HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	平面骨組構造物の固有振動解析と固有値の精度
Author(s)	林川, 俊郎; 佐藤, 康治; 角田, 與史雄
Citation	北海道大學工學部研究報告, 148, 1-15
Issue Date	1989-10-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42207
Type	departmental bulletin paper
File Information	148_1-16.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第148号（平成元年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 148 (1989)

平面骨組構造物の固有振動解析と固有値の精度

林川　俊郎*　佐藤　康治**　角田與史雄*

（平成元年7月25日受理）

Natural Vibration Analysis of Plane Frame Structures and Accuracy Investigation of Eigenvalues

Toshiro HAYASHIKAWA, Yasuharu SATO and Yoshio KAKUTA

(Received July 25, 1989)

Abstract

Three different mass matrix methods for determinig natural frequencies and mode shapes of plane frame structures are presented. One mass matrix method is the exact method based on the general solutions of the different equations of motion for both axial and flexural vibrations, and it is called the continuous mass method. The other two matrix methods are the lumped and consistent mass methods based on the approximate finite element approach. The mathematical relationship between the exact and approximate methods is discussed, and the accuracy of the eigenvalues obtained by three different mass matrix methods is investigated. Some typical continuous beams, arch bridges, and rigid-frame bridges are analyzed to illustrate the applicability of the lumped, consistent, and continuous mass methods, and the computed results are also given in tabular form.

1．まえがき

自然環境と橋梁構造物との調和を意識した美観上の問題点から，また，材料および架設方法の進歩により，広幅員の連続高架橋あるいは斜角のきつい方杖橋，アーチ橋等の施工例が数多く見受けられるようになってきた。さらに，構造物が大型化，長大化あるいは複合形式化されるにつれて，その構造物自身の有する固有振動性状はますます複雑になってきている。特に，構造物が非対称でかつ質量の中心点が大きく偏心しているような場合には，固有振動数（固有値）の接近が見られる。また，構造物の動的応答解析において，その用いられる解析手法によっては動的応答値にかなりの差異を生ずることが言われている。例えば，橋梁構造物の耐震設計にはモード解析によるRMS法あるいはSRSS法により最大応答値を算出してきたが，構造物の持つ固有振動持性によっては，その動的応答値を過大あるいは過小に評価してしまう場合がある[1]。

一般的に，構造物の動的応答性状は構造物に作用する外力（地震，風，走行荷重等の動的な外力）の持つ性質と構造物自身の固有振動性状，すなわち，固有振動数，固有振動モード，減衰定数等によって決定される。したがって，固有振動数および固有振動モードを低次から高次振動まで精度よく計算することは，構造物の動的設計および動的応答の評価を行う上で重要な課題であ

*土木工学科　構造工学講座
**現在　建設技術研究所

ると言える。

構造物の固有振動解析は大きく分けて，運動方程式の一般解を用いて動的な剛性マトリックスを誘導し，固有値を求める厳密解法（連続質量法）と，構造物の質量を多質点系に離散化し，有限要素法等を用いる近似解法（集中質量法あるいは整合質量法）との2通りがある。前者の連続質量法による最終的な振動数方程式は，固有値を含む種々の関数より構成された超越方程式となり，後者は一般的な固有値問題に帰着される。有限要素法等による振動解析が一般的に普及し，さらに，電子計算機の急進的な発展により数値計算が容易になった今日においても，構造物の要素分割数とその固有値の精度について数値解析的にかつ数学的立場から明確に検討した論文は少なかったように思われる。

そこで，本研究の目的は平面骨組構造物の中でも基本的な連続桁，アーチ橋およびVレッグラーメン橋を数値計算例として取り上げ，集中質量法，整合質量法および連続質量法により数値計算を行い，求められた固有値の精度について詳しく検討することである。また，必要とする精度を満たす固有振動モード次数と近似解法の要素分割数との関係について検討し，要素分割数の妥当性とその算定方法の提案がなされる。

2．固有振動解析

本研究で取り扱う平面骨組構造物は軸変形および曲げ変形を受ける骨組部材より構成されているものとする。すなわち，骨組部材は軸力，セン断力および曲げモーメントのみを受け，ねじり変形あるいは曲げねじり変形の影響はないものとする。また，平面骨組構造物の固有振動解析には一般的な変位法（有限要素法）を適用することにする。

骨組構造物の固有振動解析は，その構造物のモデル化によって，離散座標系（discrete coordinate system）による解と分布座標系（distributed coordinate system）による解に分類することができる[2),3)]。さらに，前者には部材要素の片側半分の質量と質量モーメントを両節点に等しく置換する集中質量法（lumped mass method）と軸変形には1次式および曲げ変形には3次式の変位関数を用いて部材要素の質量を分配する整合質量法（consistent mass method）による2通りの方法がある。後者には骨組構造物の質量および剛性等の力学的特性を連続的な分布量として取り扱う連続質量法（continuous mass method）がある。この解析方法はトラス部材（軸要素）あるいは桁部材（曲げ要素）の自由振動の基礎微分方程式の一般解を必要とするが，正確な固有値（厳密解）を求めることができる。一般的に，離散座標系による解は標準的な固有値問題に，分布座

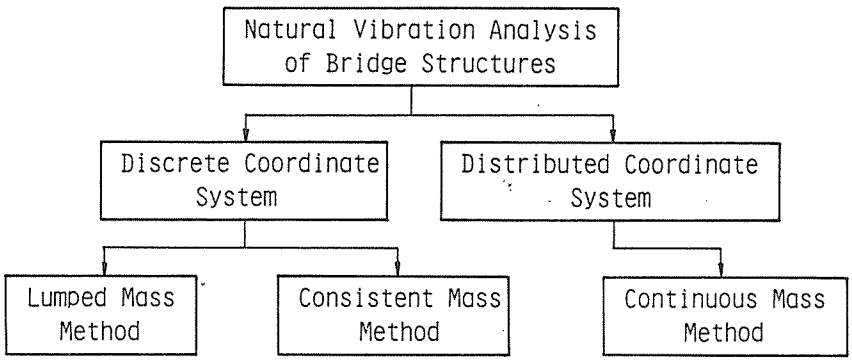

図1　固有振動解析の分類

標系による解は超越方程式を解く問題に帰着される。前者による解は近似解を，後者による解は厳密解を与える[2),4)]。ここで述べた骨組構造物の固有振動解析の概念的な分類が図－1に示されている。

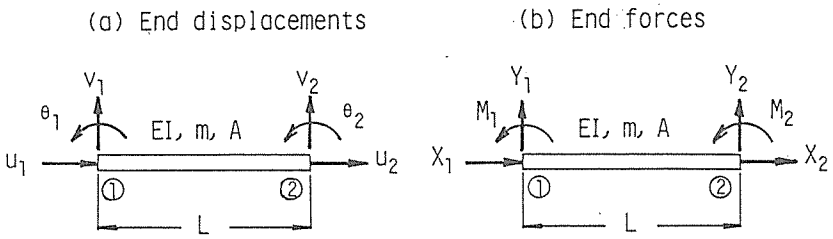

図2　骨組部材の節点変位と節点力

2.1　離散座標系による解

ここでは，図－2に示すように一定断面を有する骨組部材要素に軸力(X_1, X_2)，セン断力(Y_1, Y_2)および曲げモーメント(M_1, M_2)が作用した場合について考えてみよう。軸変形には1次のベキ級数，曲げ変形には3次のベキ級数で部材要素内の変位関数を仮定すると，さらに，両変形の連成がないものとすれば，各部材要素の剛性方程式は次のように求められる[5),6)]。

$$F_a=K_{as}U_a,\quad F_f=K_{fs}U_f \tag{1a·b}$$

ここに，

$$F_a=\{X_1, X_2\}^T,\quad F_f=\{Y_1, M_1, Y_2, M_2\}^T \tag{2}$$

$$U_a=\{u_1, u_2\}^T,\quad U_f=\{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2\}^T \tag{3}$$

$$K_{as}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\quad K_{fs}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Symmetric} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{4a·b}$$

ここで，Eは弾性係数，Aは断面積，Iは断面二次モーメント，Lは部材長である。また，添字aは部材要素の軸変形を，添字fは部材要素の曲げ変形を意味している。正方マトリックスK_{as}とK_{fs}はそれぞれトラス部材と桁部材の静的剛性マトリックスである。

部材要素の片側半分の質量と質量モーメントを両節点に分配させることにより，非対角項成分が零となる集中質量マトリックスは次のように与えられる[7)]。

$$M_{al}=\frac{mL}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad M_{fl}=\frac{mL}{24}\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix} \tag{5a·b}$$

ここで，mは部材要素の単位長さ当りの質量である。

さらに，前述の式(4a)と(4b)の静的剛性マトリックスK_{as}とK_{fs}を誘導した同じ変位関数を用いると，以下のような

$$M_{ac}=\frac{mL}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\quad M_{fc}=\frac{mL}{420}\begin{bmatrix}156 & 22L & 56 & -13L\\ & 4L^2 & 13L & -3L^2\\ & & 156 & -22L\\ \text{Symmetric} & & & 4L^2\end{bmatrix} \tag{6a·b}$$

整合質量マトリックスが求められる[6),7)]。式(4),(5),(6)の各部材要素の剛性マトリックスおよび質量マトリックスに重ね合せの原理を適用すると，最終的に，離散座標系における骨組構造物の振動数方程式は次のような固有値問題となる。

$$\det|K-\omega^2M|=0 \tag{7}$$

ここで，マトリックス K と M はそれぞれ境界条件より拘束節点処理された構造物全体の剛性マトリックスと質量マトリックスである。また，ωは構造物の固有円振動数である。式(7)の固有値問題は数学的にも非常に重要な問題であり，今までに繰返し法，代数学的方法，相似変換に基づく方法等の数多くの解析方法がある[5),8)]。本研究では，Householder 法による北海道大学大型計算機センターの数値計算副プログラム・ライブラリ MSL (DEIGAB と DEIGRS) を用いて解いた。

2.2 分布座標系による解

図—2において，部材要素の動的伸縮（軸変形）は縦振動となって現われ，その自由振動の運動方程式は次式のように与えられる。

$$EA\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=m\frac{\partial^2u}{\partial t^2} \tag{8}$$

上式の一般解を用いて，節点力(X_1, X_2)と節点変位(u_1, u_2)との間に，次のようなマトリックス関係式が得られる[7)]。

$$F_a=K_{ae}U_a \tag{9a}$$

ここに，

$$K_{ae}=EA\alpha\begin{bmatrix}\cot\alpha L & -\mathrm{cosec}\,\alpha L\\ -\mathrm{cosec}\,\alpha L & \cot\alpha L\end{bmatrix},\quad \alpha=\sqrt{m\omega^2/EA} \tag{9b}$$

さらに，部材要素の鉛直たわみに伴う曲げ振動の基礎微分方程式は次のように与えられる。

$$EI\frac{\partial^4v}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2v}{\partial t^2}=0 \tag{10}$$

この式(10)の一般解を用いて，曲げ振動による節点力(Y_1, M_1, Y_2, M_2)と節点変位(v_1, θ_1, v_2, θ_2)との関係について求めると，次のようなマトリックス関係式が得られる[2),7)]。

$$F_f=K_{fe}U_f \tag{11a}$$

ここに，

$$K_{fe}=\frac{EI\beta}{1-cC}\begin{bmatrix}\beta^2(sC+cS) & \beta sS & -\beta^2(s+S) & \beta(C-c)\\ & sC-cS & \beta(c-C) & S-s\\ & & \beta^2(sC+cS) & -\beta sS\\ \text{Symmetric} & & & sC-cS\end{bmatrix}$$

$$c=\cos\beta L,\ s=\sin\beta L,\ C=\cosh\beta L,\ S=\sinh\beta L,\ \beta=\sqrt[4]{m\omega^4/EI} \tag{11b}$$

上式(9b)と(11b)の動的な剛性マトリックス K_{ae} と K_{fe} はそれぞれ固有円振動数ω（固有値）を含んでいるので，ここでは固有剛性マトリックスと呼ぶことにする[2]。固有剛性マトリックス K_{ae} と K_{fe} は静的問題における剛性マトリックスと全く同様にして，座標変換および重ね合せの原理を用いることが可能である。一般的に，分布座標系における骨組構造物の振動数方程式は

$$\det|K(\omega)|=0 \tag{12}$$

と表される。ここで，$K(\omega)$は境界条件より拘束節点処理された構造物全体の固有剛性マトリックスである。式(12)は固有円振動数ωを含む超越方程式となり，その解析方法としては二分法，セカント法，Newton-Raphson 法等がある。本研究では確実に解を求めることができる Regula-Falsi 法[9] を用いて解いた。

3．数値計算結果

3.1 連　続　桁

数値計算例として，等断面および等支間長を有する連続桁の固有値について考えてみよう。図－3には分布座標系(a)および離散座標系(b)における連続桁の要素分割の状況を示している。分布座標系における全要素数は連続桁の支間数と一致している。一方，離散座標系における連続桁の要素分割は各支間長を等分割し，全要素数は N で表されている。

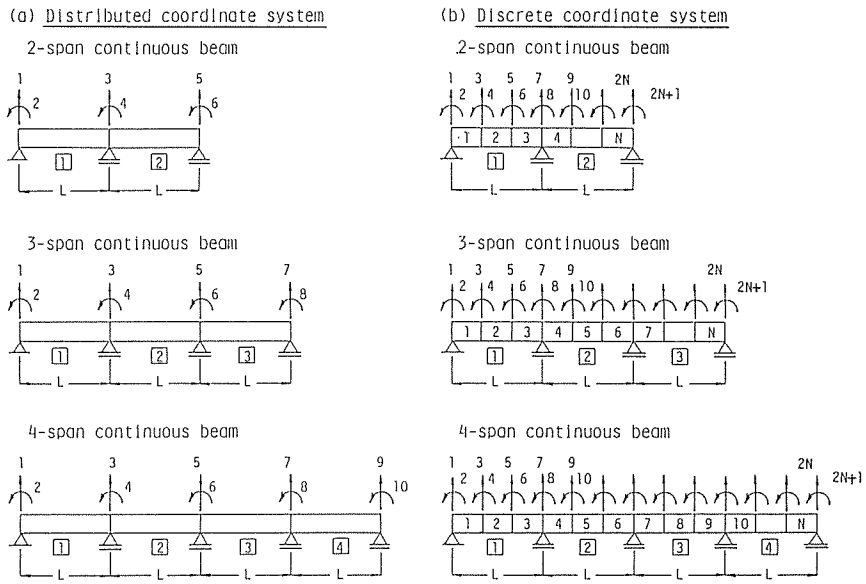

図3　分布座標系と離散座標系における連続桁の要素分割

表－1は単純桁および連続桁の1次から20次までの固有値を示している。これらの固有値 λ_m は連続質量法により求められた厳密解である。ただし，連続桁の両端部における支承の境界条件は単純支持である。この表より，多径間連続桁の第1次固有値 λ_1 は径間数に関係なく常に一定であり，その値は π である。n 径間連続桁の第 n+1 次の固有値は単純支持桁の第2次固有値 2π に，第 2n+1 次の固有値は単純支持桁の第3次固有値 3π に全く一致している。一般的に，単純支持桁

の第 m 次固有値 λ_m は n 径間連続桁の第 $n(m-1)+1$ 次固有値に対応している。ここで，固有値 λ_m を π で除した値（表－1 の括弧内の数値）を見ると，連続桁の径間数 n に応じた一定の間隔で固有モード群が形成されていることがわかる。例えば，3 径間連続桁の λ_m/π の比の値は 3 個の固有値ごとに小数点以下の数字が繰り返されている。5 径間連続桁の場合には，その 5 個の固有値ごとに小数点以下の数字が繰り返されていることがわかる。さらに，6 径間連続桁の固有値は，その 6 の約数である 1，2，3 に対応して単純桁，2 径間連続桁および 3 径間連続桁の固有値をすべて含んでおり，その固有モードの群をなす規則性の存在には興味深いものがある。この規則性に着目して，Ayre と Jacobsen[10] は単純桁から 24 径間連続桁の固有値を算定するための図解ネットワークを作成した。

表 1　等断面等支間長の連続桁の固有値

Mode order	Number of spans of continuous beams n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
1	π (1.000)	π (1.000)	π (1.000)	π (1.000)	π (1.000)	π (1.000)
2	2π (2.000)	3.926602 (1.250)	3.556408 (1.132)	3.393231 (1.080)	3.309052 (1.053)	3.260535 (1.038)
3	3π (3.000)	2π (2.000)	4.297530 (1.368)	3.926602 (1.250)	3.700360 (1.178)	3.556408 (1.132)
4	4π (4.000)	7.068582 (2.250)	2π (2.000)	4.463324 (1.421)	4.152944 (1.322)	3.926602 (1.250)
5	5π (5.000)	3π (3.000)	6.707596 (2.135)	2π (2.000)	4.550434 (1.448)	4.297530 (1.368)
6	6π (6.000)	10.210176 (3.250)	7.429541 (2.365)	6.545144 (2.083)	2π (2.000)	4.601418 (1.465)
7	7π (7.000)	4π (4.000)	3π (3.000)	7.068582 (2.250)	6.459950 (2.056)	2π (2.000)
8	8π (8.000)	13.351769 (4.250)	9.848793 (3.135)	7.591619 (2.416)	6.848552 (2.180)	6.409847 (2.040)
9	9π ((9.000)	5π (5.000)	10.571561(3.365)	3π (3.000)	7.288610 (2.320)	6.707596 (2.135)
10	10π (10.000)	16.493361 (5.250)	4π (4.000)	9.686559 (3.083)	7.676964 (2.444)	7.068583 (2.250)
11	11π (11.000)	6π (6.000)	12.990402(4.135)	10.210176(3.250)	3π (3.000)	7.429541 (2.365)
12	12π (12.000)	19.634954 (6.250)	13.713135(4.365)	10.733799(3.417)	9.601142 (3.056)	7.726964 (2.460)
13	13π (13.000)	7π (7.000)	5π (5.000)	4π (4.000)	9.989880 (3.180)	3π (3.000)
14	14π (14.000)	22.776547 (7.250)	16.131994(5.135)	12.828171(4.083)	10.430473(3.320)	9.551104 (3.040)
15	15π (15.000)	8π (8.000)	16.854729(5.365)	13.351769(4.250)	10.819221(3.444)	9.848793 (3.135)
16	16π (16.000)	25.918139 (8.250)	6π (6.000)	13.875367(4.417)	4π (4.000)	10.210176(3.250)
17	17π (17.000)	9π (9.000)	19.273587(6.135)	5π (5.000)	12.742753(4.056)	10.571561(3.365)
18	18π (18.000)	29.059732 (9.250)	19.996321(6.365)	15.969763(5.083)	13.131484(4.180)	10.869263(3.460)
19	19π (19.000)	10π (10.000)	7π (7.000)	16.493361(5.250)	13.572054(4.320)	4π (4.000)
20	20π (20.000)	32.201325(10.250)	22.415180(7.135)	17.016960(5.417)	13.960785(4.444)	12.692711(4.040)

Note: The quantities within parentheses are values of λ_{m1}/π.

表 2　ランガー橋とローゼ橋の断面諸元

Structural properties	Langer bridge			Lohse bridge		
	Lower chord member	Upper chord member	Vertical member	Lower chord member	Upper chord member	Vertical member
Cross sectional area : A(m^2)	0.023	0.014	0.005	0.052	0.050	0.007
Moment of inertia : I(m^4)	0.0084	0.0065	0.0016	0.0093	0.0077	0.0018
Dead load : w(t/m)	2.78	0.11	0.04	3.67	0.39	0.06

図－4，5，6 は集中質量法（実線）および整合質量法（破線）による 3，4，5 径間連続桁の固有値 ω と，連続質量法により求めた固有値 ω^* との比を各固有振動モード次数に対して示したものである。図中の N は連続桁の要素分割数である。一般的に，要素分割数 N が増加するにつれて，集中質量法および整合質量法による解は除々に厳密解に近づいて行くことがわかる。また，

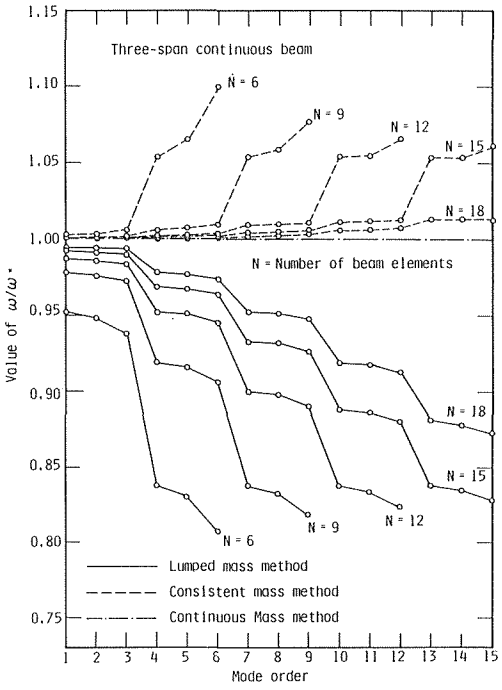

図4　3径間連続桁の固有円振動数比と固有モード次数との関係

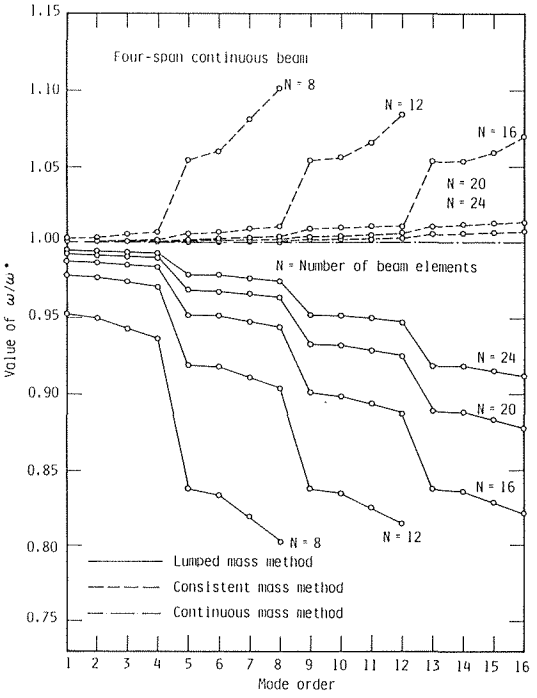

図5　4径間連続桁の固有円振動数比と固有モード次数との関係

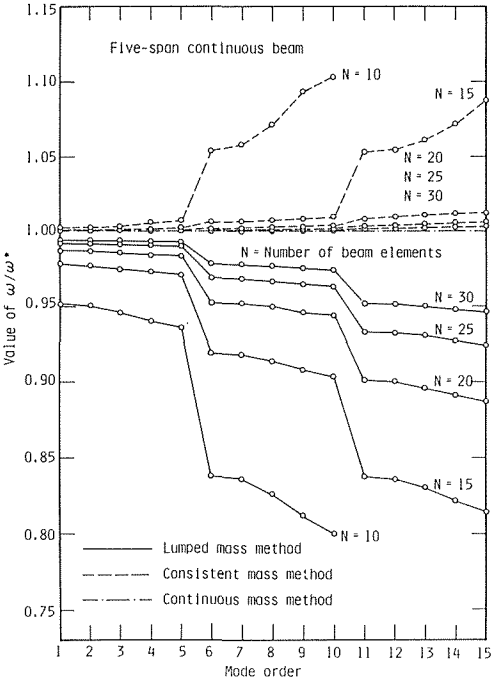

図6　5径間連続桁の固有円振動数比と固有モード次数との関係

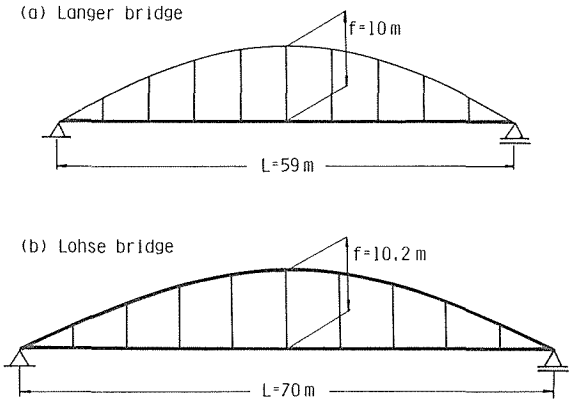

図7　ランガー橋とローゼ橋

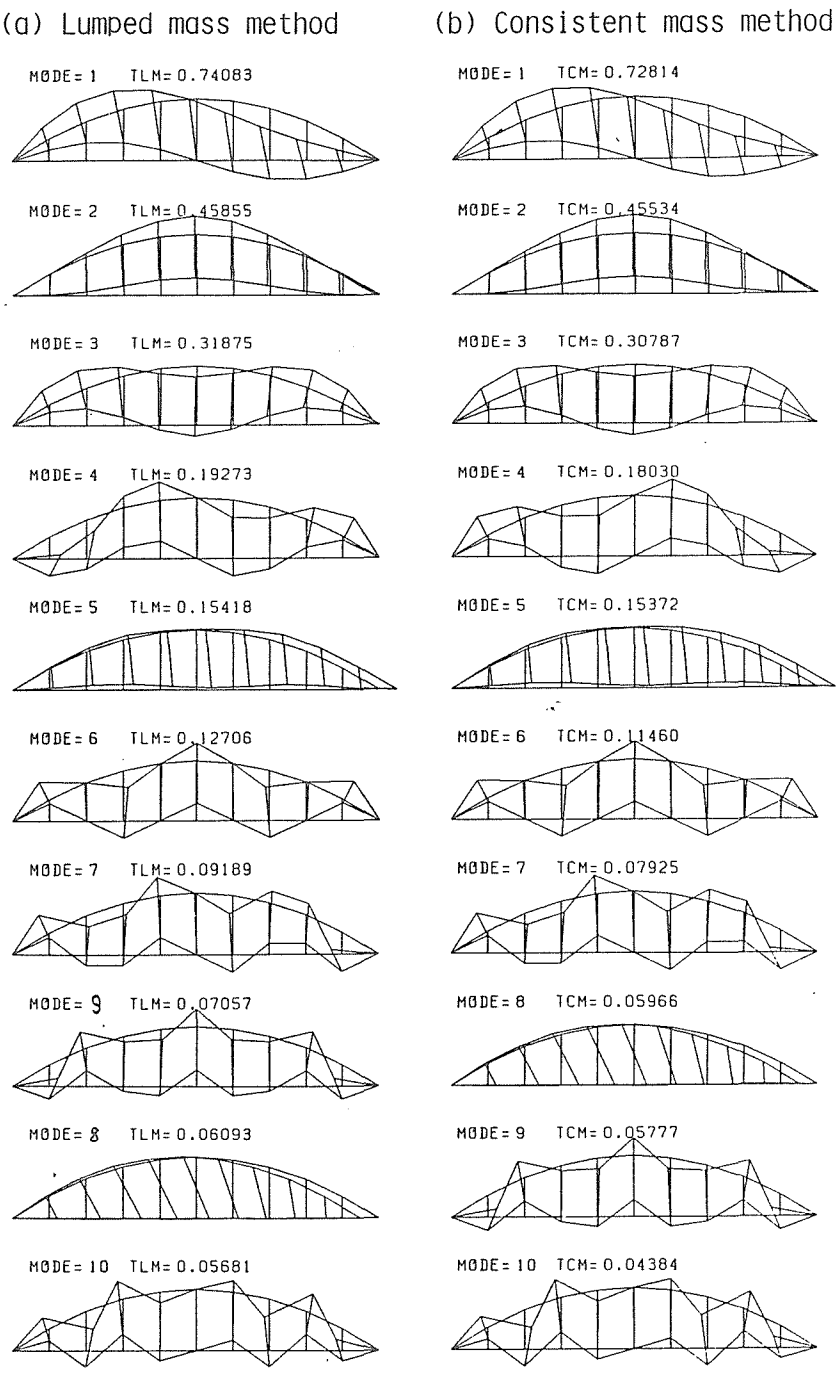

図8　ランガー橋の固有振動モード

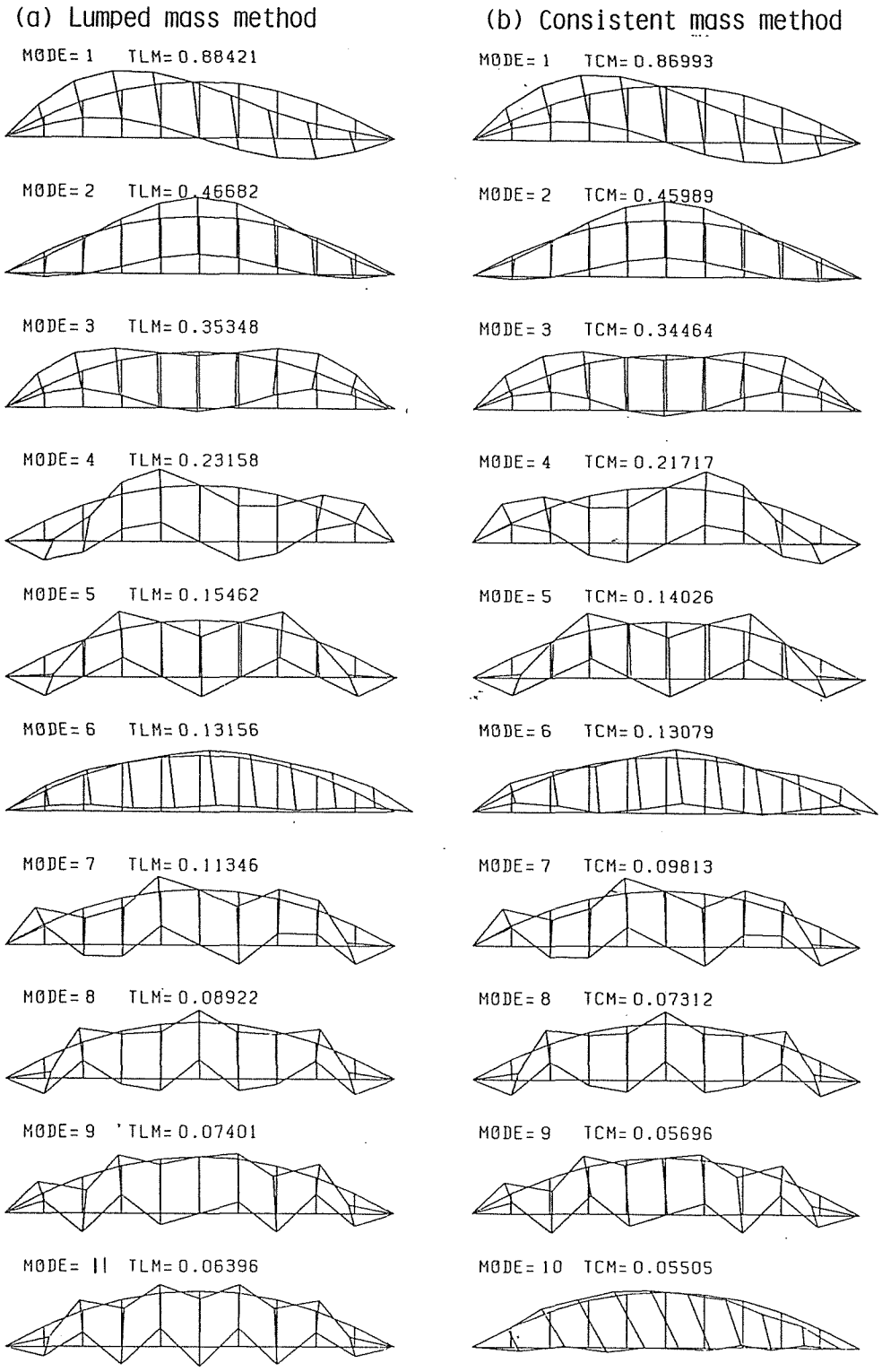

図9　ローゼ橋の固有振動モード

同じ要素分割数Nでは，整合質量法による解析結果が集中質量法による結果と比較して，かなり良い精度で固有値を計算していることが確認できる。さらに，集中質量法により求められた固有値は厳密解に対して下界値を，整合質量法による解は上界値を与えることがわかる。固有値の比ω/ω^*は，離散座標系による解の精度を表しているが，先に述べた連続桁の径間数nに応じた固有モード群が形成されており，その固有値の精度も固有モード群の中ではほぼ一定となる傾向にある。特に，その傾向は集中質量法により求められた固有値に顕著に現われていることがわかる。

3.2 アーチ橋

次に，アーチ橋の固有値について考えてみよう。数値計算例として図—7に示すように，支間長59 m，ライズ長10 mのランガー橋と支間長70 m，ライズ長10.2 mのローゼ橋を取り上げることにする。その固有値計算に必要な断面諸元は表—2に与えられている。境界条件としては，左端がヒンジ支承，右端がローラー支承である。また，両者の節点数は20，分割要素数は29である。

図—8，9は集中質量法と整合質量法により求められたランガー橋とローゼ橋の固有振動モードである。支間中央点に節をもつアーチ橋特有の逆対称振動モードが基本固有振動モードとして現われ，第2次，3次固有振動モードは曲げ振動と縦振動とが連成していることがわかる。さらに，ランガー橋では第5次，8次モードで，ローゼ橋では第6次，10次モードで橋軸方向の振幅が卓越した縦振動が現われている。一般的に，アーチ系橋梁構造物の固有振動モードは，逆対称および対称モードの曲げ振動と縦振動とが一つの固有モード群を成して繰り返し現われる。この性質は前述の連続桁の場合と同様興味深い結果である。

数値計算により求められた固有値の比ω/ω^*と固有モード次数との関係がランガー橋，ローゼ橋についてそれぞれ図—10，11に示されている。一般的に，集中質量法により求められた固有円振動数ωは厳密解ω^*よりも小さい値を，整合質量法による固有円振動数は厳密解よりやや大きい値

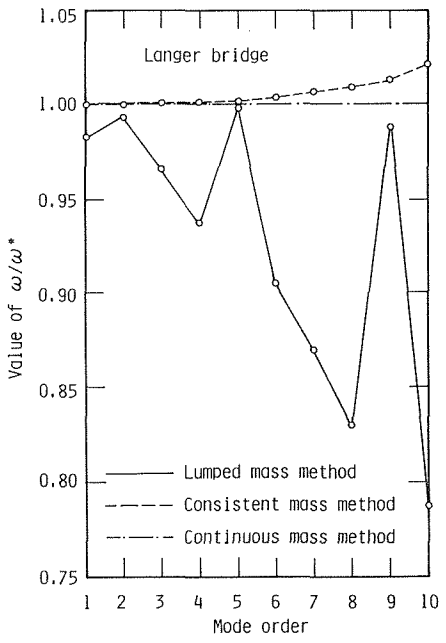

図10 ランガー橋の固有円振動数比と固有モード次数との関係

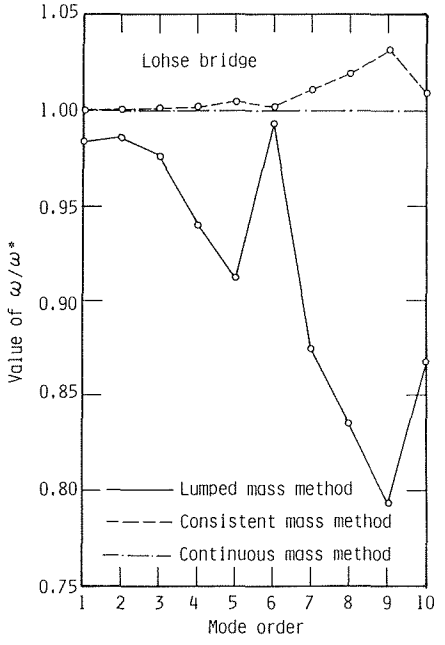

図11 ローゼ橋の固有円振動数比と固有モード次数との関係

を与える。同じ要素数（あるいは質点数）では，整合質量法による解が集中質量法による解と比較して，かなり精度が良いことがわかる。また，集中質量法により計算された固有値の中で，ランガー橋では縦振動の卓越する第2次，5次，9次の固有振動モード，およびローゼ橋では第2次，6次，10次の固有振動モードが他の曲げ振動のものより，良い精度で解が求められている。このアーチ系橋梁構造物の場合でも，集中質量法および整合質量法により求められた固有値はそれぞれ厳密解に対して下界値および上界値を与える。

3.3 Vレッグラーメン橋

実在橋の数値計算例として，北海道の日高山脈に架設されるシビチャリ1号橋の断面諸元を用いる。本橋は図—12に示されるような鉄筋コンクリート橋脚の上に，V型の鋼製橋脚を有する5径間連続ラーメン橋である。また，本橋はA1からA2にかけて2.600%の縦断勾配があり，幾何学的に非対称な構造物である点に特徴がある。境界条件としては図—12に示されているように，橋軸方向に対して，A1はヒンジ支承，A2は可動支承，P1とP2は固定支持である。さらに，数値計算に必要な断面諸元は以下の通りである。弾性係数は $E=2.1\times10^7$ t/m² (206,000MN/m²)，断面積は $A=0.100\sim2.500$ m²，断面二次モーメントは $I=0.018\sim0.568$ m⁴，単位長さ当りの重量は $w=1.267\sim5.700$ t/m (12,500～55,900 N/m)。

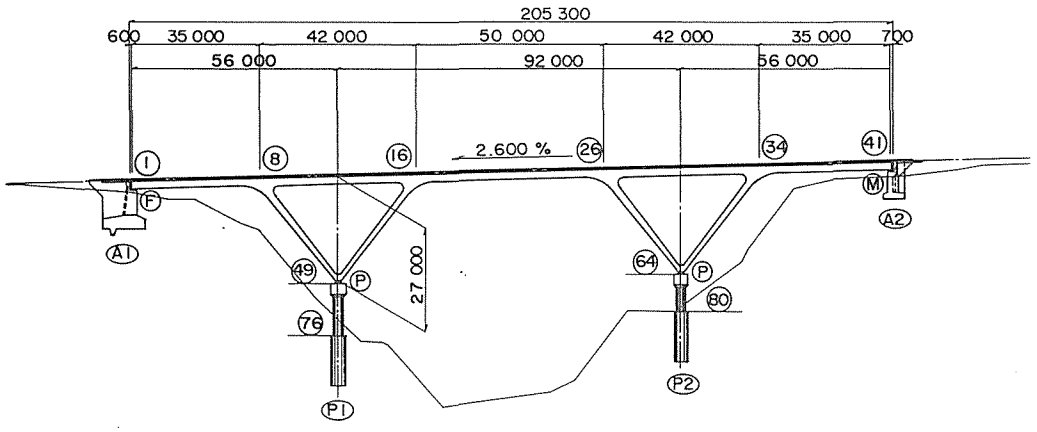

図12 Vレッグラーメン橋

図—13には，集中質量法および整合質量法により求められたVレッグラーメン橋の固有振動モードが第1次から10次まで示されている。ここで，数値計算に用いられた5径間連続Vレッグラーメン橋の要素分割数は $N=80$ である。このVレッグラーメン橋は2.600%の縦断勾配があり，構造形式が非対称であるため，特異な固有振動モードが現われている。基本固有1次振動モードは，支間中央において大きな振幅を生じ，あたかもV型橋脚を剛支点にした5径間連続桁のような挙動を示している。第9次固有振動モードではV型橋脚のみが局部的に振動しているが，他の固有振動モードは補剛桁とV型橋脚とが一体となって連成振動していることがわかる。また，集中質量法および整合質量法により求められた両者の固有振動モードを比較すると，それ程，大きな差異がないことが理解できる。

集中質量法，整合質量法および連続質量法により計算された第1次から20次までの固有円振動数の値が表—3に示されている。ここで，用いた要素分割数は $N=80$ である。連続桁およびアーチ橋の場合と同様に，集中質量法により求められた固有円振動数は厳密解よりも小さい値を，整

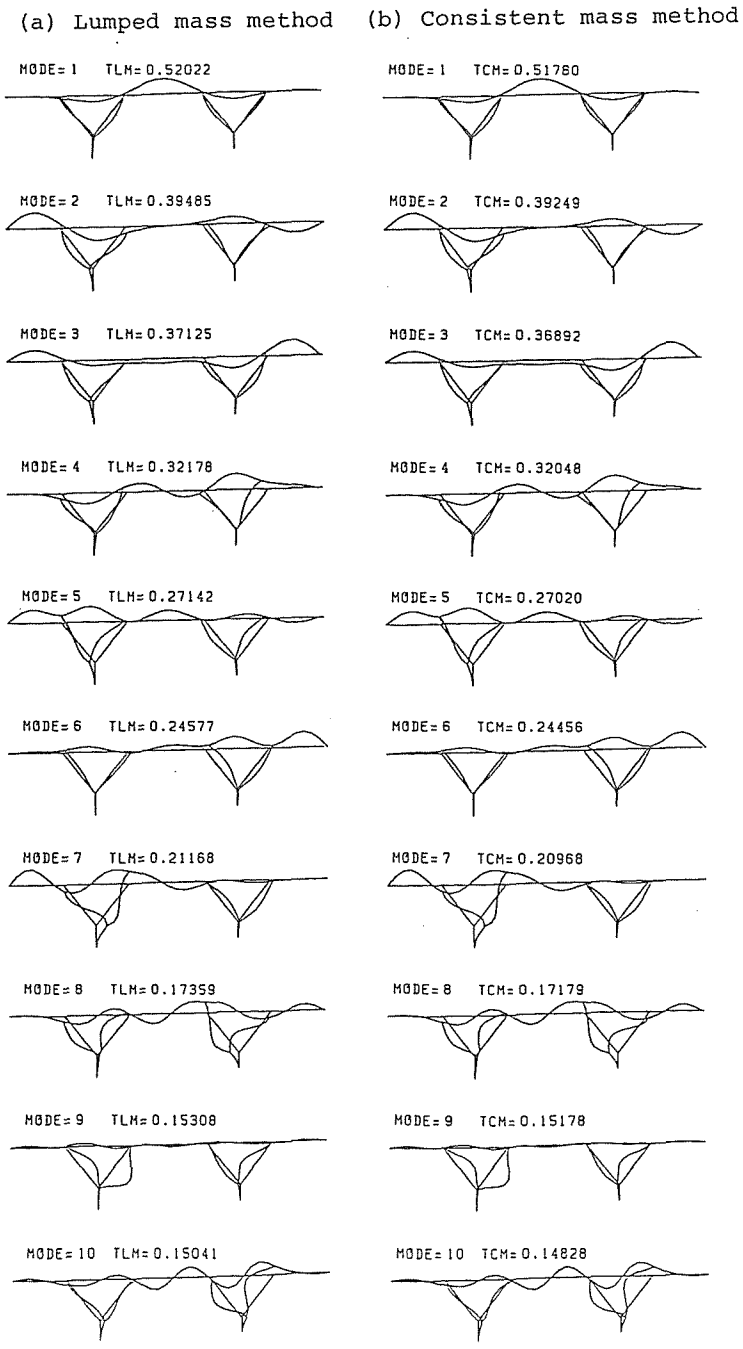

図13 Vレッグラーメン橋の固有振動モード

合質量法による固有円振動数は厳密解より大きい値を与える。

次に,集中質量法および整合質量法により数値計算された固有値の精度について考えてみよう。図—14 は同一断面諸元をもつ V レッグラーメン橋について,集中質量法と整合質量法により計算した固有円振動数ωと連続質量法による厳密解ω^*との比を固有振動モードに対して示したものである。図中の N は構造物の要素分割数である。一般的に,要素分割 N が増加するにつれて,集中質量法および整合質量法による解が除々に厳密解に近づいて行くことがわかる。また,同じ要素分割数 N では,整合質量法による解析結果は集中質量法による結果と比較して,かやり良い精度で V レッグラーメン橋の固有値を計算していることが確認できる。

3.4　固有値の精度

以上の連続桁,アーチ橋および V レッグラーメン橋の数値計算結果から,以下のことが結論として言えるであろう。集中質量法より整合質量法を用いた解の方が,かなり精度が良いことから,平面骨組構造物の固有振動解析には集中質量法よりも整合質量法を用いて数値計算することを本研究で推奨したい。また,固有値計算を行う上で要素分割数と解の精度との関係について言及するならば,もし整合質量法により 0.1 %以内の良い精度で解を得るためには

(構造物全体の要素分割数)＝(1節点の自由度)×(必要な固有振動モード次数)　(13)

という算定式が有効であろう。例えば上式の確認のために,図—5 で示した 4 径間連続桁の数値計算結果を参考にしてみると,桁の 1 節点の自由度は 2 であることを考慮して,要素分割数 N＝16 を用いた整合質量法による解はほぼ 0.1%以内の精度で,約 8 次固有振動モードまで計算されて

表3　計算されたVレッグラーメン橋の固有円振動数

Mode order	Lumped mass method	Consistent mass method	Contiouous mass method
1	12.0779	12.1343	12.1280
2	15.9130	16.0086	16.0000
3	16.9244	17.0312	17.0220
4	19.5263	19.6058	19.5950
5	23.1490	23.2537	23.2406
6	25.5647	25.6921	25.6773
7	29.6828	29.9651	29.9478
8	36.1952	36.5749	36.5529
9	41.0448	41.3972	41.3728
10	41.7743	42.3727	42.3452
11	45.6868	46.1153	46.0867
12	46.1368	46.5411	46.5132
13	48.4642	48.9259	48.8953
14	61.8550	63.0179	62.9664
15	63.0435	64.5331	64.4789
16	68.3102	69.7503	69.6821
17	69.2541	70.4185	70.3531
18	80.5942	82.7604	82.6762
19	88.1759	90.7033	90.6014
20	91.8246	95.2146	95.1020

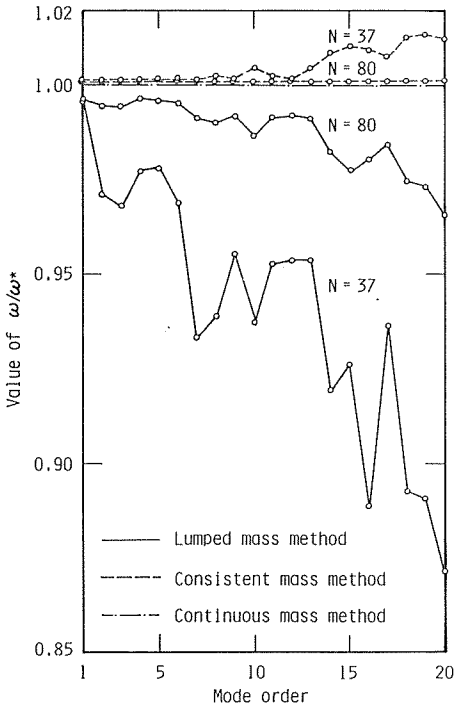

図14　Vレッグラーメン橋の固有円振動数比と固有モード次数との関係

いることがわかる。また，他の要素分割数，連続桁についてもほぼ同様の結果である。さらに，図—14のVレッグラーメン橋の場合についてみると，ラーメン部材の1節点の自由度は3であることを考えに入れて，要素分割数N＝37を用いた整合質量法による解はほぼ0.1%以内の精度で，約12次の固有振動モードまで計算できていることがわかる。また，要素分割数N＝80を用いた場合の計算結果はほぼ20次の固有振動モードまで0.1%以内の精度で固有値が求められていることが確認できる。しかし，図—10および図—11のアーチ橋の固有値の精度については，必ずしも式(13)の算定式は適用できない。つまり，要素分割数がN＝29であり，1節点の自由度が3であることを考慮して，整合質量法による解は必ずしも0.1%以内の精度で10次の固有振動モードまで計算されておらず，高々3～4次の固有振動モードまでが満足できる範囲である。しかし，アーチ橋の下弦材の要素分割数N＝10について検討してみると，式(13)の算定式が有効となるのであろう。したがって，連続桁あるいはVレッグラーメン橋のように開いた平面骨組構造物の固有振動解析には式(13)による算定式が役立つであろう。しかし，アーチ橋のように閉じた平面骨組構造物の固有振動解析には，直接的に式(13)を適用することは難しい。このような場合には，固有振動モードの支配的な補剛桁（この場合は下弦材）の要素分割数に着目して，式(13)の算定式を適用する工夫が必要となる。いずれの数値計算例においても，集中質量法により求められた固有値の精度は，ほとんど低次の固有振動モードしか期待できないと言うことができる。

4．固有剛性マトリックスの級数展開

式(9b)および式(11b)における固有剛性マトリックスK_{ae}とK_{fe}の各要素を固有円振動数ωに関してTaylor展開することにより，集中および整合質量マトリックスとの数学的な位置関係について調べてみよう。一つの例として，固有剛性マトリックスK_{ae}とK_{fe}の1行1列の要素を取り出して，固有円振動数ωに関して級数展開すると

$$K_{ae,11}=EA\alpha\cot\alpha L=\frac{EA}{L}-\frac{mL}{3}\cdot\omega^2-\frac{m^2L^3}{45EA}\cdot\omega^4-\cdots\cdots \tag{14}$$

$$K_{fe,11}=\frac{EI\beta^3(sC+cS)}{1-cC}=\frac{EI\beta^3(\sin\beta L\cosh\beta L+\cos\beta L\sinh\beta L)}{1-\cos\beta L\cosh\beta L}$$

$$=\frac{12EI}{L^3}-\frac{13mL}{35}\cdot\omega^2-\frac{59m^2L^5}{161{,}700EI}\cdot\omega^4-\cdots\cdots \tag{15}$$

である。式(14)と式(15)の右辺第一項は，それぞれ式(4a)および式(4b)の静的剛性マトリックスK_{ae}とK_{fe}の1行1列の要素と一致している。さらに，式(14)と式(15)の右辺第二項は，それぞれ式(6a)および式(6b)の整合質量マトリックスM_{ac}とM_{fc}の1行1列の要素と完全に一致していることがわかる。固有剛性マトリックスの他の要素に対しても，同様の結果が得られる。したがって，式(9b)および式(11b)における固有剛性マトリックスK_{ac}とK_{fe}は固有円振動数ωに関するベキ級数展開により，次式のようにマトリックス表示できる。

$$K_{ae}=K_a-M_{a1}\cdot\omega^2-M_{a2}\cdot\omega^4-\cdots\cdots \tag{16}$$

$$K_{fe}=K_f-M_{f1}\cdot\omega^2-M_{f2}\cdot\omega^4-\cdots\cdots \tag{17}$$

ここで，式(16)の右辺第一項の係数マトリックスK_aと第二項の1次質量マトリックスM_{a1}は式(4a)の軸変形の静的剛性マトリックスK_{as}と式(6a)の整合質量マトリックスM_{ac}とそれぞれ一致する。さらに，式(17)の右辺第一項の係数マトリックスK_fと第二項の1次質量マトリックスM_{f1}

は式(4b)の曲げ変形の静的剛性マトリックス K_{fs} と式(6b)の整合質量マトリックス M_{fc} とそれぞれ完全に一致している。

したがって，以上の考察からして平面骨組部材の整合質量法は固有剛性マトリックスを固有円振動数ωに関してベキ級数展開した場合のω^4以上の高次の項（あるいは2次以上の質量マトリックス M_{a2} および M_{f2}）を無視した連続質量法と一致する。つまり，整合質量法は固有剛性マトリックスのω^4以上の高次項の影響を無視した連続質量法の近似解法と結論づけられる。さらに，式(5)と式(6)の質量マトリックスを比較することにより，集中質量法は整合質量マトリックスの質量の連成項（非対角項）を無視した整合質量法の簡易解法ということができる。

5．あとがき

本研究は基本的な連続桁，アーチ橋およびVレッグラーメン橋の固有値の精度について，集中質量法，整合質量法および連続質量法により数値計算し，さらに，3種類の異なる質量マトリックスの位置関係について数学的立場から考察したものである。ここで得られた結論および今後の研究課題についてまとめると次のようになる。

平面骨組構造物の要素分割数が増加するにつれて，近似解法による解は除々に厳密解に近づく傾向がある。また，同じ要素分割数では，固有円振動数の値は集中質量法を用いるよりも整合質量法を用いた方がかなり良い精度で計算されることがわかった。一般的に，集中質量法により求められた固有円振動数は厳密解に対して下界値を，整合質量法による解は上界値を与える。さらに，要素分割数と必要な精度を満足する固有振動モード次数との関係が式(13)で提案された。離散座標系による解の中でも，整合質量法による解がかなり精度が良いことから，式(13)で提案した算定式は今後の骨組構造物の固有値計算を行う上で役立つであろう。

固有剛性マトリックスを固有円振動数 ω に関して Taylor 展開することにより，整合質量法は2次以上の高次の質量マトリックスを無視した連続質量法の特別な場合であることが明らかにされた。さらに，集中質量法は整合質量マトリックスの質量の連成項を無視した整合質量法の簡易解析法ということができる。

今後の研究課題として，曲げねじり変形の影響を考慮した曲線格子桁橋，あるいは3次元的な立体骨組構造物等における固有値とその精度について検討する必要がある。また，動的応答解析における集中質量法，整合質量法および連続質量法による差異について，さらに，実在橋の現場振動測定との対応も今後の重要な検討課題となるであろう。なお，本研究の数値計算には北海道大学大型計算機センターの HITAC M-682 と S-810 システムを利用したことを付記する。

参考文献

1) Wilson, E. L., Der Kiureghian, A. and Bayo, E. P.: Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 9 (1981), pp. 187-194.
2) Hayashikawa, T. and Watanabe, N.: Proc. of ASCE, Vol. 111 (1985), No. EM5, pp. 639-652.
3) Clough, R. W. and Penzien, J.: Dynamics of Structures, 1975, McGraw-Hill.
4) Hurty, W. C. and Rubinstein, M. F.: Dynamics of Structures, 1964, Prentice-Hall.
5) 鷲津久一郎，宮本　博，山田嘉昭，山本善之，川井忠彦共編：有限要素法ハンドブック，1981，培風館.
6) Przemieniecki, J. S.: Theory of Matrix Structural Analysis, 1968, McGraw-Hill.
7) Paz, M.: Structural Dynamics, 1980, Van Nostrand Reinhold Company.
8) Crandall, S. H.: Engineering Analysis, 1956, McGraw-Hill.
9) Wendroff, B.: Theoretical Numerical Analysis, 1966, Academic Press.