



# HOKKAIDO UNIVERSITY

|                  |                                                                                   |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Title            | 円筒殻の多点入力応答                                                                        |
| Author(s)        | 山田, 元; 小林, 幸徳; 平井, 正昭                                                             |
| Citation         | 北海道大學工學部研究報告, 150, 25-33                                                          |
| Issue Date       | 1990-05-31                                                                        |
| Doc URL          | <a href="https://hdl.handle.net/2115/42229">https://hdl.handle.net/2115/42229</a> |
| Type             | departmental bulletin paper                                                       |
| File Information | 150_25-34.pdf                                                                     |



## 円筒殻の多点入力応答

山田 元 小林 幸徳 平井 正昭

(平成元年12月28日受理)

### Steady State Response of a Circular Cylindrical Shell Subjected to Multi Point Harmonic Forces

Gen YAMADA, Yukinori KOBAYASHI and Masaaki HIRAI

(Received December 28, 1989)

#### Abstract

An analysis is presented for the steady state response of a simply supported circular cylindrical shell. The equations of motion thereof are derived in terms of displacements based on Flügge's shell theory. The free vibration of the shell is analyzed theoretically and its steady state response that is subjected to a harmonic point force is also solved by using Galerkin's method. The present method is applied to the free vibration and the steady state response to forces acting at arbitrary points calculated numerically, and the effects of a point of action and of a phase difference on the response are studied.

#### 1. は し が き

本論文では、半径方向に、正弦的に変化する複数個の点加振力を受ける円筒殻の定常応答を求めている。円筒殻は、機械構造物の構造要素として広く用いられているが、その際、多点入力を受ける系として取り扱わなければならない場合が多いにもかかわらず、多点入力を受けた場合の応答を求めた研究は見あたらない。このため、ここでは Flügge の薄肉殻理論を用いて、殻の運動方程式を求め、境界条件を満足する変位関数を仮定するとともに、ガラーキン法を適用し、時間関数に関する常微分方程式を導く。この方程式を解くことにより、殻の多点入力時の応答の計算式を求め、数値計算を行い、殻の応答に及ぼす、加振力の作用位置や加振力間の位相差の影響を明らかにしている。

#### 2. 理 論 解 析

図 1 は、本論文で扱った円筒殻の形状及び座標系である。座標系を  $x, \phi, r$  と取り、それぞれの変位成分を  $u, v, w$  とする。また、円筒殻の長さを  $L$ 、中央面半径を  $a$ 、厚さを  $h$  とする。円筒殻の厚さは一様で、その厚さは中央面半径に比べて十分小さいものとする。円筒殻の両端は単純支持され、面外から半径方向に、正弦的に変化する集中荷重が作用するものとする。円筒殻の単位面積にはたらく力およびモーメントの各座標  $x, \phi, r$  方向成分をそれぞれ  $N_x, N_\phi, N_{x\phi}$ 、および  $M_x, M_\phi, M_{x\phi}$  とすると、Flügge の薄肉殻理論から、それらは変位成分  $u, v, w$  を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned}
 N_x &= D \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{\nu}{a} w \right] \\
 N_\phi &= D \left[ \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{w}{a} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\
 N_{x\phi} &= N_{\phi x} = \frac{D}{2} \left[ \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\
 M_x &= K \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right] \\
 M_\phi &= K \left[ \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\
 M_{x\phi} &= M_{\phi x} = \frac{K}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi}
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

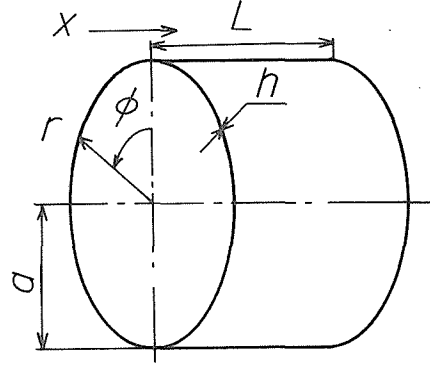


図1 円筒殻の形状と座標

ただし  $D$  および  $K$  は、伸びこわさと曲げこわさであり、 $D = Eh(1+i\eta)/(1-\nu^2)$ 、 $K = Eh^3 \times (1+i\eta)/12(1-\nu^2)$  である。ここで、 $E$  は縦弾性係数、 $\nu$  はポアソン比、 $\eta$  は構造減衰の減衰比である。一方、運動方程式は、慣性項の各座標成分  $P_x$ 、 $P_\phi$ 、 $P_r$  および外力  $P(x, \phi, t)$  を用いると次のようにかける。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} + P_x &= 0 \\
 \frac{1}{a} \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} - \left[ \frac{1}{a^2} \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} \right] + P_\phi &= 0 \\
 \frac{1}{a} \frac{\partial^2 M_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 M_{x\phi}}{\partial x \partial \phi} + \left[ a \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{\phi x}}{\partial x \partial \phi} \right] + N_\phi - a P_r &= P
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

よって、運動方程式は、変位を使って次のように表せる。

$$\left. \begin{aligned}
 L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w &= \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
 L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= -\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{P}{D}
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 $L_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) は微分演算子であり、それぞれ、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned}
 L_{11} &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1+\nu}{2a^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\
 L_{12} &= -\frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} \\
 L_{13} &= -\frac{\nu}{a} \frac{\partial}{\partial x} \\
 L_{21} &= -\frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} \\
 L_{22} &= -\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
 L_{23} &= -\frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{K}{a^2 D} \left\{ \frac{1}{a^2} \frac{\partial^3}{\partial \phi^3} + \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \phi} \right\} \\
 L_{31} &= -\frac{\nu}{a} \frac{\partial}{\partial x} \\
 L_{32} &= -\frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \\
 L_{33} &= -\frac{1}{a^2} - \frac{K}{D} \left\{ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2}{a^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \phi^2} + \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4}{\partial \phi^4} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

まず、固有振動数  $\omega_{mn}$  を求めるため、外力  $P(x, \phi, t)$  および減衰比  $\eta$  を 0 とする。変位  $u, v, w$  は次のような変数分離形で表されるものとする。

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \sum_m \sum_n \alpha_{mn} \cdot U_{mn}(x, \phi) \cdot q_{mn}(t) \\
 v &= \sum_m \sum_n \beta_{mn} \cdot V_{mn}(x, \phi) \cdot q_{mn}(t) \\
 w &= \sum_m \sum_n \gamma_{mn} \cdot W_{mn}(x, \phi) \cdot q_{mn}(t)
 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで  $q_{mn}(t) = \exp(i\omega_{mn}t)$ 、 $i$  は虚数単位、 $m$  は軸方向の半波数、 $n$  は周方向の波数である。変位関数  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$  は、次のように置くことにより、両端単純支持の条件を完全に満たす。

$$\left. \begin{aligned}
 U_{mn} &= \cos(m\pi x/L) \cos(n\phi) \\
 V_{mn} &= \sin(m\pi x/L) \sin(n\phi) \\
 W_{mn} &= \sin(m\pi x/L) \cos(n\phi)
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

よって、方程式は次のようにかける。

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_m \sum_n U_{mn} \cdot q_{mn}(t) \{ (A_{11} + \omega_{mn}^2) \alpha_{mn} + A_{12} \beta_{mn} + A_{13} \gamma_{mn} \} &= 0 \\
 \sum_m \sum_n V_{mn} \cdot q_{mn}(t) \{ A_{21} \alpha_{mn} + (A_{22} + \omega_{mn}^2) \beta_{mn} + A_{23} \gamma_{mn} \} &= 0 \\
 \sum_m \sum_n W_{mn} \cdot q_{mn}(t) \{ A_{31} \alpha_{mn} + A_{32} \beta_{mn} + (A_{33} - \omega_{mn}^2) \gamma_{mn} \} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで、 $A_{ji} (i, j=1, 2, 3)$  はそれぞれ、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
A_{11} &= \frac{-E}{2\rho a^2(1-\nu^2)} \left\{ 2 \left[ \frac{m\pi}{L} \right]^2 + (1-\nu) n^2 \right\} \\
A_{12} &= \frac{E}{2\rho a^2(1-\nu^2)} (1+\nu) n \left[ \frac{m\pi}{L} \right] \\
A_{13} &= \frac{E}{2\rho a^2(1-\nu^2)} 2\nu \left[ \frac{m\pi}{L} \right] \\
A_{21} &= \frac{E}{2\rho a^2(1-\nu^2)} (1+\nu) n \left[ \frac{m\pi}{L} \right] \\
A_{22} &= \frac{-E}{2\rho a^2(1-\nu^2)} \left\{ 2n^2 + (1-\nu) \left[ \frac{m\pi}{L} \right]^2 \right\} \\
A_{23} &= \frac{-E}{2\rho a^2(1-\nu^2)} \left\{ 2n + 2 \frac{K}{a^2 D} \left[ n^3 + n \left[ \frac{m\pi}{L} \right]^2 \right] \right\} \\
A_{31} &= \frac{-E}{2\rho a^2(1-\nu^2)} \nu \left[ \frac{m\pi}{L} \right] \\
A_{32} &= \frac{E}{2\rho a^2(1-\nu^2)} n \\
A_{33} &= \frac{E}{2\rho a^2(1-\nu^2)} \left\{ 1 + \frac{K}{a^2 D} \left( n^2 + n \left[ \frac{m\pi}{L} \right]^2 \right) \right\}
\end{aligned} \right\} \quad (8)$$

各式の両辺にそれぞれ  $U_{kl}$ ,  $V_{kl}$ ,  $W_{kl}$  をかけて、円筒殻の全面積について積分すると、固有関数の直交性

$$\begin{aligned}
\iint \sum_m \sum_n U_{mn} U_{kl} dA &= \iint \sum_m \sum_n V_{mn} V_{kl} dA = \iint \sum_m \sum_n W_{mn} W_{kl} dA \\
&= \begin{cases} L\pi C_l & (m=k, n=l) \\ 0 & (m \neq k \text{ or } n \neq l) \end{cases} \quad (9) \\
&\text{ただし } C_l = 1 (l=0), 1/2 (l \neq 0)
\end{aligned}$$

を用いることにより

$$L\pi C_l \cdot q_{kl}(l) \begin{pmatrix} A_{11} + \omega_{kl}^2 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{21} + \omega_{kl}^2 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \omega_{kl}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{kl} \\ \beta_{kl} \\ \gamma_{kl} \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

となる。式(10)の  $\alpha_{kl}$ ,  $\beta_{kl}$ ,  $\gamma_{kl}$  のうち少なくとも1つが0でないためには、係数行列の行列式=0が成立しなければならない。これにより固有振動数  $\omega_{kl}$  が求められる。また、その  $\omega_{kl}$  をさらに式(10)に代入することにより、 $\alpha_{kl}$ ,  $\beta_{kl}$ ,  $\gamma_{kl}$  の比が、次のように求まる。

$l=0$ のとき

$$\frac{\alpha_{kl}}{\gamma_{kl}} = \left[ 1 + \frac{K}{a^2 D} \left[ \frac{k\pi}{L} \right]^4 - \frac{\rho a^2 (1-\nu^2)}{E} \omega_{kl}^2 \right] / \nu \left[ \frac{k\pi}{L} \right]$$

$$\frac{\beta_{kl}}{\gamma_{kl}} = 0$$

$l \neq 0$ のとき

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha_{kl}}{\gamma_{kl}} &= (1+\nu) \frac{k\pi}{L} \left\{ 1 + \frac{K}{a^2 D} \left[ l^2 + \left[ \frac{k\pi}{L} \right]^2 \right]^2 - \frac{\rho a^2 (1-\nu^2)}{E} \omega_{kl}^2 \right\} / \\ &\quad \left\{ \left[ -2 + \nu(1+\nu) \right] \left[ \frac{k\pi}{L} \right]^2 - (1-\nu) l^2 + \frac{\rho a^2 (1-\nu^2)}{E} \omega_{kl}^2 \right\} \\ \frac{\beta_{kl}}{\gamma_{kl}} &= \left\{ \nu \frac{k\pi}{L} \frac{\alpha_{kl}}{\gamma_{kl}} - 1 - \frac{K}{a^2 D} \left[ l^2 + \left[ \frac{k\pi}{L} \right]^2 \right]^2 + \frac{\rho a^2 (1-\nu^2)}{E} \omega_{kl}^2 \right\} / h \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

次に、強制振動の定常応答を求める。ここで変位  $u$ ,  $v$ ,  $w$  を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_m \sum_n \alpha_{mn} \cdot U_{mn}(x, \phi) \cdot Q_{mn}(t) \\ v &= \sum_m \sum_n \beta_{mn} \cdot V_{mn}(x, \phi) \cdot Q_{mn}(t) \\ w &= \sum_m \sum_n \gamma_{mn} \cdot W_{mn}(x, \phi) \cdot Q_{mn}(t) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

これを式 (3) に代入し、固有振動数  $\omega_{mn}$  に関する次の関係

$$\left. \begin{aligned} (A_{11} + \omega_{mn}^2) \alpha_{mn} + A_{12} \beta_{mn} + A_{13} \gamma_{mn} &= 0 \\ A_{21} \alpha_{mn} + (A_{22} + \omega_{mn}^2) \beta_{mn} + A_{23} \gamma_{mn} &= 0 \\ A_{31} \alpha_{mn} + A_{32} \beta_{mn} + (A_{33} - \omega_{mn}^2) \gamma_{mn} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

を用いると

$$\left. \begin{aligned} \sum_m \sum_n \alpha_{mn} U_{mn} \left\{ \omega_{mn}^2 Q_{mn}(t) - \frac{1}{(1+i\eta)} \frac{d^2 Q_{mn}(t)}{dt^2} \right\} &= 0 \\ \sum_m \sum_n \beta_{mn} V_{mn} \left\{ \omega_{mn}^2 Q_{mn}(t) - \frac{1}{(1+i\eta)} \frac{d^2 Q_{mn}(t)}{dt^2} \right\} &= 0 \\ \sum_m \sum_n \gamma_{mn} W_{mn} \left\{ \omega_{mn}^2 Q_{mn}(t) - \frac{1}{(1+i\eta)} \frac{d^2 Q_{mn}(t)}{dt^2} \right\} &= \frac{P(t)}{\rho h a (1+i\eta)} \delta(x-x_1, \phi-\phi_1) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

となる。さらに、各式の両辺にそれぞれ  $\alpha_{kl} U_{kl}$ ,  $\beta_{kl} V_{kl}$ ,  $\gamma_{kl} W_{kl}$  をかけて全面積について積分することにより、次式が得られる。

$$\begin{aligned} L\pi C_l \left\{ \left[ \frac{\alpha_{kl}}{\gamma_{kl}} \right]^2 + \left[ \frac{\beta_{kl}}{\gamma_{kl}} \right]^2 + 1 \right\} \left\{ \omega_{kl}^2 Q_{kl}(t) - \frac{1}{(1+i\eta)} \frac{d^2 Q_{kl}(t)}{dt^2} \right\} \\ = \frac{P(t) W_{kl}(x_1, \phi_1)}{\rho h a (1+i\eta) \gamma_{kl}} \end{aligned} \quad (15)$$

加振力  $P(t)$  が  $P(t) = P e^{i\omega t}$  と表されるとき、 $Q_{kl}(t)$  は  $Q_{kl}(t) = A_{kl} e^{i\omega t}$  とおける。ただし  $A_{kl}$  は、複素振幅である。この式より  $A_{kl} \gamma_{kl}$  が求まり、この  $A_{kl} \gamma_{kl}$  を面外変位  $w = \sum_m \sum_n \gamma_{mn} W_{mn}(x, \phi) A_{mn} e^{i\omega t}$  に代入することにより定常応答が次のように定まる。

$$w(x, \phi) = \frac{P(t)}{L\pi\rho ha} \times \sum_m \sum_n \frac{W_{mn}(x_1, \phi_1) W_{mn}(x, \phi)}{C_n \left\{ \left[ \frac{\alpha_{kl}}{\gamma_{kl}} \right]^2 + \left[ \frac{\beta_{kl}}{\gamma_{kl}} \right]^2 + 1 \right\} \left\{ \omega_{mn}^2 (1 + i\eta) - \omega^2 \right\}} \quad (16)$$

式 (16) を次のように無次元化する。

$$\frac{w(x, \phi) Ea}{P} = \frac{a}{L} \frac{a}{h} (1 - \nu^2) e^{i\omega t} \times \sum_m \sum_n \frac{(\lambda_{mn} - \lambda - i\eta\lambda_{mn}) \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x_1}{L} \cos(n\phi) \cos(n\phi_1)}{C_n \pi \left[ \frac{\alpha_{kl}^2}{\gamma_{kl}^2} + \frac{\beta_{kl}^2}{\gamma_{kl}^2} + 1 \right] \left\{ (\lambda_{mn} - \lambda)^2 + \eta^2 \lambda_{mn}^2 \right\}} \quad (17)$$

ここで、 $\lambda = \rho a^2 \omega^2 (1 - \nu^2) / E$  は、無次元振動数パラメーターである。

### 3. 結 果

以下に示す数値計算においては、 $L/a=4$ ,  $h/a=0.01$ としている。各図において実線は  $\eta=0.01$ , 一点鎖線は0.05, 破線は0.2として計算したものである。また応答曲線の各ピークの上に書かれた数字は、そのピークが、どの振動モードの共振であることを示したもので、 $m/n$  である。なお、実際の計算で採用する級数の項数を収束状況を検討した上で決める必要がある。表1は、図2 (a) の  $\eta=0.01$  の応答曲線において最大値と最小値の、項数による収束状況を示したものである。この結果より  $m, n$  を40項程度取れば、有効数字3桁は保証され、実用上十分なことが分かる。よって、 $m, n$  とも40項を採用した。

図2は、2点入力応答において入力に位相差がある場合を示したもので、位相差はそれぞれ  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  である。いずれの図も入力位置は  $(L/3, 0)$  と  $(2L/3, 0)$  で、モニター点は、 $(L/3, 0)$  で

表1 項数による収束状況

| $m, n$ の項数 | 最 大 値  | 最 小 値   |
|------------|--------|---------|
| 20         | 641.06 | 0.39346 |
| 25         | 641.14 | 0.41761 |
| 30         | 641.15 | 0.42215 |
| 35         | 641.16 | 0.42334 |
| 40         | 641.16 | 0.42348 |
| 45         | 641.16 | 0.42360 |

ある。入力点、モニター点ともいずれも  $\phi=0$  上であるので、応答は軸方向半波数  $m$  に依存する。図 (a) は、 $x=L/2$  を中心に左右対称な振動しか起こらないため、 $m$  が偶数のモードの共振点が認められない。一方図 (c) は、 $x=L/2$  を中心に左右逆対称な振動しか起こらないため、 $m$  が奇数の振動モードの共振点は認められない。位相差が同位相でも逆位相でもない図 (b) においては、それら両モードの共振点が現れている。

図 3 は、加振位置の  $\phi$  が異なる場合を示したものである。一方の加振点とモニター点は、位置  $(L/3, 0)$  で一定とし、他方の入力点は、位置  $(2L/3, \phi)$  とする。ただし  $\phi$  は図 (a) から図 (e) までそれぞれ、 $0^\circ$  から  $180^\circ$  まで  $45^\circ$  ずつ変化させていったものである。なお入力間の位相差はないものとする。この場合、応答曲線の変化から、現れてくる振動モードは周方向の波数  $n$  のみでなく、軸方向の半波数  $m$  にも依存してくることが分かる。たとえば、図 (a) と図 (b) を較べると、同じ  $n=4$  のモードでも  $m/n=1/4$  の共振点が消え反対に  $2/4$  のモードの共振点が現れている。

図 4 は、 $\phi=0$  の一直線上に、加振点を等間隔に増やしていった場合の、応答の変化を示したものである。 $N$  は入力数、応答の変化を較べるため、全加振力の大きさの和は一定としている。また、 $N=\infty$  というのは、点加振でなく、線加振したものである。この図より、加振点をある数以上増やしていった場合の応答は線加振したときの結果とほとんど変わらないということが分かる。

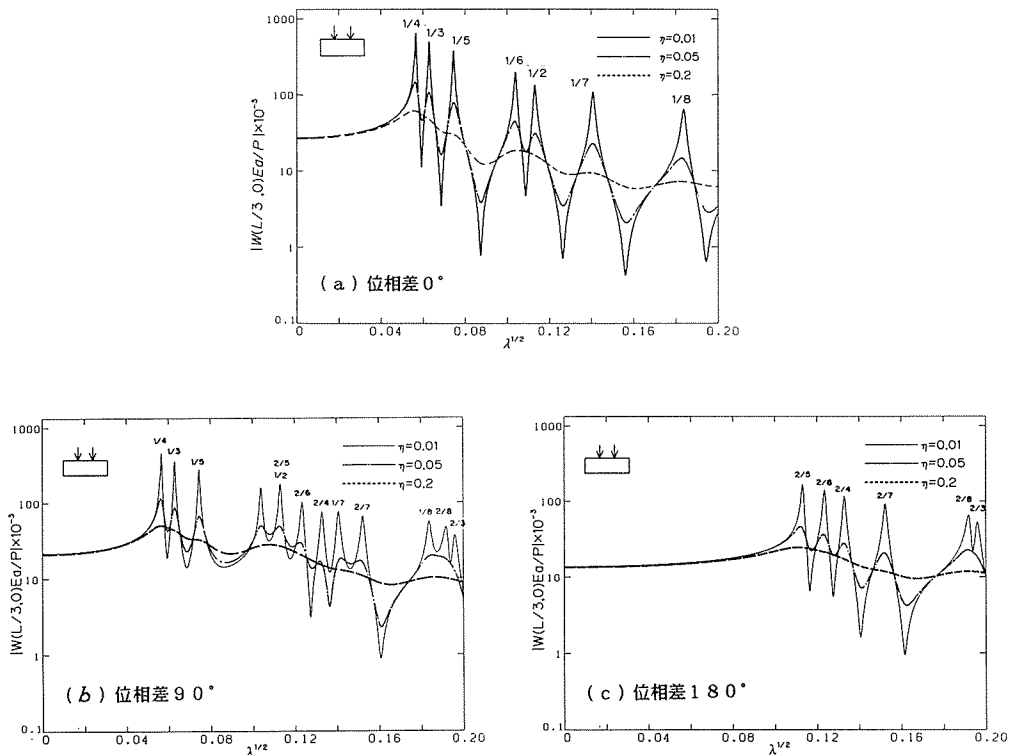


図2 2点入力応答  
( $L/a=4$ ,  $h/a=0.01$ )

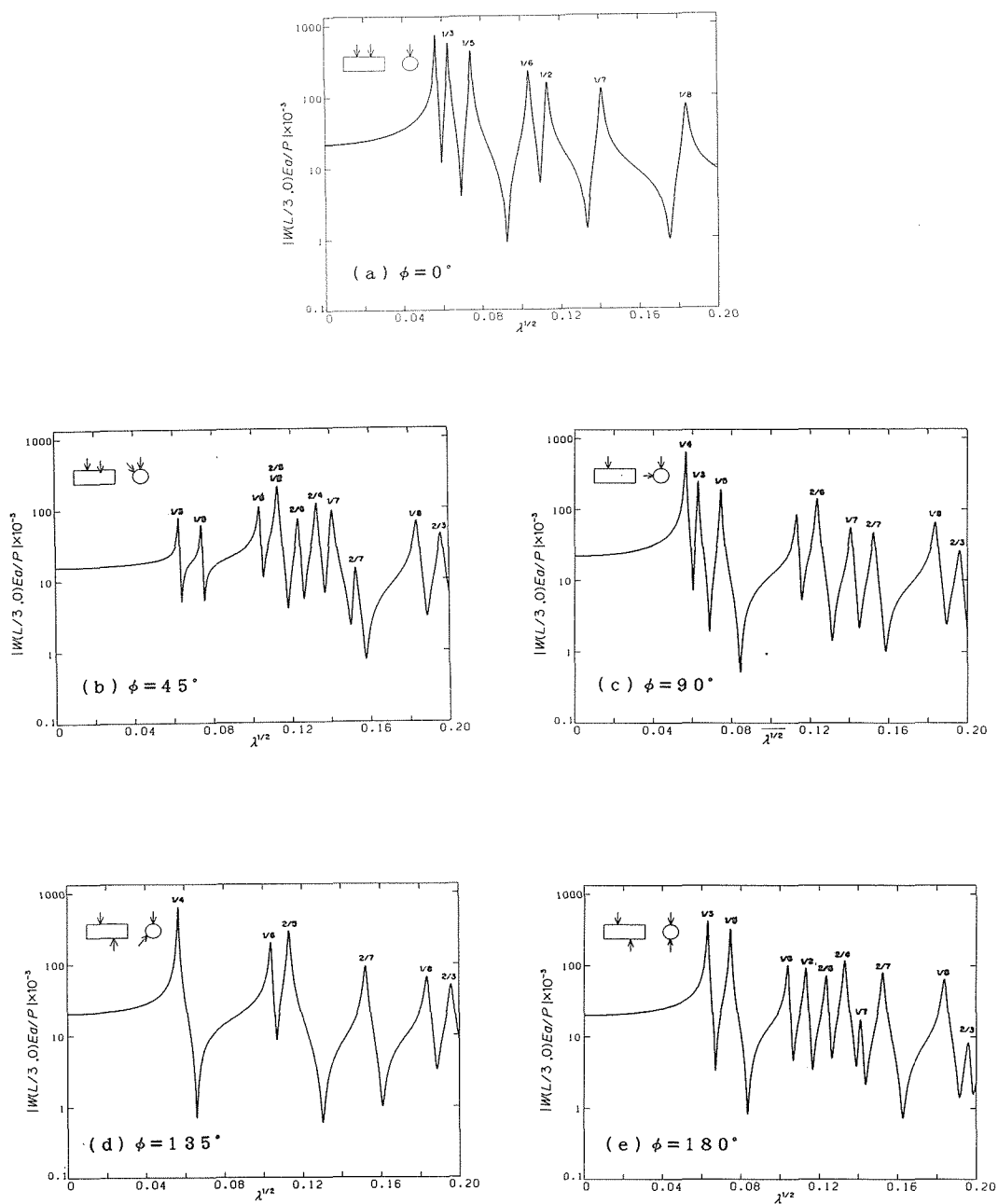


図3 2点入力応答  
( $L/a=4$ ,  $h/a=0.01$ )

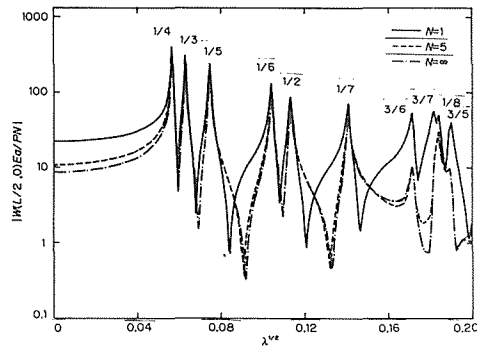


図4 多点入力応答  
( $L/a=4$ ,  $h/a=0.01$ )

## 5. あとがき

本研究では、点加振力を受ける円筒殻の振動を、ガラーキン法を用いて解析し、その結果を重ね合わせることで、多数の加振力を受ける場合の定常応答を、数値計算により求めた。そして、その結果より、加振力の作用位置や、加振力間の位相差、および加振点数の変化が、定常応答に及ぼす影響を明らかにした。なお、本研究の数値計算においては、北海道大学大型計算機センターの HITAC M-682H を利用した。

## 参考文献

- 1) G. B. Warburton, "Harmonic Response of Cylindrical Shells", Trans. ASME, J. Eng. Ind., (1974), 994.
- 2) W. Flügge, "Stresses in Shells", Second Edition, (1973), Springer-Verlag・New York・Heidelberg・Berlin.