HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	液体に接する円筒殻の基本固有周期略算式の提案
Author(s)	三上, 隆; 芳村, 仁
Citation	北海道大學工學部研究報告, 149, 1-9
Issue Date	1990-02-28
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42219
Type	departmental bulletin paper
File Information	149_1-10.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第149号（平成２年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University. No. 149 (1990)

液体に接する円筒殻の基本固有周期略算式の提案

三上　隆　芳村　仁

（平成元年９月30日受理）

Formulas for Determination of Fundamental Periods of Cylindrical Shells in Contact with Liquid

Takashi MIKAMI and Jin YOSHIMURA

(Received September 30, 1989)

Abstract

The fundamental period of a cylindrical shell in contact with liquid is probably the first item of interest in the dynamic analysis. This paper presents simple practical formulas for estimating the fundamental periods of the cantilever shells in beam-type (n=1) motion. The formulas are obtained by using Dunkerley's approximation in combination with the collocation method developed in the authrs' past work and by considering both the shell mass and the liquid mass. The formulas are applicable to the following types of shells: (1) the liquid is contained within the shell; (2) the shell is submerged in the liquid; and (3) both sides of the shell are in contact with the liquid. A comparison with other solutions suggests that the proposed foumulas provide satisfactory accuracy for a wide range of shells. In addition, the formulas presented are useful not only for a better understanding of the vibration characteristics of the shell but also available for a check on ther numerical methods.

1. まえがき

円筒殻と液体が成す連成系の動的挙動の解明は，石油タンク，原子力プラント，海洋構造物などさまざまな工学分野において重要な問題であり，その中でも固有周期の決定は，構造物の耐震および防振設計をする上での第一ステップである。液体に接する円筒殻は，①殻内部に液体を含む場合（内部問題），②殻外部に液体が存在する場合（外部問題）および③殻の内外に液体が存在する場合（以下では便宜上，混合問題とよぶ）に分類され，その基本固有周期は，通常，離散モデルの固有値解析によって算定されるが，概略の耐震性などを検討するような段階では，比較的簡単でしかもある程度の精度で固有周期を推定できれば実用上十分である。

このような観点から，地震時（円周方向波数ｎ＝1）に対する基本固有周期を推定する略算式として，Housner の剛体動圧力式を利用した略算式[1]，および液体と殻の動的相互作用を考慮した算

土木工学科　構造力学講座

定式[2,3,4]が提案されているが，いずれも内部問題に対するものであり，また殻諸元パラメータも使用上十分な範囲にわたって用意されていないようである。

そこで，本研究では，内部，外部および混合問題として表される液体に接する片持形式の円筒殻を対象として，広範囲の殻諸元に対して適用でき，しかも実用上十分な精度で基本固有周期を算定できる略算式を提案する。略算式は，殻の基本固有周期の特性に影響を及ぼす形状パラメータ（殻厚・半径比と殻の高さ・半径比）および材料パラメータ（液体密度・殻密度比）により表示されており，この略算式によれば，パラメータの変化に伴う周期特性の予測が容易に行える。なお略算式は，液体－円筒殻系を殻の剛性と殻の質量から成る系，殻の剛性と液体の質量から成る系の複合系ととらえ，各系の基本固有周期を合成して求めるDunkerleyの方法[5]により求めた。

2. 液体に接する円筒殻の基礎方程式

図1に示すように，液体高さHと殻の高さLが等しく，一端が剛基礎上に完全に固定され，他端が自由な一様厚さhの円筒殻を考える。E，ν，ρ_s，aをそれぞれ殻の弾性係数，ポアソン比，密度，半径とし，ρ_lを液体の密度とする。液体領域の座標系は，静止水面と殻の回転軸の交点を原点，鉛直下方にz軸をとる。

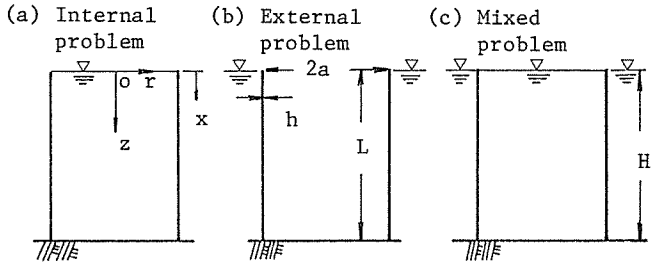

図1 液体に接する円筒殻

本解析で用いた主な仮定は次のとおりである。

①液体運動は非圧縮，非粘性で渦無し流れとする。

②殻の運動は変形が小さく，せん断変形・回転慣性の影響を取入れた修正理論に従うものとする。

③液体－殻の連成系は，円周方向波数n＝1および円振動数ωの調和振動をするものとする。

液体に接する円筒殻の基礎方程式の誘導過程の詳細は文献[6]に譲ることにして，ここでは後の展開に必要なことのみを記す。殻の内部，外部液体を支配するラプラス方程式$\Delta^2\Phi=0$（Φ＝速度ポテンシャル）を，液面条件式$\Phi_{,t}=0$（t＝時間，コンマに続く下添字は偏微分を表わす），液底条件式$\Phi_{,z}|_{z=H}=0$，接触条件式$\Phi_{,r}|_{r=a}=W_{,t}$（W＝殻の半径方向変位）および外部液体に対しては遠方条件式$\Phi|_{r\to\infty}\to 0$を考慮して解き，殻に作用する動圧力を線形化ベルヌーイ式$P=-\rho_l\Phi_{,t}$より求めれば，液体に接する円筒殻の基礎方程式は次のように表される。

$$[C]\{X''\}+[D]\{X'\}+[E]\{X\}=\Omega^2([F]\{X\}+\{P_i\}),\quad (i=IN,\ EX) \tag{1}$$

ここに添字i＝INは内部液体，i＝EXは外部液体を表し，$(\ )'=d(\ )/d\xi$，$\xi(=[0,\ 1])$は殻の経線方向の無次元化座標系，$\{X\}^T=(u,\ v,\ w,\ \beta_x,\ \beta_\theta)$は変位ベクトル，[C]，[D]，[E]および[F]は殻の諸元のみで表される5×5次の行列，Ω^2は次式で表される液体―円筒殻系の無次元化固有円振動数パラメータである。

$$\Omega^2=\rho_S(1-\nu^2)a^2\omega^2/E \tag{2}$$

さらに$\{P_I\}^T=(0,\ 0,\ p_I,\ 0,\ 0)$, $(i=IN,\ EX)$は液体と円筒殻の相互作用により発生する外圧力ベクトルで，その非零成分 P_I は次のようなものである。

$$p_I=(\rho_l/\rho_s)\cdot(a/h)\cdot q_I,\ (i=IN,\ EX) \tag{3}$$

ただし q_I は次式で表される。

$$q_{IN}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2\,I_n(\lambda_r)}{\lambda_r I_n'(\lambda_r)}\sin(\lambda_r H\eta/a)\int_0^1 w\sin(\lambda_r H\eta/a)d\eta \tag{4. a}$$

$$q_{EX}=-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2\,K_n(\lambda_r)}{\lambda_r K_n'(\lambda_r)}\sin(\lambda_r H\eta/a)\int_0^1 w\sin(\lambda_r H\eta/a)d\eta \tag{4. b}$$

ここに，I_n，K_n はそれぞれ第一種変形，第二種変形 Bessel 関数であり，I_n'，K_n' はそれぞれ λ_r に関する一階微分である。さらに

$$\lambda_r=(2r-1)\pi a/2H,\ \ \eta=z/H(=[0,1]) \tag{5}$$

であり，η は液体領域における z の無次元座標である。

液体に接する円筒殻の運動方程式は，式(4)より明らかなように，微積分方程式で記述されることになる。

3. 基本固有周期略算式

液体－円筒殻系を既に述べたように二つの独立な系に分けて考えれば，各系の基礎方程式は式(1)より次のように表される。

殻の剛性と殻の質量よりなる系（空の円筒殻）；

$$[C]\{X''\}+[D]\{X'\}+[E]\{X\}=\Omega_s^2[F]\{X\} \tag{6}$$

ここで，$\Omega_s^2=\rho_s(1-\nu^2)a^2\omega_s^2/E$ (7)

殻の剛性と液体の質量よりなる系；

$$[C]\{X''\}+[D]\{X'\}+[E]\{X\}=\Omega_l^2\{p_I^*\},\ (i=IN,\ EX) \tag{8}$$

ここで，$\Omega_l^2=\rho_l(1-\nu^2)a^3\omega_l^2/Eh$ (9)

$$\{p_I^*\}=(0,\ 0,\ q_I,\ 0,\ 0),\ (i=IN,\ EX) \tag{10}$$

式(6)～(9)で Ω_s と Ω_l は各系の無次元化固有円振動数パラメータ，ω_s と ω_l は各系の固有円振動数を表す。なお，式(6)および式(8)はそれぞれ，微分方程式および微積分方程式である。

3. 1 内部・外部問題に対する略算式

式(6)，(8)の解が求まれば，液体－円筒殻系の固有円振動数 ω は Dunkerley の方法[5] を用いて，次式より決定できる。

$$1/\omega^2=1/\omega_s^2+1/\omega_l^2 \tag{11}$$

したがって，液体—円筒殻系の固有周期 $T(=2\pi/\omega)$は，各系の固有周期 $T_s(=2\pi/\omega_s)$，$T_l(=2\pi/\omega_l)$より次式で求められる。

$$T=\sqrt{T_s^2+T_l^2} \tag{12}$$

さて，円周方向波数 $n=1$，ポアソン比 $\nu=0.3$，および $0.0005\leqq h/a\leqq 0.01$，$0.5\leqq L/a\leqq 8$ の殻諸元に対する基本固有周期略算式を示せば次のようになる。

$$T=2\pi\sqrt{\rho_s a^2/E}\ \sqrt{F^2+(\rho_l/\rho_s)(a/h)G^2} \tag{13}$$

ここで，F は殻の剛性と殻の質量から成る系（空の円筒殻）から得られる L/a の関数式で次のよ

うなものである。

$$F=0.6301+0.8174(L/a)+0.2868(L/a)^2+0.5738\times10^{-2}(L/a)^3 \quad (14)$$

同様に，Gは殻の剛性と液体の質量のみから成る系の関数式で，内部・外部問題に対して次のように与えられる。

内部問題に対して；

$$G=G_{IN}=0.3413+0.5131(L/a)+0.1197(L/a)^2+0.1602\times10^{-1}(L/a)^3$$
$$-0.6161\times10^{-3}(L/a)^4 \quad (15)$$

外部問題に対して；

$$G=G_{EX}=0.2432+0.4747(L/a)+0.9966\times10^{-1}(L/a)^2+0.1544\times10^{-1}(L/a)^3$$
$$-0.5266\times10^{-3}(L/a)^4 \quad (16)$$

なお，略算式(13)においてG＝0とすれば，空の円筒殻の略算式となる。

上述の略算式(13)は次のように求めた。すなわちT_sおよびT_lを$T_s=2\pi\sqrt{\rho_s a^2/E}\cdot F$，$T_l=2\pi\sqrt{\rho_l a^3/Eh}\cdot G$の形で表すことを考える。FとGは，ともにh/aおよびL/aで表される関数であるが，後述する数値例より明らかなように，ここで考慮したh/aの適用範囲のもとでは，h/aにそれほど依存しないので，L/aのみの関数とみなせる。次にFとGをL/aの多項式近似で表すことにし，各多項式の係数を曲線あてはめの方法により決定する。なお，曲線あてはめに必要なデータは式(6)，(8)より得られるが，その解法には選点法を用いた[6,7]。

3. 2　混合問題に対する略算式

殻の内外に同時に液体が存在する場合の略算式は，式(14)～(16)およびDunkerleyの方法を用いて次のように得られる。

$$T=2\pi\sqrt{\rho_s a^2/E}\ \sqrt{F^2+(\rho_{IN}/\rho_s)(a/h)G^2_{in}+(\rho_{EX}/\rho_s)(a/h)G^2_{EX}} \quad (17)$$

ここで，ρ_{IN}およびρ_{EX}はそれぞれ，内部液体および外部液体の密度を表す。

4.　提案する略算式の検証

本章では，著者らの提案する略算式による計算結果と，式(1)に選点法[6]を適用した結果(以下，C. M. と略記)，既往の略算式による結果および有限要素法(F. E. M.)による結果との比較を行い，

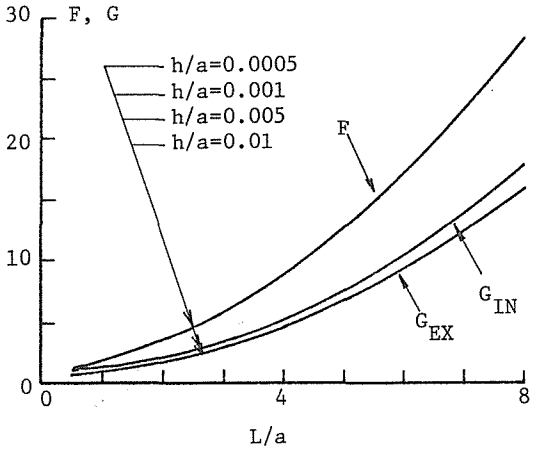

図2　殻厚比の関数F，Gへの影響

提示する略算式の妥当性を検討する。なお，特に断わりのない限り，殻および液体の材料定数には，$E=2.1\times10^4$kgf/mm^2(206 GPa)，$\nu=0.3$，$\rho_s=8\times10^{-6}$kgf・sec^2/cm^4(7.84$\times10^3$kg/m^3)，$\rho_l=1.02\times10^{-6}$kgf・sec^2/cm^4(10^3kg/m^3) を用いた。

4. 1 関数FとGに及ぼす殻厚・半径比の影響

殻厚・半径比 h/a=0.0005，0.001，0.005，0.01 の各場合について，関数FとGに与える影響をみたのが**図2**である。横軸が殻の高さ・半径比 L/a，縦軸が式(6)および式(8)より求めたFとGである。これをみると，FとGは，h/a によらずほぼ一定であり，パラメータ L/a のみによって表示できることがわかる。このことは，円周方向波数 n=1 においては，伸び剛性が曲げ剛性より支配的であることを示し，「振動エネルギーは，波数 n が小さいときは面内振動として消費される」という Arnold と Warburton の研究結果[9] にも符合する。

4. 2 略算式の精度

(1) 空の円筒殻の場合

空の円筒殻の周期略算式は，式(13)で G=0 とすれば得られる。ここでは，次の二つの計算モデルについて，有限要素法（F. E. M.）の結果[10,11] と比較する。

Shell(A)[10]； L/a=0.67，h/a=1.388×10^{-3}，a=18.3 m

Shell(B)[11]； L/a=2.23，h/a=0.01，a=10.16 m

本略算式による結果は shell(A)および shell(B)に対してそれぞれ，T=2.93×10^{-2}sec および T=4.92×10^{-4}sec となり，一方有限要素解はそれぞれ T=2.94×10^{-2}sec および T=4.92×10^{-4} sec であり，本略算式による計算値と有限要素解はよく一致しているといえる。

(2) 内部問題の場合

まず比較のために用いた既往の代表的な略算式を示す。

坂井らの式[2]；$T=\sqrt{\rho_l D^2 L/(Eh)}/\lambda$ (18)

ここで $\lambda=0.067(L/D)^2-0.03(L/D)+0.46$，D=2 a

式(18)は，殻の質量を無視したもので，適用範囲は $0.3\leqq L/a\leqq4$ である。

清水らの式[3]；$T=L\sqrt{\rho_l D/(Eh)}\cdot f(D/L)$ (19)

ここで $f(D/L)=(2.909+\sqrt{5.625(D/L)^2-6.75(D/L)+3.43})/\sqrt{D/L}$，D=2 a

式(19)の適用範囲は，$0.0005\leqq h/a\leqq0.002$，$0.4\leqq L/a\leqq4$ である。

以下に二つのケーススタディを示す。

Case(1)；Haroun[8] らによる F. E. M.の結果と比較する。解析諸元は次のようなものである。

Shell(A)；L/a=3，h/a=1.489×10^{-3}，a=7.32 m

Shell(B)；L/a=0.67，h/a=1.388×10^{-3}，a=18.3 m

表1に，選点法（C. M.），F. E. M.および略算式による周期（sec）を示す。これによれば，本略算式の結果は既往の結果によく一致していることがわかる。

Case(2) 密度比 ρ_l/ρ_s を変化させたときの結果を**表2**に示す（$\rho_l/\rho_s=0.1275$ は水，$\rho_l/\rho_s=$

表1 内部問題の周期 T(sec)

モデル	F. E. M.	C. M.	本略算式(13)	略算式(18)	略算式(19)
Shell(A)	0.2810	0.2821	0.2824	0.2849	0.2820
Shell(B)	0.1617	0.1619	0.1621	0.1521	0.1626

表2　内部問題の $T/2\pi\sqrt{\rho_s a^2/E}$

L/a	解　法	h/a=0.0005		h/a=0.001	
		$\rho^*=0.1275$	$\rho^*=0.0825$	$\rho^*=0.1275$	$\rho^*=0.0825$
1	C. M.	16.30	13.14	11.55	9.33
	本略算式(13)	15.90	12.83	11.31	9.15
	略 算 式(19)	15.56	12.51	11.00	8.85
3	C. M.	53.70	43.32	38.18	30.90
	本略算式(13)	53.66	43.30	38.17	30.89
	略 算 式(19)	54.77	44.06	38.73	31.15
5	C. M.	120.70	97.35	85.80	69.41
	本略算式(13)	120.69	97.37	85.81	69.43
8	C. M.	285.42	230.21	202.82	164.02
	本略算式(13)	285.44	230.23	202.83	164.03

$\rho^*=\rho_l/\rho_s$

0.0825 はガソリンに対応する)。表は選点法 (C. M.) による値 (便宜上，厳密解と呼ぶ) と本略算式(13)，清水らの式(19)の結果を示しているが，本略算式の結果は厳密解に対して最大 3% の相対誤差を含む程度であり，設計に十分利用できるものと思われる。

(3)　外部問題の場合

$\rho_l/\rho_s=0.1275$ としたときの結果を**表 3** に示す。外部問題に対しては，他の略算式が存在しないので，表には選点法 (C. M.) と本略算式(13)の値を示すが，明らかに両者はよい一致を示している。

(4)　混合問題の場合

内部液体と外部液体の密度が等しく，$\rho_l/\rho_s=0.1275$ に対する結果を**表 4** に示す。なお，選点法 (C. M.) による結果は，式(1)を次のように修正し求めたものである。

$$[C]\{X''\}+[D]\{X'\}+[E]\{X\}=\Omega^2([F]\{X\}+\{P_{IN}\}+\{P_{EX}\}) \quad (20)$$

本略算式(17)は，殻のみの質量，内部液体のみの質量および外部液体のみの質量からなる孤立系の合成より得られたものであるが，表より理解できるように妥当な結果を与えている。

表3　外部問題の $T/2\pi\sqrt{\rho_s a^2/E}$

L/a	解　法	h/a=0.0005	h/a=0.005	h/a=0.01
0.5	C. M.	8.36	2.80	2.07
	本略算式(13)	8.17	2.79	2.12
1.0	C. M.	13.79	4.55	3.39
	本略算式(13)	13.41	4.55	3.44
2.0	C. M.	27.59	9.26	6.95
	本略算式(13)	27.47	9.29	7.00
4.0	C. M.	73.81	24.77	18.57
	本略算式(13)	73.83	24.81	18.63
8.0	C. M.	259.71	86.42	64.32
	本略算式(13)	259.74	86.46	64.36

表4　混合問題の $T/2\pi\sqrt{\rho_s a^2/E}$

L/a	解　法	h/a=0.0005	h/a=0.005	h/a=0.01
0.5	C. M.	13.15	4.00	2.96
	本略算式(17)	12.96	4.23	3.09
1.0	C. M.	21.29	6.78	4.87
	本略算式(17)	20.72	6.76	4.93
2.0	C. M.	41.92	13.59	9.87
	本略算式(17)	41.70	13.59	9.91
4.0	C. M.	110.80	36.00	26.18
	本略算式(17)	110.83	36.04	26.24
8.0	C. M.	384.83	124.63	90.38
	本略算式(17)	384.87	124.67	90.42

本節(1)～(4)の数値結果から明らかなように，提案する略算式(13)および(17)は，実用上十分な精度の解を与えることが判明した。なお，Dunkerley の方法による解は，基本周期の上界 (基

本振動数の下界）を与えるが，本略算式は選点法による近似解および曲線あてはめの方法を用いて得られたもので，必ずしも周期の上界を与えるとは限らないことに留意されたい。

(5)　殻の質量の基本周期に与える影響

従来提案されている略算式のほとんどは，殻の質量の影響（式(13)に現れる関数Fに相当）を無視している。殻厚・半径比h/aが小さい場合には，殻の質量の影響は少ないものの，その略算式によれば周期は常に過小に評価されることになる。本節では，数値計算を通して，殻の質量の影響を定量的に明らかにする。

h/a=0.01（厚い場合），h/a=0.001（薄い場合）の殻厚・半径比を有する内部・外部問題について，関数Fの影響をみたのが**図3**である。図中の○印(L/a=3，6)に対応する数値は，選点法（C.M.）に対する相対誤差をパーセントで示したもので，上段がF≠0，下段がF=0の場合である。これによれば，本略算式の適用範囲の上限h/a=0.01では，殻の質量を無視した略算式の結果は，周期を10%程度過小に評価している。

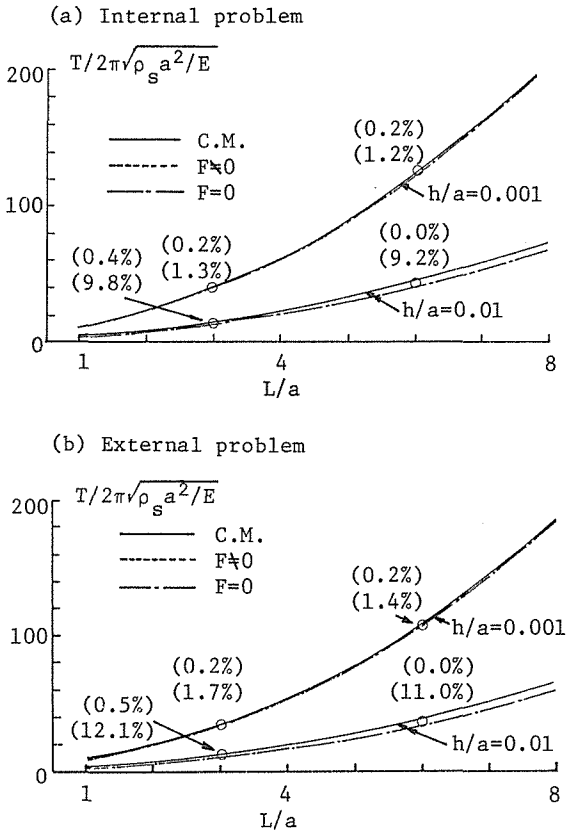

図3　殻の質量の基本固有周期への影響

以上限られた数値結果であるが，略算式の適用可能性と，そのだいたいの精度の確認は行えたものと考えられる。なお，本略算式によれば，広範囲の形状パラメータ（h/a，L/a）および材料パラメータ（ρ_l/ρ_s）を有する円筒殻の固有周期性状を比較的容易に把握でき，またその有する精度から判断すれば他の近似解析手法の妥当性の確認にも有効に利用し得るものと思われる。

5.　基本固有周期の特性

ここでは，提案した略算式を用いて基本固有周期の特性を調べる。液体に接する円筒殻の略算式(13)および(17)は，次のようにも表される。

$$T=2\pi F\sqrt{a^2/E}\cdot\sqrt{\rho} \tag{21}$$

ここで

$$\rho=\rho_s+\rho_a \tag{22}$$

さらに

$$\rho_a=\rho_l(a/h)C_l \quad (\text{内部・外部問題，}i=IN,\ EX) \tag{23. a}$$

$$\rho_a=\rho_{IN}(a/h)C_{IN}+\rho_{EX}(a/h)C_{EX} \quad (\text{混合問題}) \tag{23. b}$$

ただし

$$C_i=(G_I/F)^2 \tag{24}$$

上式より明らかなように，液体－殻系の周期は，密度を式(22)で表される $\rho(=\rho_s+\rho_a)$ に置き換えた空の円筒殻の周期に等しいこと，ρ_a は液体―殻系の付加質量に相当し，それは液体密度，半径・殻厚比 a/h および高さ・半径比 L/a（C_i は式(14)～(16)より L/a の関数）に依存することがわかる。さらに，C_i(i=IN, EX) は付加質量係数を表し，L/a の関数としてグラフ化すると**図4**となる。これより，C_i は L/a が大になるほど増加すること，L/a を固定すれば内部液体の付加質量係数 C_{IN} は外部液体の付加質量係数 C_{EX} より大きいこと，また各係数はおおよそ $0.30\leqq C_{IN}\leqq 0.40$，$0.20\leqq C_{EX}\leqq 0.35$ であることがわかる。

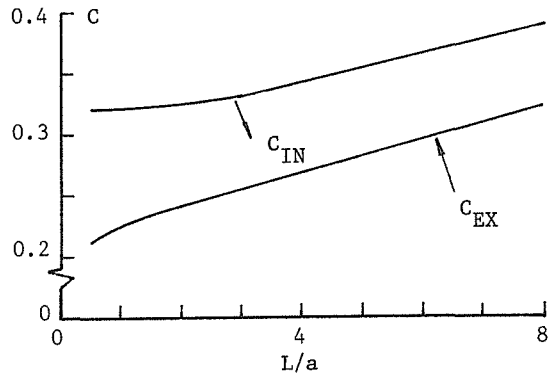

図4　殻高さ・半径比に対する付加質量係数の変化

図5は，$\rho_l/\rho_s=0.1275$ とし，L/a=1, 4, 8 の各場合の内部・外部問題の周期について，殻厚比 h/a の及ぼす影響をみたものである。縦軸が空の周期 T_s で無次元化した周期 T，横軸が $\sqrt{h/a}$（$0.0005\leqq h/a\leqq 0.01$）である。図より周期は $\sqrt{h/a}$ に対して，逆比例的に減少することがわかる。これは，殻の剛性増加により殻の変形が減少し，殻と液体との相互作用による付加慣性力が減少するからである。また，L/a と h/a を固定し，液体の存在領域の差異に着目すれば，内部問題の周期が外部問題のそれより大きく，その差は h/a の小さいときほど著しいことがわかる。

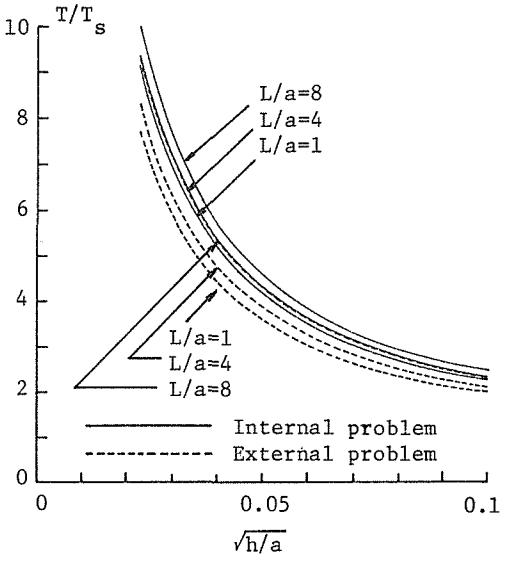

図5　殻厚比に対する基本固有周期の変化

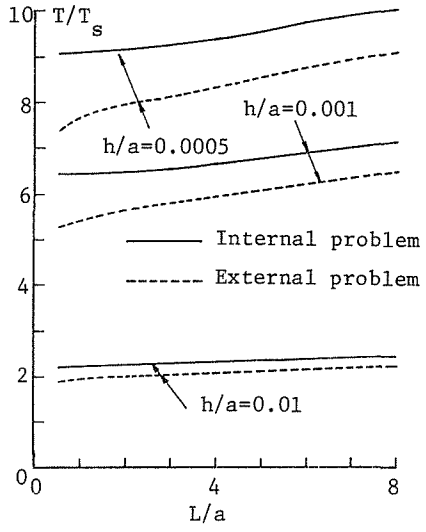

図6　殻高さ・半径比に対する基本固有周期の変化

図6には，h/a=0.0005, 0.001, 0.01 の各場合の内部・外部問題の固有周期曲線（L/a に対する周期の変化）を示した。これによると，周期は L/a の増加に伴って単調に増加し，その程度は

殻厚比 h/a が小さいほど著しいことがわかる。

6. ま と め

液体に接する円筒殻の最も基本的な動特性である基本固有周期の略算式が，円周方向波数 n＝1，ポアソン比 $\nu=0.3$，液位比 H/L＝1，$0.0005 \leqq$ 殻厚比(＝h/a)$\leqq 0.01$，および $0.5 \leqq$ 殻高さと半径の比(＝L/a)$\leqq 8.0$ の殻を対象に提示され，それに基づく数値パラメータ解析を行った。その結果，次のことが明らかになった。

(1) 略算式は，液体の有無および液体の存在領域(殻の内部，外部あるいは殻の内外)によらず，実用上十分な精度で適用可能である。それゆえ，他の近似解析手法の妥当性の確認にも有効であろう。

(2) 形状パラメータ(h/a と L/a)および材料パラメータ(密度比 ρ_l/ρ_s)で表示された本略算式によれば，パラメータ変化に伴う固有周期特性を比較的簡単に把握し得る。

(3) 内部問題(液体が殻内部にある場合)の付加質量係数 C (式(24)で定義)は外部問題のそれより大きく，その値はおおよそ内部問題では $0.30 \leqq C \leqq 0.40$，外部問題では $0.20 \leqq C \leqq 0.35$ である。

(4) 液体－殻系における殻質量の影響は h/a の増加に伴って次第に大きくなり，これを無視すれば h/a＝0.01 の場合(本略算式の適用範囲の上限)，周期を 10%程度過小に見積る結果を与える。

参 考 文 献

1) 飯島延恵・萩原敏雄： 土木学会誌，44，(1959)，10，p. 19
2) 坂井藤一・迫田浩行・小川 浩： 川崎重工技報，(1979)，71，p. 52
3) 清水信行・山本鎭男・河野和間： 日本機械学会論文集(C編)，48，(1982)，427，p. 328
4) Tedesco, J. W., Kostem, C. N. and Kalnins, A.: Comput, Struct., (1987), 26, p. 957
5) Dunkerley, S.: Phil, Trans. Royal Soc. London., 185A, (1894), pt. 1, p. 279
6) 三上 隆・芳村 仁： 構造工学論文集，(1988)，34A，p. 785
7) 三上 隆・芳村 仁： 土木学会論文集，(1986)，374/I-6. p. 319
8) Haroun, M. A. and Housner, G. W.: Proc. ASCE, 108, (1982), EM2, p. 801
9) Arnold, R. N. and Warburton, G. B.: Proc. Roy. Soc., 197A, (1949), p. 238
   Arnold, R. N. and Warburton, G. B.: Proc. Inst. Mech. Eng., 167A, (1974), p. 62
10) Haroun, A. M. and Housner, G. W.: Proc. ASCE, 108, (1982), EM5, p. 783
11) Sen, S. K. and Gould, P. L.: Proc. ASCE, 100, (1974), EM2, p. 283