HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	変位起振される対称な曲線辺を有する扇形板の定常応答
Author(s)	田中, 克明; 山田, 元; 小林, 幸徳
Citation	北海道大學工學部研究報告, 149, 83-89
Issue Date	1990-02-28
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42216
Type	departmental bulletin paper
File Information	149_83-90.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第149号（平成2年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University. No. 149 (1990)

変位起振される対称な曲線辺を有する扇形板の定常応答

田中克明*　山田元*　小林幸徳*

（平成元年9月30日受理）

Steady-State Response of a Damped Cantilever Annular Sector Plate with Curved Radial Edges

Katsuaki TANAKA, Gen YAMADA and Yukinori KOBAYASHI

(Received September 30, 1989)

Abstract

The steady-state response is presented for a damped cantilever annular sector plate with curved radial edges by the Ritz method. The plate is transformed into a regular sector plate with unit outer radius by a transformation of variables. The transverse displacement of the transformed plate is approximately expressed in series of the power function. Substituting the expression for the kinetic and strain energies of the plate into Lagrange equation, the dynamic response of the plate is derived analytically. The numerical examples are calculated for annular sector plates with symmetrically curved radial edges. The effects of the damping factor and observation point are studied on the steady state responses of the plate.

1. 緒　　言

本論文では，対称に曲がった放射辺を有する片持扇形板の固定端に面外調和起振変位が作用するときの定常応答をリッツ法を用いて解析する。曲がった放射辺を有する扇形板は，通信衛星のパラボラアンテナ，送風機や扇風機の羽根，プロペラ等，産業界の各分野で広く用いられている。このため，構造物の軽量化と安全性の観点から，その振動特性を論じている研究も数多く報告されているが，ここで取扱うような，曲がった放射辺を有する片持扇形板の振動[(1)~(5)]に関しては著者らの研究があるにすぎない。

この研究のために，曲がった放射辺を有する片持扇形板を変数変換によって，単位の外半径を有する扇形板に変換する。変換された板の変位をべき関数で近似することによって，運動エネルギーとひずみエネルギーを解析的に求める。この際，板は内部減衰を有するものとし，複素ヤング率を用いる。これらをラグンジュの方程式に代入することによって，未知の時間関数に関する方程式を導き，調和変位で起振される曲がった扇形板の定常応答を求める。ここでは対称に曲がった放射辺を有する片持扇形板について数値計算を行ない，内部減衰比と観測位置を変えて定常応答について検討している。

*機械工学第二学科　機械力学講座

2. 理 論 解 析

板の中央面内に直角座標 $(x,\ y)$ をとり，これと垂直な方向に z 軸をとる。板の面外変位を $\mathrm{W}(x,\ y,\ t)$ とし，その方向に調和起振変位 $\mathrm{Z}(x,\ y,\ t)$ が作用するとき，板の運動エネルギーとひずみエネルギーは，次のように表される。

$$T=\frac{1}{2}\rho h\iint_S(\mathrm{Z},_t+\mathrm{W},_t)^2dxdy \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}U&=\frac{1}{2}\tilde{D}\iint_S\{\mathrm{W}_{XY}\}^T[L]\{\mathrm{W}_{XY}\}dxdy\\ \{\mathrm{W}_{XY}\}^T&=\{\mathrm{W},_{xx}\ \mathrm{W},_{yy}\ \mathrm{W},_{xy}\}\\ [L]&=\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1-\nu)\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ここで，ρ は密度，h は板厚，ν はポアソン比である。$\tilde{D}(x,\ y)$ は，板の曲げこわさで，次の式で与えられる。

$$\tilde{D}(x,\ y)=\tilde{E}h^3/\{12(1-\nu^2)\} \tag{3}$$

ここで，$\tilde{E}$ は，複素ヤング率で，内部減衰の大きさを表わすパラメータ δ_E を用いて次のように表される。

$$\tilde{E}=E(1+j\delta_E) \tag{4}$$

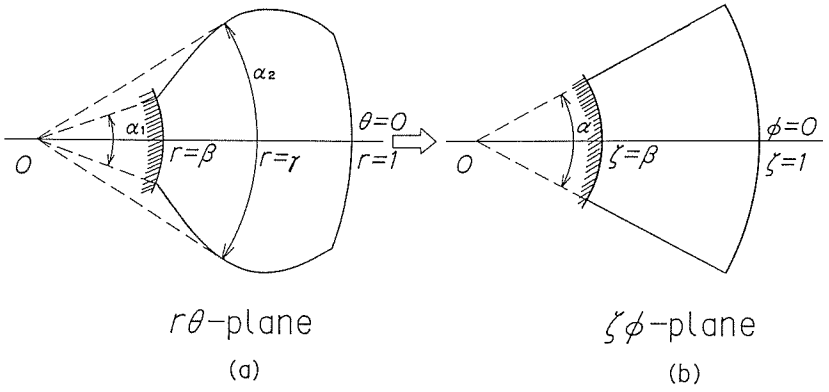

図1 対称に曲がった放射辺を有する片持扇形板

次に，図1(a)に示すように，無次元化された極座標，$x/a=r\cos\theta$，$y/a=r\sin\theta$ を導入することによって，ベクトル $\{\mathrm{W}_{XY}\}$ は次のように変換される。

$$\{\mathrm{W}_{XY}\}=(1/a^2)[M]\{\mathrm{W}_{R\theta}\}$$

$$\{\mathrm{W}_{R\theta}\}^T=\{\mathrm{W},_{rr}\ \mathrm{W},_{\theta\theta}\ \mathrm{W},_{r\theta}\ \mathrm{W},_r\ \mathrm{W},_\theta\}$$

$$[M]=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \frac{1}{r^2}\sin^2\theta & -\frac{1}{r}\sin2\theta & \frac{1}{r}\sin^2\theta & \frac{1}{r^2}\sin2\theta\\ \sin^2\theta & \frac{1}{r^2}\cos^2\theta & \frac{1}{r}\sin2\theta & \frac{1}{r}\cos^2\theta & -\frac{1}{r^2}\sin2\theta\\ \frac{1}{2}\sin2\theta & -\frac{1}{2r^2}\sin2\theta & \frac{1}{r}\cos2\theta & -\frac{1}{2r}\sin2\theta & -\frac{1}{r^2}\cos2\theta\end{bmatrix} \tag{5}$$

ここで a は，扇形板の外半径，b は内半径であり，変数 $\beta=b/a$ は，扇形板の内外半径比である。曲がった放射辺を有する扇形板を，図1(b)に示すように，変数変換 $r=r(\zeta,\ \varphi)$，$\theta=\theta(\zeta,\ \varphi)$ を施すことによって，標準形の扇形板に変換する。この場合ベクトル $\{W_{R\theta}\}$ は，次式で表される。

$$\{W_{R\theta}\}=[N]\{W_{Z\Phi}\}$$

$$\{W_{Z\Phi}\}^T=\{W,_{\zeta\zeta}\ W,_{\varphi\varphi}\ W,_{\zeta\varphi}\ W,_{\zeta}\ W,_{\varphi}\}$$

$$[N]=\begin{bmatrix} r,_{\zeta}^2 & \theta,_{\zeta}^2 & 2r,_{\zeta}\theta,_{\zeta} & r,_{\zeta\zeta} & \theta,_{\zeta\zeta} \\ r,_{\varphi}^2 & \theta,_{\varphi}^2 & 2r,_{\varphi}\theta,_{\varphi} & r,_{\varphi\varphi} & \theta,_{\varphi\varphi} \\ r,_{\zeta}r,_{\varphi} & \theta,_{\zeta}\theta,_{\varphi} & r,_{\zeta}\theta,_{\varphi}+r,_{\varphi}\theta,_{\zeta} & r,_{\zeta\varphi} & \theta,_{\zeta\varphi} \\ 0 & 0 & 0 & r,_{\zeta} & \theta,_{\zeta} \\ 0 & 0 & 0 & r,_{\varphi} & \theta,_{\varphi} \end{bmatrix}^{-1} \tag{6}$$

ここで，対称で凸形に曲がった放射辺を有する扇形板の変数変換式は次式で与えられる。

$$r=\zeta,\qquad \theta=[\alpha_2/\alpha+\{(\alpha_1-\alpha_2)(\zeta-\gamma)^2\}/\{(\beta-\gamma)^2\alpha\}]\varphi \tag{7}$$

α_1 は固定部の開き角，α_2 は $r=\gamma$ での最大開き角，α は変換された扇形板の開き角である(図1参照)。この場合，式(6)のマトリックス [N] は次のように表される。

$$[N]=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\theta,_{\zeta}^2}{\theta,_{\varphi}^2} & -2\dfrac{\theta,_{\zeta}}{\theta,_{\varphi}} & 0 & \dfrac{\theta,_{\zeta\zeta}}{\theta,_{\varphi}}+2\dfrac{\theta,_{\zeta}\ \theta,_{\zeta\varphi}}{\theta,_{\varphi}^2} \\ 0 & \dfrac{1}{\theta,_{\varphi}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\theta,_{\zeta}}{\theta,_{\varphi}^2} & -\dfrac{1}{\theta,_{\varphi}} & 0 & -\dfrac{\theta,_{\zeta\varphi}}{\theta,_{\varphi}^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{\theta,_{\zeta}}{\theta,_{\varphi}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\theta,_{\varphi}} \end{bmatrix} \tag{8}$$

ここで，変換のヤコビアン J は，

$$\begin{aligned} J&=r,_{\zeta}\cdot\theta,_{\varphi}-r,_{\varphi}\cdot\theta,_{\zeta} \\ &=\gamma^2\alpha_1+\beta(\beta-2\gamma)\alpha_2-2\gamma(\alpha_1-\alpha_2)\zeta+(\alpha_1-\alpha_2)\zeta^2 \end{aligned} \tag{9}$$

で与えられる。従って，変換後の運動エネルギーとひずみエネルギーは次のように表される。

$$\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}\rho h\omega^2\iint_S(Z,_{\tau}+W,_{\tau})^2\zeta\ Jd\zeta d\varphi \\ &=\frac{1}{2}\frac{D}{a^2}\Omega^2\iint_S(Z,_{\tau}^2+2Z,_{\tau}\cdot W,_{\tau}+W,_{\tau}^2)\zeta\ Jd\zeta d\varphi \end{aligned} \tag{10}$$

$$U=\frac{1}{2}\frac{\tilde{D}}{a^2}\iint_S\{W_{Z\Phi}\}^T[N]^T[M]^T[L][M][N]\{W_{Z\Phi}\}\zeta\ Jd\zeta d\varphi \tag{11}$$

ここで，$D=Eh^3/\{12(1-\nu^2)\}$ であり，$\tau=\omega t$ は無次元時間，Ω は無次元振動数パラメーターで次のように定義される。

$$\Omega^2=\rho\ h\ a^4\omega^2/D \tag{12}$$

変換された扇形板の変位は，許容関数 $Z_m(\zeta)$，$\Phi_n(\varphi)$ および未知の時間関数 $q_{mn}(\tau)$ を用いて，次式で近似できる。

$$W(\zeta,\ \varphi,\ \tau)=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}Z_m(\zeta)\cdot\Phi_n(\varphi)\cdot q_{mn}(\tau) \tag{13}$$

本論文では許容関数として，次のようなべき関数を用いる。

$$Z_m(\zeta)=(\zeta-\beta)^{m+2},\quad \Phi_n(\varphi)=\varphi^n \tag{14}$$

式(14)は，扇形板の固定部の境界条件を満足している。式(13)を式(10)および(11)へ代入することにより，運動エネルギーとひずみエネルギーは

$$T=\frac{1}{2}\frac{D}{a^2}\Omega^2\left[\iint_S Z^2_{,\tau}\zeta\ Jd\zeta d\varphi+2Z_{,\tau}\sum_{k=0}^{M}\sum_{\ell=0}^{N}B_{k\ell}\dot{q}_{k\ell}(\tau)\right.$$
$$\left.+\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{M}\sum_{\ell=0}^{N}M_{mn}^{(k\ell)}\dot{q}_{mn}(\tau)\dot{q}_{k\ell}(\tau)\right] \tag{15}$$

$$U=\frac{1}{2}\frac{\tilde{D}}{a^2}\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{M}\sum_{\ell=0}^{N}K_{mn}^{(k\ell)}\cdot q_{mn}(\tau)\cdot q_{k\ell}(\tau) \tag{16}$$

となる。ここで，式中の係数は次のように表される。

$$B_{k\ell}=\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\int_\beta^1 Z_k(\zeta)\cdot\Phi_\ell(\varphi)\cdot\zeta\ Jd\zeta d\varphi \tag{17}$$

$$M_{mn}^{(k\ell)}=\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\int_\beta^1 Z_m\,\Phi_n\,Z_k\,\Phi_\ell\,\zeta\ Jd\zeta d\varphi \tag{18}$$

$$K_{mn}^{(k\ell)}=\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\int_\beta^1\{\Psi_{mn}\}^T[N]^T[M]^T[L][M][N]\{\Psi_{k\ell}\}\zeta\ Jd\zeta d\varphi \tag{19}$$

式(19)中のベクトル$\{\Psi_{mn}\}$は

$$\{\Psi_{mn}\}^T=\{Z''_m\cdot\Phi_n\quad Z_m\cdot\Phi''_n\quad Z'_m\cdot\Phi'_n\quad Z'_m\cdot\Phi_n\quad Z_m\cdot\Phi'_n\} \tag{20}$$

であり，関数$Z_m(\zeta)$，$\Phi_n(\varphi)$に付した記号$'$はζあるいはφに関する微分を表す。また，式(19)中の二重積分は解析的には求められないので，ガウス・ルジャンドルの積分公式を用いて数値積分により求める。

運動エネルギー(15)とひずみエネルギー(16)をラグランジュの方程式

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{k\ell}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q_{k\ell}}+\frac{\partial U}{\partial q_{k\ell}}=0\qquad(k=1,2,\cdots,M\ ;\ \ell=1,2,\cdots,N) \tag{21}$$

へ代入することによって，マトリックス表示された運動方程式が得られる。

$$\Omega^2[M_{mn}^{(k\ell)}]\{\ddot{q}_{mn}(\tau)\}+(1+j\delta_E)[K_{mn}^{(k\ell)}]\{q_{mn}(\tau)\}=-\Omega^2Z_{,\tau\tau}\{B_{k\ell}\} \tag{22}$$

今，扇形板の固定部に$Z=Ae^{j\tau}$の調和起振変位が作用するとき，式(22)を時間関数$q_{mn}(\tau)$について解くことによって，定常応答

$$\{q_{mn}(\tau)\}=\Omega^2A\left[(1+j\delta_E)[K_{mn}^{(k\ell)}]-\Omega^2[M_{mn}^{(k\ell)}]\right]\{B_{k\ell}\}e^{j\tau} \tag{23}$$

が求められる。従って，任意の点$(\zeta_1,\ \varphi_1)$における応答変位は

$$\left|\frac{W_{mn}(\zeta_1,\ \varphi_1)}{A}\right|=\left|1+\Omega^2\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}Z_m(\zeta_1)\Phi_n(\varphi_1)\{R_{mn}\}\right| \tag{24}$$

で与えられる。ただし，ベクトル$\{R_{mn}\}$は

$$\{R_{mn}\}=\left[(1+j\delta_E)[K_{mn}^{(k\ell)}]-\Omega^2[M_{mn}^{(k\ell)}]\right]^{-1}\cdot\{B_{k\ell}\} \tag{25}$$

である。

変換された標準形の扇形板の開き角αは，変換前の扇形板の面積と等値することによって次のように与えられる。

$$\alpha=\alpha_2+(\alpha_1-\alpha_2)\{(2\gamma-1)(\gamma-1)-(2\gamma-\beta)(\gamma-\beta)\beta^2+(\gamma/3)(1-\beta^3)\}$$
$$/\{2(1-\beta^2)(\beta-\gamma)^2\} \tag{26}$$

3. 数値計算結果と考察

表1 対称に曲がった放射辺を有する扇形板の固有値の収束状況
($\nu=0.3$, $\alpha_1=40°$, $\beta=0.4$, $\alpha_2=65°$, $\gamma=0.7$)

$m\times n$	Ω					
	1	2	3	4	5	6
5 × 5	7.898	34.58	62.91	102.80	155.01	—
6 × 6	7.875	34.55	62.86	102.46	153.24	197.54
7 × 7	7.859	34.52	62.86	102.40	153.15	197.48

表1は，対称な放射辺を有する扇形板の自由振動の固有値の収束状況を示す。べき級数の項数 $m\times n$ が増加するに従って，固有値は有効数字2〜3桁の範囲で一定の値に収束している。本論文では実用上の精度を考慮して，6×6の項数を採用した。

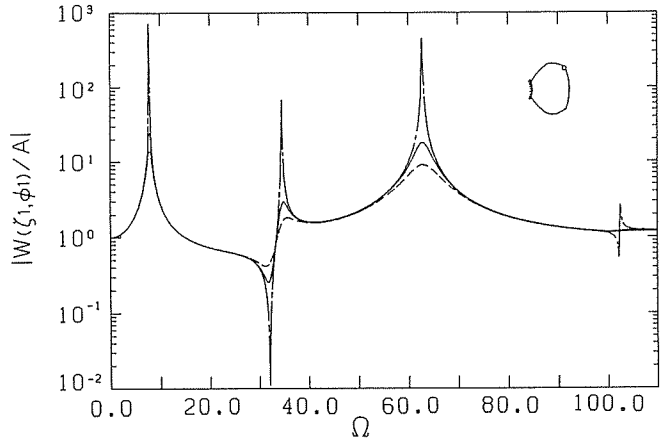

図2 応 答 変 位

$\nu=0.3$, $\alpha_1=40°$, $\beta=0.4$, $\alpha_2=65°$, $\gamma=0.7$, $(\zeta_1,\ \varphi_1)=(1.0,\ 28.2°)$
δ_E ; −−− 0.002, —— 0.05, − − − 0.1

図2は，減衰比 δ_E を0.002, 0.05, 0.1と変化したときの，板の一点 $(\zeta_1,\ \varphi_1)=(1.0,\ 28.2°)$ での応答変位を示す。図中の白丸印が観測点である。一点鎖線で示す，減衰比 $\delta_E=0.002$ の場合は，共振点，反共振点が明瞭に現れているが，減衰比が大きくなると応答ピークが鈍化しているのがわかる。

図3は，$\zeta_1=1.0$ を一定にし，周方向の観測点 φ_1 を変化させたときの応答変位を示す。観測点を変えても共振点は変わらず一致しているが，反共振点は，一点鎖線，実線，破線の順に移動している。

図4は，$\zeta_1=0.7$ を一定にし，図3と同じように φ_1 を変化させた場合の応答変位を示す。板の内部に観測点を設定した場合，一次の反共振点は，一点鎖線，実線，破線の順に現れているが，二次の反共振点は，破線，実線，一点鎖線，の順に現れている。

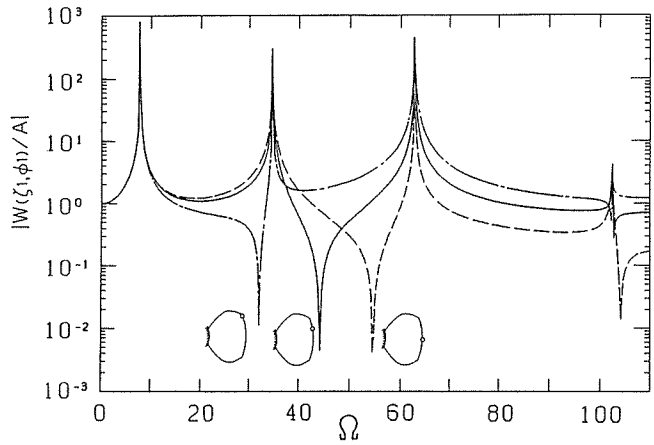

図3 応 答 変 位

$\nu=0.3$, $\alpha_1=40°$, $\beta=0.4$, $\alpha_2=65°$, $\gamma=0.7$, $\delta_E=0.002$,
$(\zeta_1,\ \varphi_1)$; ---(1.0, 28.2°), ——(1.0), 14.2°), ---(1.0, 0.0°))

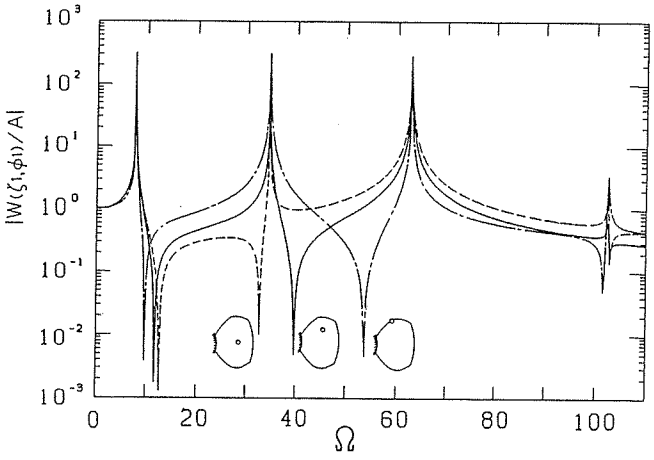

図4 応 答 変 位

$\nu=0.3$, $\alpha_1=40°$, $\beta=0.4$, $\alpha_2=65°$, $\gamma=0.7$, $\delta_E=0.002$,
$(\zeta_1,\ \varphi_1)$; ---(0.7, 28.2°), ——(0.7, 14.2°), ---(0.7, 0.0°))

図5は，共振点での応答変位振幅分布の等高線を示す。図中の実線は共振時の最大応答変化振幅$|W_{max}/A|$を100としたときの変化振幅分布を示している。等高線の最小単位は10としてプロットしている。

図6は，対称な放射辺を有する扇形板の自由振動の固有モードを参考までに示す。図中の実線は節線を示している。図5と図6を重ねて見ることにより，図5で最小等高線である10と10との間の空白の部分は，図6で節線が現れているヶ所であることがわかる。

本研究の数値計算に当たっては，北海道大学大型計算機センターHITAC-M682Hを用いた。

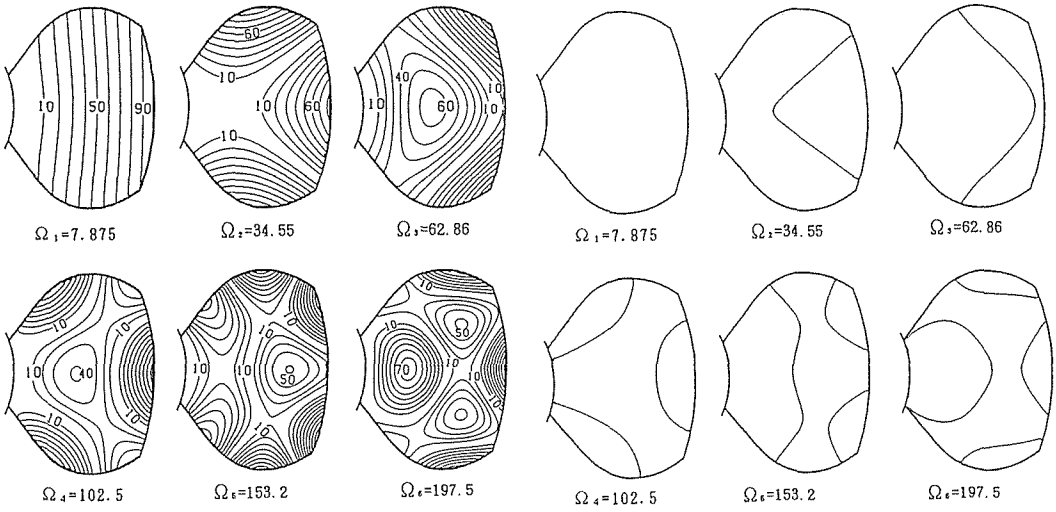

図5 曲がった放射辺を有する対称な扇形板の変化振幅分布($\nu=0.3$, $\alpha_1=40°$, $\beta=0.4$, $\alpha_2=65°$, $\gamma=0.7$, $\delta_E=0.002$)

図6 曲がった放射辺を有する対称な扇形板の固有振動モード($\nu=0.3$, $\alpha_1=40°$, $\beta=0.4$, $\alpha_2=65°$, $\gamma=0.7$)

4. あ と が き

対称に曲がった曲線辺を有する片持扇形状を，単位外半径を有する標準形の扇形板に変換し，リッツ法を適用して調和変位起振される片持扇形板の定常応答を解析した結果，次のような結論を得た。

(1) 内部減衰比 δ_E が小さいと鋭い応答ピークが現れるが，δ_E が大きくなると応答ピークは鈍化する。

(2) 共振点は観測位置を変えても自由振動の固有値と一致し，反共振点は観測点の位置によって変化する。

(3) 変位振幅分布は自由振動モードの節線によって分割される領域内に現れる。

参 考 文 献

1) 田中克明・入江敏博・山田 元：曲がった放射辺を有する片持扇形板の自由振動，日本機械学会論文集，53-485，C(1987)，5.

2) Irie, T., Tanaka, K. and Yamada, G.: Free vibration of a cantilever annular sector plate with curved radial edges, J. Sound Vib., 122-1 (1988), 69.

3) 田中克明・山田 元・小林幸徳・北島有二：曲がった放射辺を有する片持扇形板の定常応答，日本機械学会論文集，55-509，C(1989)，40.

4) Tanaka, K. Yamada, G., Kobayashi, Y. and Miura, S.: Free vibration of a cantilever annular sector plate with curved radial edges and varying thickness, J. Sound Vib. (投稿中).

5) 田中克明・山田 元・小林幸徳・藤堂吉久：変位起振される曲がった放射辺を有する変厚扇形板の定常応答，日本機械学会論文集，(投稿中).