管路流量の分散の比（式(15)右辺②項）によって影響されることがわかる。

(2) 直接推定法の場合

ここでは図－2の管路9の管路係数の推定の際の誤差について計算する場合の式を示す。式(10)を S_9 で微分して 0 とおくことにより

$$\frac{S_9}{S_9^*} = 1 + r_{U,9} \frac{\sigma_{U,U}}{\sigma_{9,9}} \quad (17)$$

を得る。ここで $r_{U,9}$ は節点U（図－3参照）の流出水量と管路9の流量の相関係数、 $\sigma_{U,U}$ は節点Uの流出水量の分散である。

3. モデル管網による計算

計算の対象とした管網は前出の図－2に示すものを用い、管路長、流速係数はすべての管路についてそれぞれ $L=1000$ m, $C_H=140$ とし、管路係数の違いは管径で代表させた。表－1の真値の欄に設定した管径を示す。なお、節点1を配水基地とし、 $E_1=30$ m と一定とした。各節点の流出水量は以下の2とおりの方法によって設定した。

① case-1

各節点における流出水量は平均値 m , 標準偏差 σ として、 m , $m+\sigma$, $m-\sigma$ の3とおりの値をとるとし、 L_{27} (3¹³) 型直交表により27組のランダムな組合せをつくる。

② case-2

各節点の流出水量は case-1 と同様に平均値 m , 標準偏差 σ とし、各節点の流出水量間に相関がないような13変量の正規乱数を発生し^{3),4)}、3000組の流出水量の組合せをつくる。

case-1の方法では直交表の利用により、流出水量の変動は各節点間で完全に独立となるので、2章で提案した推定法の妥当性の検討に用いることとした。case-2の方法は、各節点間で流出水量の相関係数が完全に0とならないことを利用し、推定誤差の検討に用いた。表－2に各管路の平均流量、表－3に case-1の方法で使用した各節点の流出水量の値をそれぞれ真値の欄に示す。また、case-2の方法で作成した流出水量データの節点間の相関係数の値は $-0.035 \sim 0.053$ の範囲であった。

表1 管径D (m)

管路	真値	推定値
1	2.0	—
2	1.5	1.50000
3	1.2	1.20000
4	0.8	0.80000
5	0.8	0.80000
6	0.5	0.50000
7	1.0	1.00000
8	0.7	0.70000
9	0.9	0.90000
10	0.7	0.70000
11	0.6	0.59998
12	0.6	0.60000

表3 流出水量P (m³/s)

節点	m	真値	m+σ	m-σ	m	推定値	m+σ	m-σ
2	0.4	0.54142	0.25858	0.39999	0.54148	0.25357		
3	0.8	1.04495	0.55505	0.79999	1.04494	0.55505		
4	0.5	0.67321	0.32679	0.50001	0.67321	0.32680		
5	0.6	0.77320	0.42679	0.60000	0.77320	0.42679		
6	0.6	0.77320	0.42679	0.60001	0.77321	0.46680		
7	0.4	0.54142	0.25858	0.40000	0.54142	0.25858		
8	0.5	0.67321	0.32679	0.50005	0.67325	0.32684		
9	0.4	0.50000	0.30000	0.39996	0.49995	0.29996		
10	0.6	0.77320	0.42679	0.60000	0.77321	0.42680		
11	0.7	0.90000	0.50000	0.70000	0.90000	0.50000		
12	0.8	1.02361	0.57639	0.79999	1.02360	0.57639		
13	0.4	0.54142	0.25858	0.40000	0.54142	0.25858		

表2 平均流量Q (m³/s)

管路	真値	推定値
1	6.7	6.70000
2	5.1	5.10000
3	3.2	3.20001
4	0.6	0.60000
5	1.2	1.20001
6	0.6	0.60000
7	1.1	1.10000
8	0.7	0.70000
9	2.1	2.10000
10	1.2	1.19999
11	0.4	0.39996
12	0.4	0.40000

表4 管路係数S

管路	真値	推定値	逐次推定	直接推定
2	2.71719	2.69807	2.69531	
3	1.51094	1.51128	1.54333	
4	0.52015	0.51175	0.47910	
5	0.52015	0.52316	0.52354	
6	0.15111	0.15192	0.15526	
7	0.93541	0.94524	0.92881	
8	0.36611	0.37658	0.37232	
9	0.70902	0.70520	0.69670	
10	0.36611	0.35541	0.34158	
11	0.24408	0.24060	0.26564	
12	0.24408	0.21807	0.17634	

以上の方法で作成した流出水量のデータを用いて、管網解析によって各節点のエネルギー位を計算し、管網の状態推定のためのデータとした。

(1) 推定法の妥当性の検討

2-1 で示した逐次推定法を節点 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12 の順に適用して、管径、管路流量、流出水量の推定を行った。結果を表-1～3 中の推定値の欄に示す。また、2-2 で示した直接推定法を適用した結果は逐次推定法の推定結果と同じ値を与えた。真値と推定値は完全に一致しており、本方法の妥当性が確認された。

(2) 推定誤差の検討

case-2 の方法で作成したデータを用い、逐次推定法、直接推定法により図-2 の管網の各管路の管路係数を推定した結果を表-4 に示す。この場合には流出水量の変動に節点間でわずかの相関が存在するために、推定値は誤差を含んでいる。

逐次推定法における誤差の予測を各管路の管路係数の推定の場合に適用してみる。推定誤差を表現する式(15)中の①項、②項の値、相対誤差の予測値、実際の推定誤差を表-5 に示す。管路 2,

5の管路係数の推定では、管路1の真の管路係数値を用いており、相対誤差の予測式の妥当性を検討することが可能である。表－5より誤差の予測値と実際の誤差はよく一致していることがわかる。その他の管路では誤差の予測値と実際の誤差は一致せず、予測管路係数を用いて逐次下流の管路係数を推定したための誤差を含んでいる。

次に直接推定法における誤差について検討する。推定誤差を表現する式(17)中の節点Uと管路流量の相関係数部分を①項、分散の比の平方根の部分を②項とし、①項、②項の値、相対誤差の予測値、実際の推定誤差を表－6に示す。誤差の予測値と実際の誤差はよく一致しており、式(17)の誤差の推定の妥当性が示されている。

逐次推定法と直接推定法による誤差を比較すると、直接推定法の誤差のほうが大きくなっている。これは誤差に関係する表－5、6中の②項の値が直接推定法のほうが大きくなっていることによる。すなわち、直接推定法においては注目管路の上流の節点を一括して一つの節点とみなして計算しているため節点の流出水量の分散（式(17)中 $\sigma_{u,u}$ ）の値が大きくなることによっている。

表5 逐次推定法における誤差

管足	① 項	② 項	予想誤差	実際の誤差
2	－0.02742	0.2569	0.9930	0.9930
3	0.01205	0.6114	1.0074	1.0002
4	－0.01193	1.0109	0.9879	0.9839
5	0.01044	0.5551	1.0058	1.0058
6	0.00372	0.9918	1.0037	1.0054
7	0.01984	0.9943	1.0197	1.0105
8	0.02529	0.6822	1.0173	1.0286
9	－0.00600	0.5404	0.9968	0.9946
10	－0.02165	0.6677	0.9855	0.9708
11	－0.00188	1.7743	0.9967	0.9857
12	－0.03333	1.5656	0.978	0.8934

表6 直接推定法における誤差

管路	① 項	② 項	予想誤差	実際の誤差
2	－0.01506	0.5348	0.9920	0.9920
3	0.01895	1.1316	1.0214	1.0214
4	－0.02369	3.3299	0.9211	0.9211
5	－0.00658	2.2225	0.9854	0.9854
6	0.00841	3.2639	1.0275	1.0275
7	－0.00319	2.2059	0.9930	0.9929
8	0.00611	2.7755	1.0170	1.0170
9	－0.00109	1.5941	0.9826	0.9826
10	－0.0316	2.1502	0.9330	0.9330
11	0.01480	5.9681	1.0883	1.0883
12	－0.06663	4.1653	0.7225	0.7225

4. おわりに

樹枝状管網を対象に各節点のエネルギー位のデータより管路係数，管路流量，流出水量を推定する方法について検討し，以下の知見を得た。

- (1) 節点流出水量の分散の推定値と真値の関係を求め，分散の推定値の最小値が真値と一致することを示し，管路係数の推定法として逐次推定法（式(8)），直接推定法（式(12)）を導出した。
- (2) 管路係数の推定時の誤差を評価する関係式を示した。
- (3) モデル管網を用いた計算により，本推定法ならびに誤差の評価法の妥当性を確認した。

一般の網目状管網を対象にする場合や節点流出水量の変動に相関の存在する場合については今後の課題としたい。

参考文献

- 1) 高桑哲男：配水管網の解析と設計，森北出版
- 2) 高桑哲男，船水尚行：配水管網状態推定について，第40回全国水道研究発表会講演集(1989,5)
- 3) 宮武修，脇本和昌：乱数とモンテカルロ法，森北出版
- 4) 津田孝夫：多変数問題の数値解析，サイエンス社