HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	砂の力学的性質に及ぼす粒子形状および粒度分布の影響
Author(s)	三浦，均也；長谷川，敬寿；松本，吉英 他
Citation	北海道大學工學部研究報告，149，11-24
Issue Date	1990-02-28
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42211
Type	departmental bulletin paper
File Information	149_11-24.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第149号（平成２年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University. No. 149 (1990)

砂の力学的性質に及ぼす粒子形状および粒度分布の影響

三浦均也　長谷川敬寿
松本吉英　土岐祥介

（平成元年９月30日受理）

The Influence of Grain Shape and Grain Size Distribution on the Mechanical Properties of Sands.

Kinya MIURA, Keiju HASEGAWA,
Yoshihide MATSUMOTO and Shousuke TOKI

(Received September 30, 1989)

Abstract

Deformation-failure behavior of sand varies considerably, depending on their primary properties, such as grain shape, crushability and grain size distribution. To reveal the significance of primary properties in sand deformation-strength characteristics is the aim of present study. The preceding companion report dealt with the effects of primary properties on physical properties, and present report deals with the effects on mechanical properties.

Some 80 sand samples with different grain shapes and grain size distributions were prepared from three different kinds of sands. Drained triaxial compression tests were performed on all the sand samples with the same relative density; the observed deformation behaviors showed a remarkable influence of primary properties on deformation-failure behaviors.

Deformation behaviors during consolidation and shearing, and failure behaviors were examined. The conclusion is summarized as follows.

1) Clear correlation is found among compressibility during consolidation, shear rigidity and dilatancy contractivity during shear. The sand that consists of more angular particles has a higher void ratio and is more compressive, less rigid and more contractive.

2) Shear strength is influenced by grain shape, crushability and grain size distribution, the more angular, less crushable and better graded sand exhibits higher shear strength.

3) It is not true for the sands with different primary properties that the sand with higher shear rigidity exhibit higher shear strength, which is believed generally true for a particular sand with different densities and different confining pressure.

土木工学科　基礎地盤工学講座

1. まえがき

密度や含水比などの後天的な性質，および，圧密条件や排水条件などの応力—ひずみ条件に依存して土の変形・強度特性が大きく変化することは広く認められている。土の物性に及ぼすこれら後天的な性質や応力—ひずみ条件の影響を明らかにするために，多くの研究はある特定の土について種々の条件の下で変形・破壊挙動を調べてきた。一方，土は天然に産するためにその性質は千差万別で，粒子の形状，破砕性や粒度分布など土が生得的に有している性質も変化に富んでいる。当然のことながら変形・強度特性もそれらに依存してかなり異なっているといえる。しかし，土の挙動に及ぼす生得的性質の影響を系統的に調べた研究は未だ少ない。

近年になって，ロックフィルダム，海中ケーソンのマウンドなど粒径の大きい粗粒材料を用いた大規模構造物の変形量や安定度をより正確に評価するための研究が行われている[1]。そのためには粗粒材の力学的性質をまず実験によって明かにする必要があるが，設備が大規模になるなどの理由から一般に試験の実施が困難なため，砂質土の変形・強度特性に影響を及ぼす種々の要因を明らかにした上で，粗粒材の力学的性質を簡易な方法で推定することが期待されている。

土粒子の形状，破砕性や粒度分布など生得的な性質が土の変形・破壊挙動に及ぼす影響を明らかにし，土の変形•強度特性を統一的に評価する手法を確立することが一連の研究の目的である。前報[2]および本報では，この目的に沿って行われた基礎研究の成果を報告している。土粒子の性質や粒度分布が異なる試料について物理的性質および力学的性質を調べ比較・検討することによって，それらに及ぼす土の生得的な性質の影響を明らかにしている。本報告では調整された約80種類の試料について三軸試験を行い，観察された変形・破壊挙動を考察することによってそれらに及ぼす土粒子の形状，破砕性および粒度分布などの影響を明らかにしている。

2. 三軸圧縮試験

2. 1 試験方法

本研究では，飽和供試体（D＝70 mm,H＝165 mm）について排水条件で通常の三軸圧縮試験を実施している。この際，有効拘束圧を196 kPa，バックプレッシャーを196 kPaの一定とし，ひずみ速度0.25%/minで統一した。コンピューターを組み込んだ自動計測システムよって，軸変位，軸荷重，間隙水圧，側方圧力，体積変化量を測定している。データの整理および解析に用いた応力とひずみのパラメータは次のようである。

$$\text{平均主応力}\quad \sigma_m=(\sigma_a+\sigma_r)/2,\qquad \text{最大せん断応力}\quad \tau_m=|\sigma_a-\sigma_r|/2$$

$$\text{応力比}\quad \tau_m/\sigma_m=\sin\phi_m\qquad \text{体積ひずみ}\quad \varepsilon_v=\varepsilon_a+2\varepsilon_r$$

ここで，σ_a，σ_rは軸応力と側方応力，ε_a，ε_rは軸ひずみと側方ひずみである。ただし，応力はすべて有効応力を意味している。

2. 2 試料および供試体の作製方法

本研究で用いた試料は珪砂A（CA-SAND），豊浦砂（TO-SAND），相馬砂（SO-SAND）の3種類で，これらについて粒度調整を行い，粒度分布が均一で最大粒径D_{max}が異なる均等粒径試料（Uniform Sample），最大粒径D_{max}あるいは最小粒径D_{min}が一定で均等係数Ucが広範に変化する混合粒径試料（Graded Sample）を合計約80種類準備している。試料の準備方法，粒度分布などについては前報[2]を参照していただきたい。これらの試料各々については比重試験，最大•最小密度試験を実施し，さらに角張りの程度も顕微鏡による観察で調べている。土粒子の性質や

粒度分布と物理的性質との相関については前報に詳しく説明している。

本研究のように砂の変形・強度特性に及ぼす土粒子の性質，粒度配合などの生得的な性質の影響を要素試験によって調べようとする場合，種々の砂で品質の良い供試体を作成するために採用する供試体作製法には次のようなことが要求される。

1）広い範囲の粒度分布を有する試料について有効であること。　2）供試体の密度をコントロールしやすいこと。　3）供試体の構造が一様であること。　4）手法が複雑でなく，個人差が少ないこと。　5）作製された供試体の性質が一定しており，同一の試料についての試験結果の再現性が良いこと。本研究室においては，これまで多重ふるい落下法[3]により要素試験に供試体を供給してきた。この手法は数層のふるいを通して乾燥砂試料を落下堆積する方法で，上記の要件のうち2)～5)までを満足していると考えられる。しかし，試料の粒径が細かすぎて空中に飛散し易いとき，あるいは粒度分布がよいためにふるいを通る際に分級する危険があるとき，この手法を適用することは難しい。そこで，本研究ではロート法と振動法を組み合わせた供試体作製法を採用した。この手法を簡単に説明すると次のようである。1）乾燥試料をロート法によりモールド内に注ぎ込み最緩状態をつくる。　2）小型バイブレータ(周波数 120 Hz，振幅 0.3 mm，消費電力 10 w)によって所定の密度が得られるまで締固める。この手法が先に挙げた要件を比較的良く満足していることを予備実験によって確かめている。

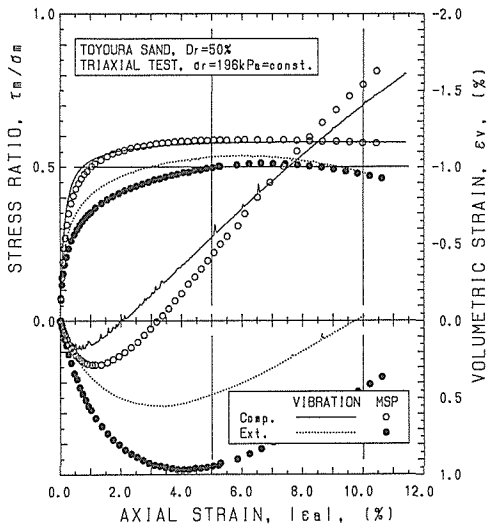


図1　供試体作製法の違いによる変形・破壊挙動の相違

一般に供試体の作製方法は供試体の粒子配列構造を決定し，変形挙動に大きな影響を与えることが知られている。そこで自然状態の豊浦砂を用いて本研究で採用した手法で作成した供試体と，多重ふるい落下法のよって作成した供試体（どちらも相対密度 Dr＝50%）について三軸圧縮・伸張試験を実施し，変形・強度特性の簡単な比較を行ってみた。図1は軸ひずみ ε_a に対する応力比 τ_m/σ_m，および体積ひずみ ε_v の変化を示している。そのおおよその特性は以下のようである。

1）圧縮・伸張試験において，多重ふるい落下法によるものよりも体積収縮量は小さく，変形初期の剛性は大きい。

2）両供試体とも破壊強度は圧縮側の方が伸張側より高いが，その差は多重ふるい落下法によるもののほうが大きい。多重ふるい落下法による供試体では強度の異方性が強いのに対し，本供試体作成法によるものの方がより等方的な力学特性を示している。

本研究では全ての供試体で作成時の相対密度が Dri＝70± 3 %となるように調整している。前報[2]で説明したように最大間隙比 e_{max} および最小間隙比 e_{min} は粒子の性質や粒度分布によって大きく変化するために，相対密度を一定とした試験条件での初期間隙比 e_i は一定ではなく図2（a，b，c）に示すようであった。

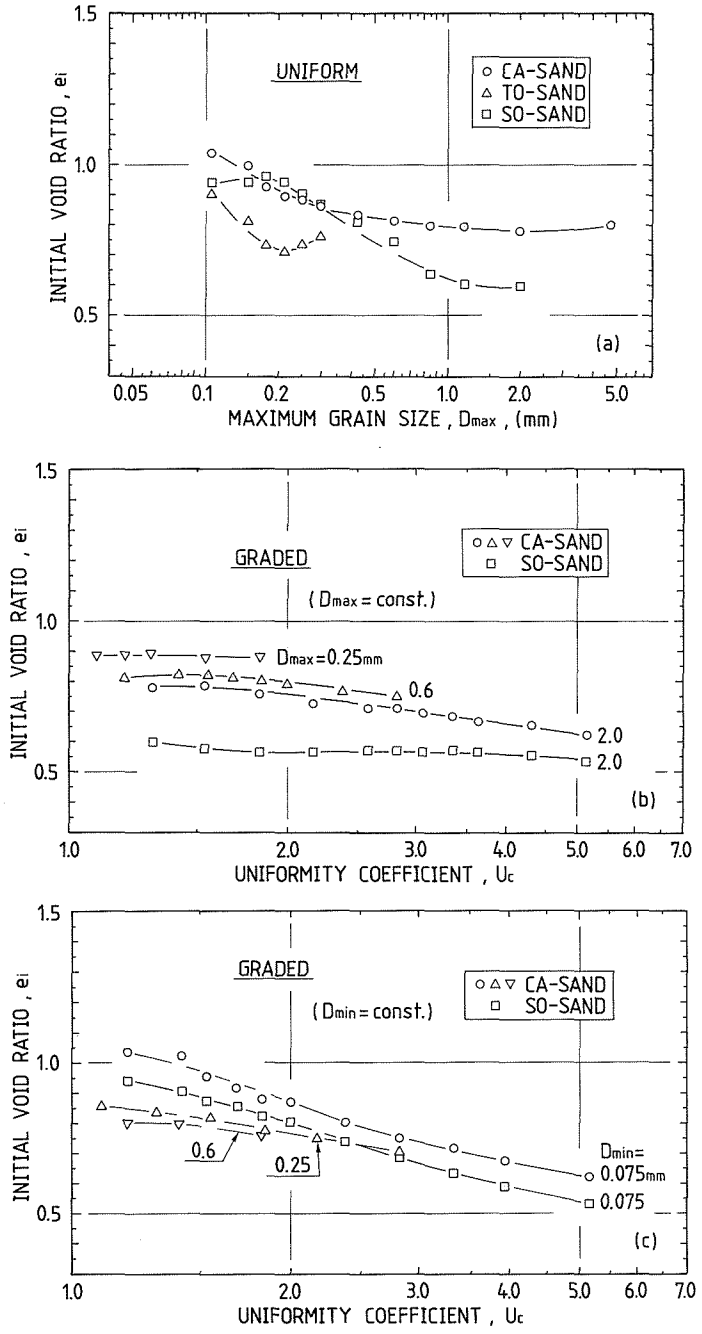


図2 供試体作製時における間隙比；(a)均等粒径試料，(b, c)混合粒径試料

3. 砂の変形・強度特性

本章では，3種類の砂を粒度調整することによって準備した試料について三軸圧縮試験を行い，砂の変形・破壊挙動に及ぼす生得的性質の影響について考察している。試験で観察された均等粒径試料についての応力—ひずみ関係の典型例を図3（a, b, c）に示す。砂の力学的性質を把握す

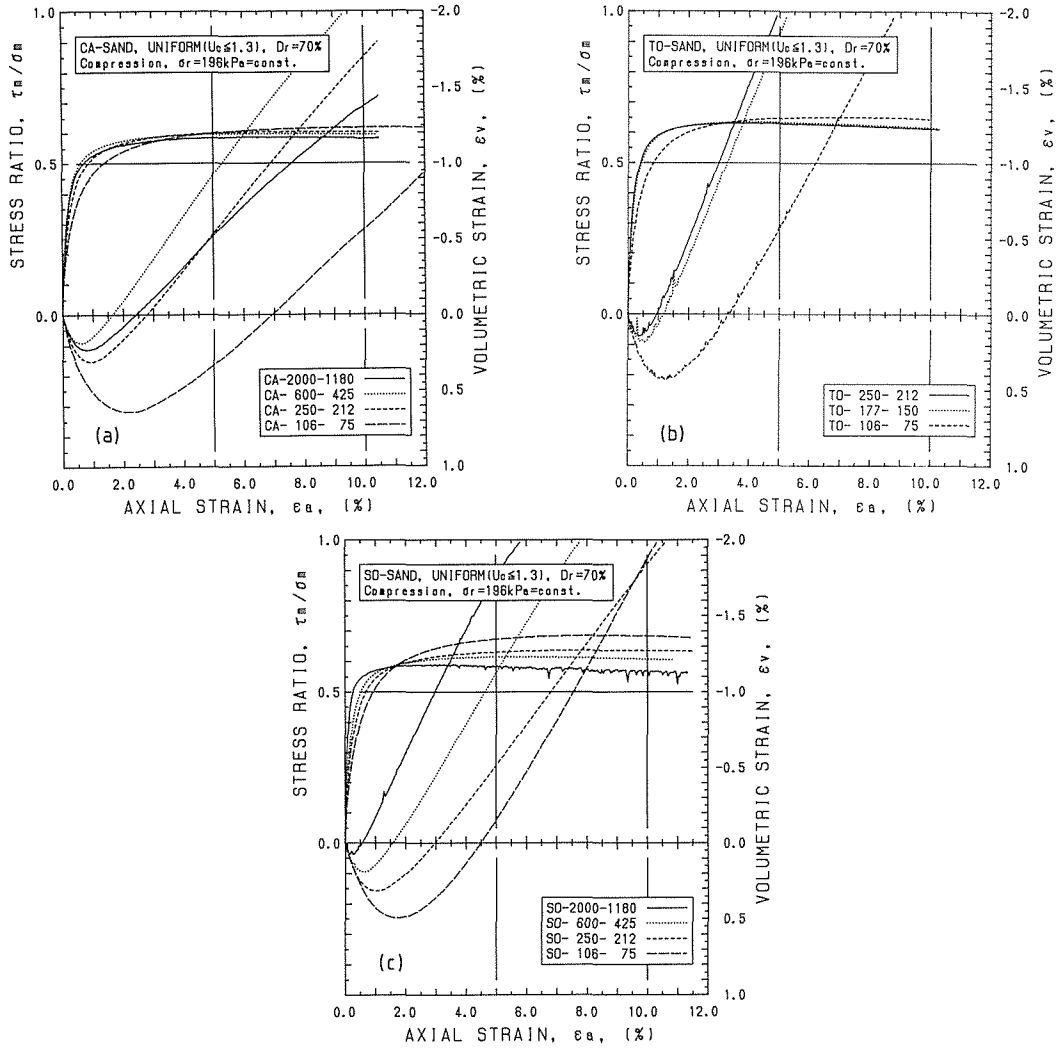


図3　応力ーひずみ関係；(a)珪砂A，(b)豊浦砂，(c)相馬砂

るため，等方圧密時の変形挙動，せん断初期の変形挙動，ダイレイタンシー挙動，せん断破壊時の強度特性および変形特性に着目し，それらと砂の生得的性質との関係について分析している。

3. 1　圧密時の変形特性

三軸試験のせん断応力を載荷する前の圧密過程において，有効拘束圧 19.6 kPa の等方圧密されている供試体は，等方有効拘束圧 196 kPa まで圧密される。この間に測定された軸ひずみ ε_{ac}，および体積ひずみ ε_{vc} と最大粒径 D_{max}，均等係数 Uc との関係をそれぞれ図4（a，b，c），図5（a，b，c）に示す。

D_{max} の増大に対しては発生する軸ひずみ量は単調に減少するが(図4(a))，体積ひずみ量は減少した後 $D_{max}=300\,\mu m$ 付近を境に増加に転じている（図5(a)）。ここで注意しなければならないのは，D_{max} が大きくなるにつれて土粒子と土粒子の間にメンブレンが貫入する割合が大きくなるために排水量が増大し，体積変化が実際の体積変化よりも大きく測定されてしまうことである（メンブレン貫入効果)。このことは，D_{max} が大きくなると体積ひずみ量が軸ひずみ量の 10 倍を越え

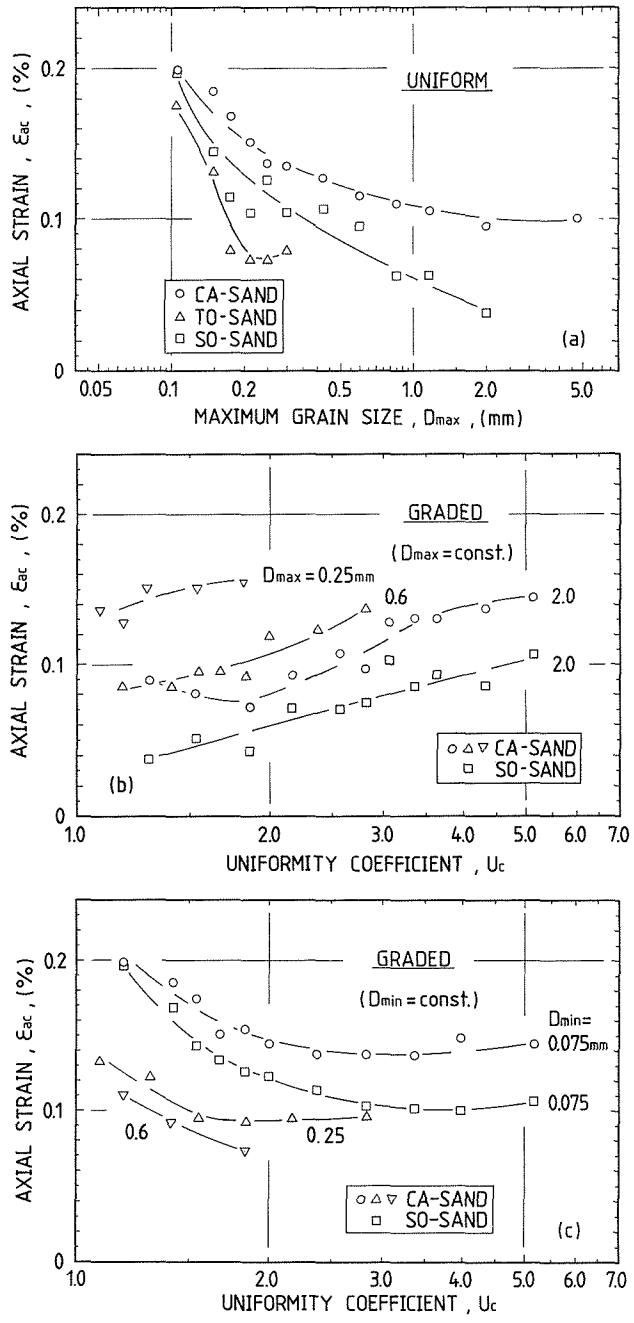


図4 圧密時の軸ひずみ量；(a)均等粒径試料，(b, c)混合粒径試料

ていることからも明かである。したがって，以下において圧密時の変形量は発生した軸ひずみに基づいて議論している。

［Uniform Sample］ 均等粒径試料の圧密時の変形特性については以下のような傾向が読み取れる。

圧密時変形量 ε_{ac} は最大粒径 D_{max} が小さくなるにつれて大きくなり，また，珪砂 A，相馬砂，

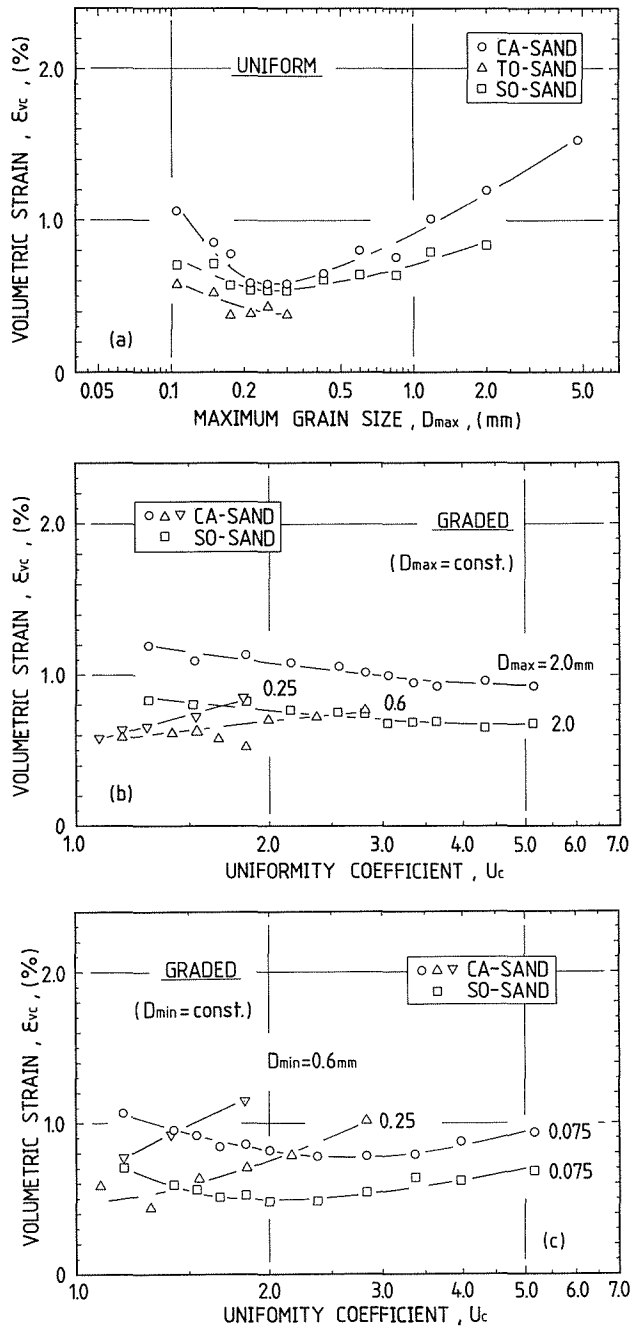


図5 圧密時の体積ひずみ量；(a)均等粒径試料，(b，c)混合粒径試料

豊浦砂の順に ε_{ac} は大きいという傾向がある。また，D_{max} との間には，ε_{ac} と初期間隙比 e_i は類似した変化傾向を示し，e_i が大きいほど ε_{ac} も大きいという相関が認められる（図2(a)，参照）。このような傾向が得られる理由としては以下のようなことが考えられる。

1）土粒子の破砕の影響が考えられるが，一般に土粒子は寸法が大きいほど内部の欠陥が増大し，破砕し易くなることが知られている。これについては前報[2]で説明した通りである。しかし，

圧密変形量は粒子寸法の増大にともない逆に減少していること，また破砕しにくい相馬砂の方が豊浦砂よりも変形が大きいことなどから，本研究における圧力レベルでは圧密変形に及ぼす粒子自身の破砕の影響は考慮しなくても良いと思われる。

2）間隙比が大きいことは土粒子の周囲の空間が広いことを意味しているので，土粒子が再配列するときの移動量も大きくなり，その結果として圧密変形が大きくなると推定できる。

3）土粒子が角張っているほど粒子同士の接点は不安定で，粒子の角が欠損する程度の破砕が生じ易くなるだろう。したがって，土粒子自身の形状が圧密変形に及ぼす影響を考慮した場合，粒子が角張っているものほど圧密変形が大きくなると推定できる。

4）弾性球の接触問題に基づくと，土粒子の形状と弾性係数が等しく粒子配列構造が類似していれば，弾性的な圧密量は土粒子の寸法に依存しないことがわかる[4] しかし，土粒子寸法が小さくなることは単位体積当りの接点数の増加を意味するので，粒子が再配列する割合が高くなり変形が生じ易くなると考えられる。

以上を総合すると，等方圧密時の変形量に及ぼす土粒子形状や粒子寸法などの影響は，最大・最小間隙比に及ぼすそれらの影響と類似している[2]。したがって，均等係数が小さな均等粒径試料において相対密度を等しくした場合，等方圧密時の変形の程度は初期間隙比の大きさによってある程度説明できるようである。

[Graded Sample] 図4（b，c）に示されている試験結果をまとめると以下のようである。

1）均等係数 Uc に対する圧密時の変形量 ε_{ac} の変化傾向は最大粒径 D_{max} が一定の場合と最小粒径 D_{min} が一定の場合で異なっている。

したがって，ε_{ac} に及ぼす Uc の影響は小さいと考えられる。D_{max} が一定の場合では Uc が増大すると構成粒子の寸法が小さくなって行くので，角張り度は増大する。そうすると D_{max} が一定の場合には変形量は大きくなると考えられる。一方，D_{min} が一定の場合では逆の理由から Uc の増大とともに変形が小さくなって行くのであろう。

2）図2（b，c）が示すように，初期間隙比 e_i は Uc が増大すると一様に減少する傾向があるが，圧密変形量 ε_{ac} はこれに対応していない。

したがって，粒径分布が均一な場合と異なり，均等係数が広範に変化する場合には初期間隙比と圧密時の変形量との間に相関関係が存在しない。

3．2 せん断初期の変形特性

せん断初期の剛性を表すパラメータとして，割線係数 E'_{50} をせん断変形初期の $\varepsilon_a \sim \tau_m/\sigma_m$ 関係から算出して図6（a，b，c）に示している。

[Uniform Sample] 図6(a)より，次の傾向があることがわかる。

最大粒径 D_{max} の増大とともに剛性 E'_{50} は増大し，豊浦砂，相馬砂，珪砂 A の順に E'_{50} は大きい。

E'_{50} が大きいことはせん断変形量が小さいことを意味するので，これらの傾向は圧密時の変形特性とよく対応している。すなわち強度が破壊時の半分程度しか動員されていないせん断初期の範囲では，等方圧密時と同様に剛性は初期間隙比 e_i との間によい相関のあることが指摘できる。ただし，珪砂 A の場合には粒子寸法の大きい領域で E'_{50} の減少がみられ，若干の粒子破砕が生じている可能性があることから，その影響も無視することはできないと考えられる。

[Graded Sample] 図6（b，c）から剛性に及ぼす均等係数の影響を読み取ることができる。

最大粒径 D_{max} を一定とした場合と最小粒径 D_{min} を一定とした場合とで剛性 E'_{50} と均等係数 Uc の相関が異なる。また，初期間隙比 e_i との間にも一義的な関係がみられない。

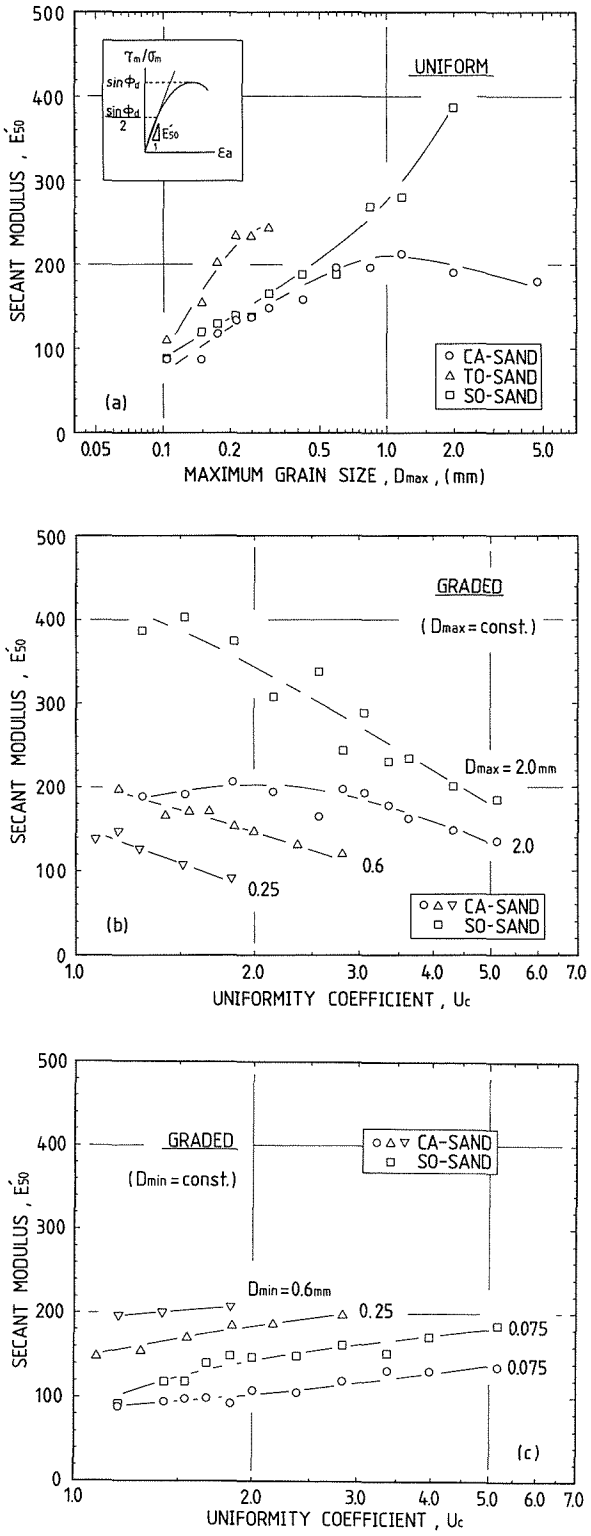


図6 せん断剛性(割線係数)；(a)均等粒径試料，(b, c)混合粒径試料

すなわち，圧密時の変形と同様に初期せん断剛性についても均等係数は影響を及ぼさないと考えて良い。

3. 3　ダイレイタンシー特性

体積変化の傾向は，せん断過程において観察される最大の体積ひずみ ε_{vcv} に着目して調べている。せん断載荷時には有効拘束圧を一定に保っているため，メンブレン貫入による体積ひずみの測定誤差は考慮しなくてよい。

[Uniform Sample][Graded Sample]

図7（a，b，c）は体積変化量 ε_{vcv} と最大粒径 D_{max} あるいは均等係数 Uc との関係を示している。

粒度分布の相違によらず体積収縮量 ε_{vcv} はせん断剛性を表すパラメータ E'_{50} とは全く逆の変化を示している。

したがって，せん断応力の増加にしたがってまず現われる負のダイレイタンシー変形量はせん断剛性の低下とともに大きくなることがわかる。ただし，珪砂 A の大粒径部分では顕著な体積収縮が認められることから，粒子破砕はせん断変形よりもダイレイタンシー特性に，より大きな影響を及ぼすと推定できる。

せん断変形特性が変化すると，それに呼応してダイレイタンシー特性も同じような傾向で変化することがわかった。したがって，体積ひずみ増分とせん断ひずみ増分の比をとることによって，初期間隙比の影響などは現われなくなるかも知れない。多くの研究者は，エネルギー原理に基づいて誘導される体積ひずみとせん断ひずみの増分比と，せん断・垂直応力比との関係式を軸に，粒状体の変形挙動のモデル化を試みている。本研究の結果は，粒度分布が変化する場合でも応力比—ひずみ増分比関係式によって，変形挙動をある程度一義的に説明できる可能性を示唆していると思われる。

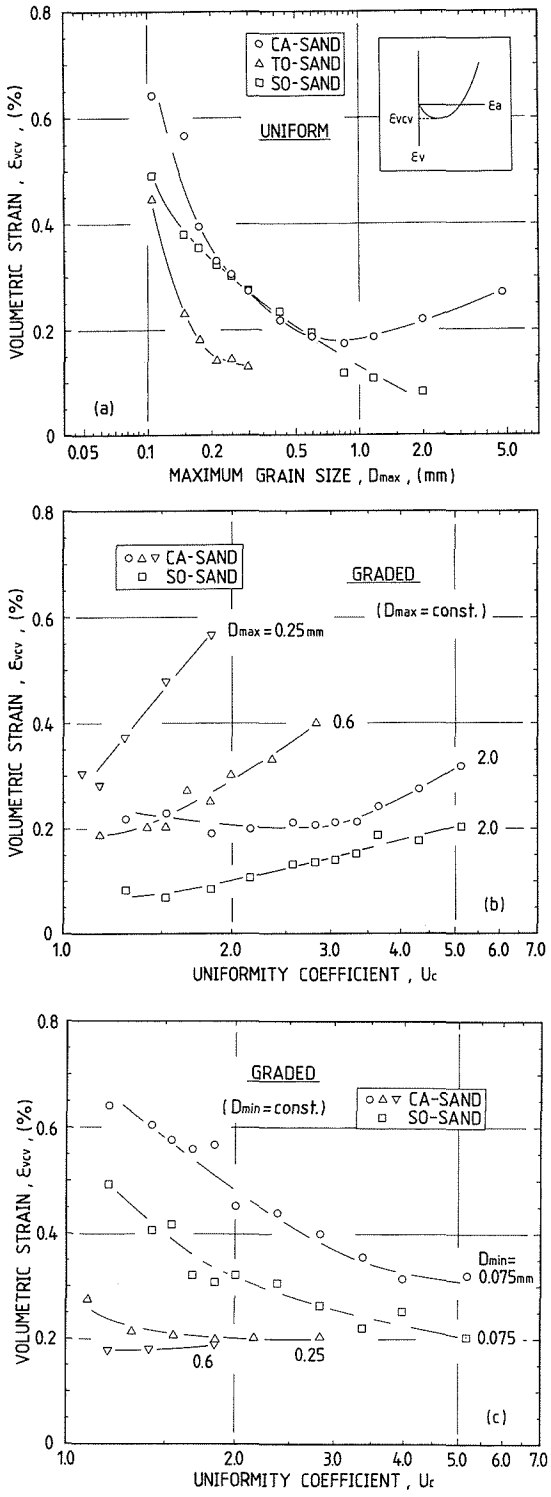


図7　せん断時における最大の体積収縮量；
(a)均等粒径試料，(b，c)混合粒径試料

3. 4　せん断破壊強度特性

均等粒径試料について内部摩擦角 ϕ_d と最大粒径 D_{max} の関係を図 8 (a)に，混合粒径試料について ϕ_d と均等係数 Uc との関係を図 8 (b, c) に示している。

[Uniform Sample] 図 8 (a)より，ϕ_d と粒子寸法について次の傾向がわかる。土粒子寸法 D_{max} が大きくなると一般に内部摩擦角 ϕ_d は減少する傾向にある。また，相馬砂，豊浦砂，珪砂 A の順に ϕ_d は大きい。

このような傾向については以下のように説明できる。

1) 第一に土粒子の破砕性の影響が考えられる。前報[2]で説明したように，土粒子個々の破砕強度は土粒子寸法の増大とともに減少する，また，相馬砂，豊浦砂，珪砂 A の順に破砕しにくい。このように，粒子が破砕しにくいほど内部摩擦角は大きいといえる。

2) 粒子形状の影響も認められる。すなわち，D_{max} の増大にともない角張り度の減少が著しい。

豊浦砂や相馬砂の方が珪砂 A よりも急激な強度低下傾向を示すことは，粒子形状の影響を示唆するものと考えられる。

3) 図 2 (a)が示すように，粒子寸法の増大とともにせん断開始時の間隙比は減少しており，この点からは土粒子寸法の増大にともなう強度の増加が期待される。しかし，試験結果は逆に強度の低下傾向を示している。したがって，土粒子の寸法や形状を考慮しないで砂質土の破壊強度を間隙比によって一義的に説明することは難しいと考えられる。

[Graded Sample] 図 8 (b, c) に示す内部摩擦角 ϕ_d と均等係数 Uc の関係から次のように言える。

珪砂 A については，最大粒径 D_{max} あ

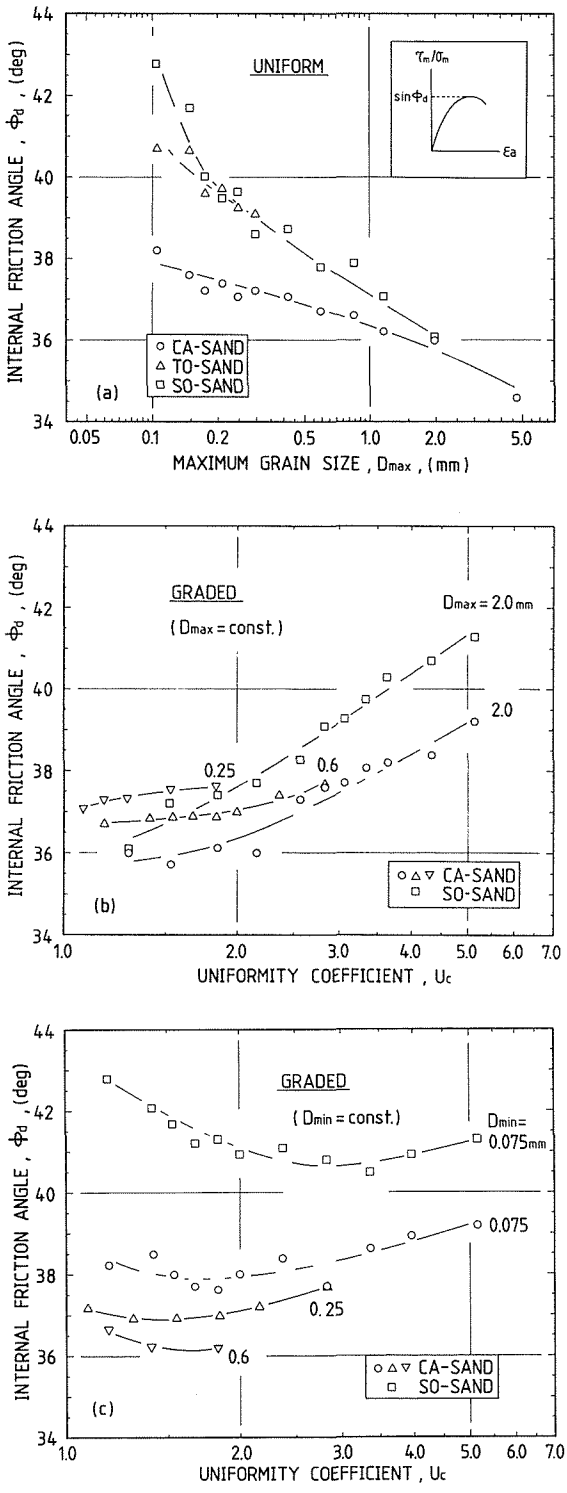


図 8　せん断破壊時の内部摩擦角；
(a)均等粒径試料，(b, c)混合粒径試料

るいは最小粒径 D_{min} が一定の場合でも均等係数 Uc の増加にともなって強度が増大することが明かである。

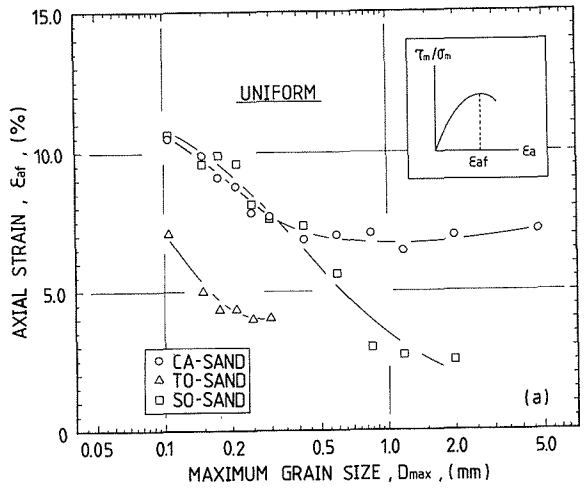
したがって，破壊強度における Uc の影響は著しく，Uc の増加とともに ϕ_d も増加するといえる。しかし，相馬砂については D_{min} が一定の場合には Uc とともに必ずしも強度が増加するという傾向は見られない。これは D_{min} が一定試料では，Uc の増加とともに粒形の丸い大粒径成分が増加するために強度が低下する傾向が現われ，これら2つの因子が及ぼす影響が打ち消し合っているためと考えられる。

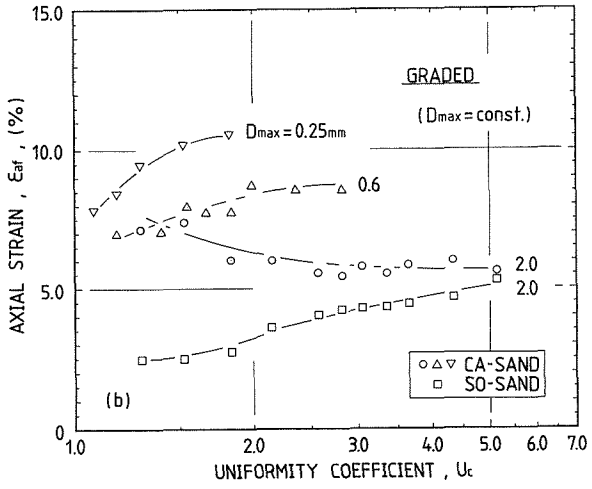
3. 5 破壊時の変形特性

一般に砂は変形を受けると硬化を生じ，ひずみの増加にともない応力も増加して行く。そうして応力はピークに達した後，軟化現象により減少してゆく。このピーク時に発揮されている応力が破壊強度で，内部摩擦角 ϕ_d をパラメータとして前節で議論した。このピーク時までに生じる変形の大きさについては，この節ではピーク時における軸ひずみ ε_{af} をとり，その特性について検討している。

[Uniform Sample] [Graded Sample] 最大粒径 D_{max} および均等係数 Uc に対して破壊時の軸ひずみ ε_{af} の変化を示したのが図9（a, b, c）である。この図から次のことが言える。

破壊時変形量 ε_{af} の変化傾向は図4に示す圧密時変形量 ε_{ac}，図7に示すダイレイタンシー量 ε_{vcv} の変化傾向と非常に類似しており，また図6に示す E'_{50} とも強い相関が認められる。ε_{af} は破壊時の変形特性を表す量であるが破壊強度 ϕ_d との関連がほとんど見られない（図8参照）。したがって，ε_{af} は ε_{ac} などと同様に間隙比，粒子形状，粒





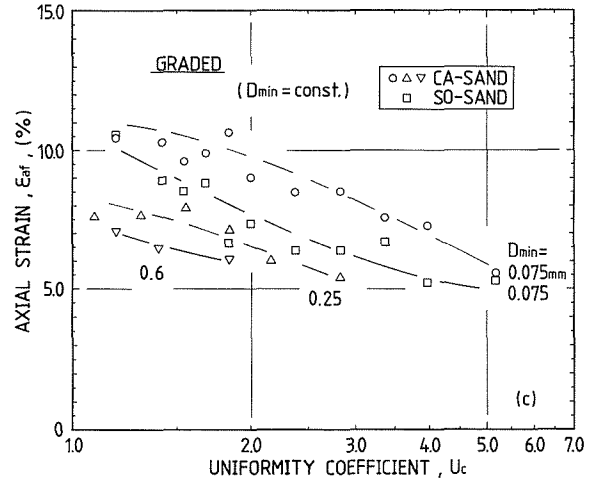


図9 せん断破壊時の軸ひずみ量；
(a)均等粒径試料，(b, c)混合粒径試料

子寸法の影響を強く受け，Uc や粒子破砕性の影響はあまり受けないと考えられる。

3. 6　変形破壊挙動の一般的な特性

図 10（a，b，c）には粒度調整以前の自然状態の豊浦砂について，密度と変形•破壊挙動の関係を種々の相対密度 Drc について調べた結果を整理して示している（詳細は文献 5）参照)。これらの図を検討すると，圧密変形特性，せん断変形特性は互いに密接な関係があり，「破壊強度が高いほど破壊に至るまでの変形は小さく，剛性は大きい」と，明瞭な関係がある。また，図示していないが拘束圧が異なる場合，拘束圧が低いほど内部摩擦角は大きく，変形は小さく，剛性が高くなることが知られている[6]。よって，拘束圧の相違による変形•破壊挙動の変化について上記と同様な傾向が指摘できる。

一方，これまで示してきた変形・破壊挙動の比較からも明らかなように，本研究のように土粒子寸法，形状，破砕強度，および粒度の異なる砂質土を対象に議論する場合，強度が高くても必ずしもそれに対応して剛性も高いわけではない。すなわち，変形，剛性，および破壊強度に著しい影響を及ぼす，砂粒子固有の性質はそれぞれ違っているのである。たとえば，粒子の形状については，角張り度が大きいほど変形は大きく，剛性は小さい，しかし，強度は増大するという傾向がある。

以上のようなことを考えると，破壊強度のみを原位置試験から推定したり，室内試験で測定したりして得られる強度特性から変形特性を直接推定することには無理があると言えよう。

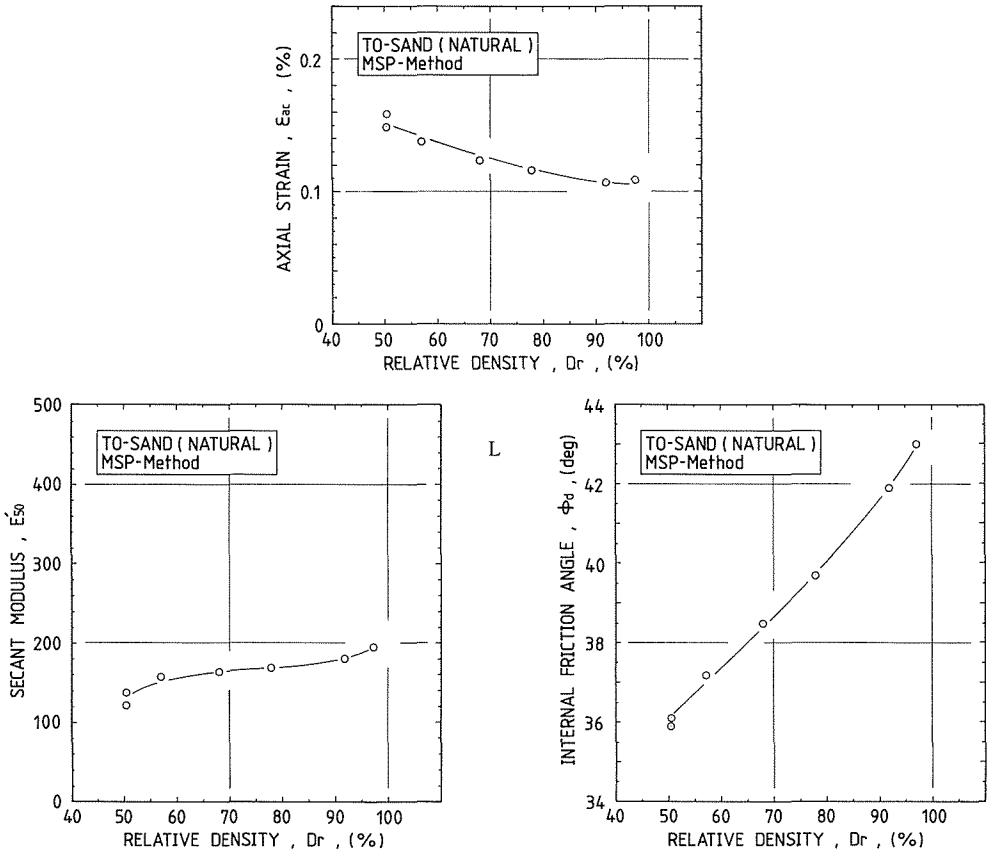


図 10　せん断破壊時の一般的特性

4. ま　と　め

本研究では，3種類の砂を調整して作成した試料について三軸せん断試験を実施し，砂の力学的性質を調べた。砂の圧密時の変形特性，せん断初期のせん断剛性，ダイレイタンシー特性，破壊時の変形・強度特性について詳細に検討した結果，それらに及ぼす砂の生得的性質の影響は以下のように取りまとめることができる。

1）圧密時の圧縮量 ε_{ac}，初期せん断剛性 E'_{50}，ダイレイタンシー量 ε_{vcv} の間には相互に密接な関係があり，試料の間隙比，角ばり度，粒子寸法によって，ほぼ同じように影響を受ける。すなわち，粒子が角張っていて，粒子寸法が小さいほど変形量は大きく剛性は低下するといえ，均等な試料で，相対密度が一定の場合には初期間隙比とよい相関が認められる。一方，均等係数の顕著な影響は認められない。ただし，粒子の破砕性の影響は E'_{50} と ε_{vcv} に若干みられる。

2）破壊強度は土粒子が破砕しにくいほど，粒子が角ばっているほど，均等係数が大きいほど大きいという傾向がある。

3）「破壊強度が高ければ変形は小さく，剛性は高い」という関係が広く信じられていて，種々の条件にある特定の砂についてはこのような傾向が認められる。ところが，本研究のように構成鉱物が同じでも粒子形状や粒度分布が異なる場合には，必ずしもこの傾向は当てはまらず，むしろ逆の傾向が現われる可能性がある。

砂の力学的性質に影響を及ぼす一次的性質を表1にまとめている。

表 1　力学的性質に及ぼす生得的性質の影響

	(粒子寸法大) (構成鉱物脆い) 破砕性が大	(角張り度大) (粒子寸法小) (均等係数小) 間隙比が大	角張り度が大	粒子寸法が大	均等係数が大
ei	−	−	◎増大	○減少	○減少
εac	△増大	○増大	◎増大	○減少	−
E50'	△減少	○減少	◎減少	○増大	−
εvcv	△増大	○増大	◎増大	○減少	−
φd	◎減少	−	○増大	−	◎増大
εaf	△増大	○増大	◎増大	○減少	−

※以上は相対密度が一定の場合
※◎影響大，○影響あり，△影響小

本研究は，文部省「科学研究助成金・一般研究(C)（No. 63550355）奨励研究(A)（No. 63750487）」の補助を受けて行ったものである。

文　　献

1）例えば，土質工学会（1986）："粗粒材料の変形と強度".
2）三浦均也，松本吉英，長谷川敬寿，土岐祥介：北海道大学工学部研究報告，第146号，pp.
3）Miura, S. and Toki, S. (1982): Soils and Foundations, Vol. 22, No. 1, pp. 61-77.
4）Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N. (1951): " Theory of Elasticity," 2nd ed. Mc-Graw Hill, pp. 372-377.
5）阿部芳三，高月　修（1982）：学士論文，北海道大学工学部土木工学科.
6）三浦均也　(1981)：学士論文,北海道大学工学部土木工学科.