北海道大学工学部研究報告
第154号（平成3年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 154 (1991)

数論メッシュ法による放射伝熱数値解析に関する研究

玉　雲山[*1]　徐　旭常[*2]
工藤　一彦[*3]　谷口　博[*4]

（平成2年10月30日受理）

Study on Numerical Analysis of Radiation Heat Transfer by a Method of Analytic Theory of Numbers

Yunshan WANG, Xuchang XU,
Kazuhiko KUDO and Hiroshi TANIGUCHI

(Received October 30, 1990)

Abstract

A new method is developed to shorten the computation time and to increase the accuracy of radiation heat transfer analysis by Monte Carlo method. The method utilizes a number mesh derived by analytic theory of numbers which replaces the random numbers used in the Monte Carlo method. In the present study, at first the principle of the method of analytical theory of numbers is explained when it is used to obtain the value of multiple integrals. This is followed by a review of previous methods to solve radiation heat transfer by using the method of analytical theory of numbers. Then, a new method is proposed. As each set of the number mesh derived by analytical theory of numbers has its own distribution rule, it cannot be used freely as a substitute of the radom numbers in the Monte Carlo calculation. Hence, by comparing the results with the one obtained by the Monte Carlo method using a large number of random numbers, an appropriate set of number mesh is sought. By using the finally obtained set of number mesh, the computation time is shown to be shortened by 20 percent.

1．緒　言

放射伝熱の数値解析手法は近年見覚しく進展をとげてきており，従来の流束法，ゾーン法，モンテカルロ法のほか，“放射熱線法”[1]，モンテカルロ法の改良版である“READ”法[2),3)]及び“数論メッシュ法”[4),5)]等が開発されてきた。

モンテカルロ法の特長は，取り扱える次元，物性値変化，形状等の制限がなく，対流伝熱等の他の伝熱と結合した共存伝熱の解析が容易なことにあって，今まで放射伝熱の数値解析に広く用いられてきた[2),3),6-10)]。しかし従来のモンテカルロ法は確率的手法であるので，計算時に多量の乱

[*1] 中国清華大学講師（北海道大学工学部外国人研究員）　[*2] 中国清華大学教授
[*3] 北海道大学工学部機械工学科助教授　[*4] 北海道大学工学部機械工学科教授

数を必要とする。また用いた乱数の数が不充分であると計算結果のバラツキが大きかった。従って精度の高い結果を得るためには，長い計算時間を必要としていた。上述の“READ”法はこの問題をある程度解決したものである。その原理は，モンテカルロ法で，放射エネルギーの射出を模擬するために用いる多数のエネルギー粒子の軌跡を追跡する際，各分割要素から射出された放射エネルギーのうち，自身の要素に吸収された割合及び他の要素に吸収された割合を計算し，これらの値が系の形状が一定ならば変化しないことを利用して，時間のかかるモンテカルロ法の計算を，温度分布と熱流束分布を求めるためのくりかえし計算の前に1回だけ行なうようにしたものである。これらの値が求められたあとは，直ちにエネルギー平衡式によって温度と熱流束の分布をくりかえし計算により求めている。このように時間のかかるモンテカルロ計算を1回ですませることができるので，“READ”法では計算時間が短くなる。ただし，所要メモリ数は要素の2乗となり増加するので，モデルの要素数が多くなるとこの方法は計算機のメモリ上の制限をうけることになる。

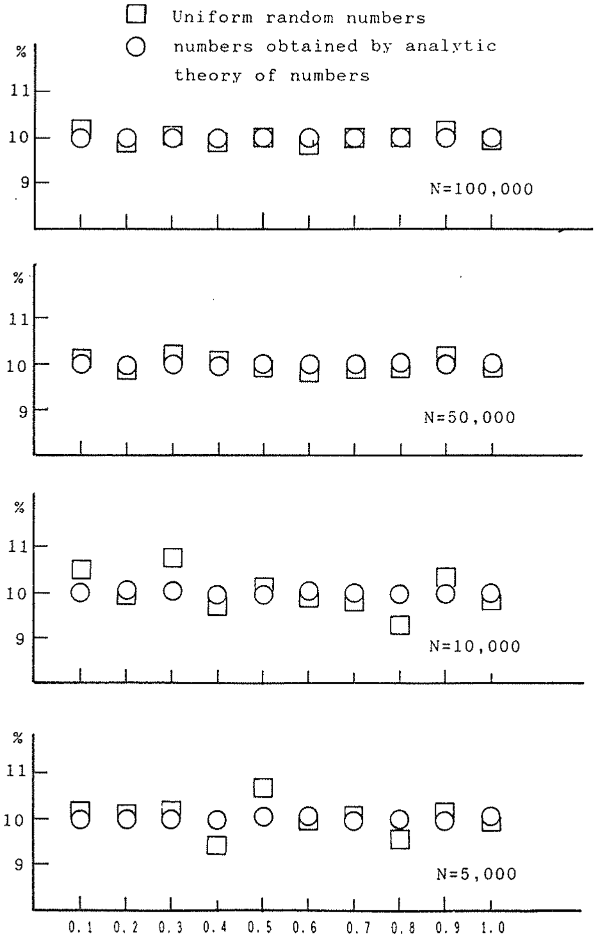

図1　数論メッシュと乱数の分布比較

数論メッシュ法[5]は近年開発されたもう1つの新しい計算方法で，より少ないエネルギー粒子でバラツキの少ない結果を得ることができ，これによって計算時間を減少させることができる。数論メッシュ法では，放射伝熱の多重積分を解くため，数論メッシュを用いている[4),5)]。数論メッシュは，式を用いて計算される一種の数群であり，図1に示すように，一様乱数によって求めた分布は，使用した乱数の数が10万に達しても数論メッシュほどその一様性が良くないことが分かる。したがって同じ精度を得るために，数論メッシュ法はモンテカルロ法より計算時間が短くなると考えられる。これまで数論メッシュ法はモンテカルロ法ほど広くは用いられていなかったが，いくつかの応用例が既に発表されている[5)]。

2．数論メッシュ法による多重積分解法原理と放射伝熱数値解析への応用

数論メッシュ法により多重積分を解く手法の基本は，複雑な多重積分を変換して得られる下式のような高次元立方体（あるいは超平行六面体という）において，対応する関数の数値積分を求めることにある[4),5)]。

$$I(f)=\int_{Gs}\phi(\bar{y})d\bar{y}=\int_0^1\cdots\cdots\cdots\int_0^1 f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_S)dx_1, dx_2\cdots\cdots dx_S \tag{1}$$

ただし，式(1)の真中の部分は普通の多重積分で，これは適当な変換で右側の0～1の標準域における積分にすることができる。この標準域は単位超立方体といわれている。以下簡単のため高次元立方体と呼ぶ。つぎにこの積分を式(2)に示すようなS次元空間中でのNケの離散点におけるfの値の平均値として求めるのが，この数論メッシュ法である。ここで，式(2)の右辺のEを最小にするような離散点集合は数論の式[4)]を用いて求めることができ，これをこの高次元立方体における最良分布点集合（数論メッシュ）と呼ぶ。この方法によれば直接多重積分を解く面倒を避けることができる。

$$\int_0^1\cdots\cdots\int_0^1 f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_s)dx, dx_2\cdots\cdots dx_s=\frac{1}{N}\sum_{K=1}^{N}f\left[\left\{\frac{Ka_1}{N}\right\}, \left\{\frac{Ka_2}{N}\right\}, \left\{\frac{Ka_2}{N}\right\}, \cdots\cdots,\right.$$
$$\left.\left\{\frac{Ka_s}{N}\right\}, \cdots\cdots, \left\{\frac{Ka_s}{N}\right\}\right]+E \tag{2}$$

ただし，

N：$N>2$ の素数

a_i：$a_i=a_i(N)(i=1, 2, \cdots\cdots, S)$ の整数で，Nに対する最良係数と呼び，数論で求める。

$\{u\}$：数 u の小数部分

S：積分の次数

K：$1\leq K\leq N$ の整数

$M=\left[\left\{\frac{Ka_1}{N}\right\}, \left\{\frac{Ka_2}{N}\right\}, \cdots\cdots, \left\{\frac{Ka_s}{N}\right\}\right]$：高次元立方体における最良分布点集合であり，数論メッシュの一つである。

E:$E=0\left(\frac{1n^{a(s-1)}N}{N}\right)$ は誤差の見積りの式である。

数論メッシュを用いて定積分を計算する時は，まず適当な N を選び，この N に対して最良係数 a_i を参考文献4）の方法で求める必要がある。本報ではその一部分を付表1としてのせた。

放射伝熱数値解析において，数論メッシュ法を適用した例としては文献5）が上げられる。この論文では，ある要素から放射エネルギー粒子をその周囲の球面上に均等に射出させるため，以下

のような手法を採用している。まず燃焼室をガス要素と壁面要素に分割するが，計算する時は，各要素をさらにいくつかの同じ形状と大きさのもっと小さい子要素に分割し，各子要素の形状がなるべく立方体に近づくようにする。つぎに各子要素の位置においてこれらの子要素を正多面体に置き換え，エネルギー粒子をこの正多面体の中心からその各頂点あるいは各面の中心，あるいはその双方へ射出させる。文献5）では図2に示すような正20面体を用いている。これは頂点数が12で，表面の正三角形数が20，またこれらの和は32であるから，計算にあたって多面体から射出されるエネルギー粒子数としては12，20，32の一つを選ぶことができる。この際，各エネルギー粒子に割当てられた立体角はそれぞれ$4\pi/12$，$4\pi/20$，$4\pi/32$となり，これは各エネルギー粒子に対してすべて等しくなる。即ち，ガス要素からその周囲に均等に射出される放射エネルギーの特性に合うこととなる。しかしながら，このままでは一つの子要素（多面体）から射出されたエネルギー粒子数は最大で32しかないので，1ケのエネルギー粒子に対する立体角が大きいこと，またそれぞれの子要素からのエネルギー粒子の軌跡が重なりあうことがあるといった問題がある。従って著者等はこれを解決するために，以下のような手法を開発した。即ち，1ケの子要素について，これから射出されるエネルギー粒子の射出方向を上述のように決定したあと，その隣の子要素に対して同じに射出方向を決定する場合，この子要素の位置の正多面体を2つの方向へある角度で回転させる。この角度（θ^*，η^*）は数論メッシュ法により式(3)のように決められる。

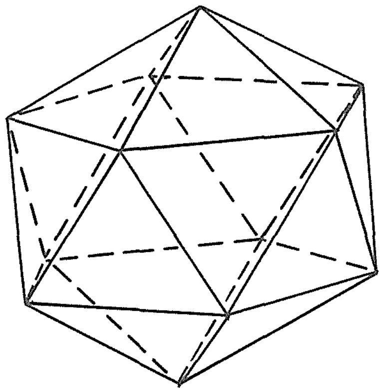

図2　正20面体

$$\left.\begin{aligned}\theta^*&=2\pi/5M(\xi)\\ \eta^*&=2\pi/5M(\xi)\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ここで，$0<M(\xi)<1$ は式(2)の計算で用いた数論メッシュである。なお，式(3)の係数 $2\pi/5$ は，各子要素から射出されるエネルギー粒子の軌跡の重なり合いを避けるために設定される。このような回転操作によりすべてのエネルギー粒子の軌跡は重ならず，また各子要素からの射出を合わせたもとの要素からの射出角度分布も均等になる。この方法によって燃焼室モデルに対し放射伝熱の数値解析を行った結果を，モンテカルロ法の結果と比較した結果，数論メッシュ法のほうが精度が高く，また計算時間が10～20%短縮されることが明らかにされている[5)]。

3．モンテカルロ法で使用する乱数の数論メッシュによる代替法

モンテカルロ法による放射伝熱値解析では，確率論により多重積分を解いている。即ち，複雑

な多重積分の対象を変換して,多次元空間の中に均等分布させた多数の点における関数値を求め,その平均値により多重積分の値を求めている。これらの多数の点を求めるのにモンテカルロ法では一様乱数を用いるが,これらはプログラム中で必要になるたびに数式を用いて求めている。この方法で直交座標系において用いる主な式を以下に示す[1),2),3),6-9)]。

(1) ガス要素から射出する場合

エネルギー粒子の射出方向：

$$\theta=2\pi R_\theta \tag{4}$$

$$\eta=\cos^{-1}(1-2R_\eta) \quad \text{または} \quad \cos\eta=1-2R_\eta \tag{5}$$

エネルギー粒子の射出の方向余弦：

$$R_z=1-2R_\eta \tag{6}$$

$$R_y=\sqrt{1-R_z^2}\sin 2\pi R_\theta \tag{7}$$

$$R_x=\sqrt{1-R_z^2}\cos 2\pi R_\theta \tag{8}$$

エネルギー粒子が吸収されるまでに飛ぶ距離：

$$r=-\frac{1}{kp}1n(1-R_r) \tag{9}$$

(2) 壁面要素から射出する場合

エネルギー粒子の射出の方向角：

$$\theta=2\pi R_\theta \tag{10}$$

$$\eta=\sin^{-1}\sqrt{R_\eta}=\cos^{-1}\sqrt{1-R_\eta} \quad \text{または,} \quad \cos_\eta=\sqrt{1-R_\eta} \tag{11}$$

エネルギー粒子の射出の方向余弦：

$$R_z=\sqrt{1-R_\eta} \tag{12}$$

$$R_y=\sqrt{R_\eta}\sin 2\pi R_\theta \tag{13}$$

$$R_x=\sqrt{R_\eta}\cos 2\pi R_\theta \tag{14}$$

エネルギー粒子が吸収されるまでに飛ぶ距離：

$$r=\frac{1}{kp}1n(1-R_r) \tag{15}$$

ただし, R_θ, R_η, R_r はすべて0～1の間の一様乱数で, kp はガスの吸収係数である。これらの式により各エネルギー粒子の追跡計算を行い,各要素において他の要素から射出された放射エネルギーの吸収量を計算し,これを用いてエネルギー平衡式により繰返し計算を行うことで,各要素の温度あるいは壁面の熱流束を求めることができる。

上述のように,モンテカルロ法ではエネルギー粒子の追跡計算をするところで,多数の乱数を用いるので,計算時間が長くなる。そこで本研究では,乱数より少ない数で良い均一性を有する数の集合として,数論メッシュ法を用いることを検討した。前述の文献5）の方法では,エネルギー粒子の射出を正多面体を用いて行ない,全体としての射出方向の均一性を得るために数論メッシュを用いて,この多面体の向きを変化させたが,数論メッシュを用いると多次元空間に均等な点の集合を得られるという特性を利用すると,モンテカルロ法で用いている１セットの乱数が数論メッシュで置き換えられるのではないかと考えられる。モンテカルロ法による放射伝熱解析の手法自身はすでに確立された方法であるので,これがうまくいけば非常に簡単であるといえよう。しかしながら,数論メッシュと一様乱数は,いずれも０～１の間に分布している数であるが,両者には以下のような相異がある。

(ｉ) モンテカルロ法で用いる一様乱数は長い周期を有し,その中でどこをとっても理想的には

一様な分布を示す。しかしながら数論メッシュは，積分の次数に関係があり，S 重積分なら数論メッシュもやはり S 個の部分に分かれ，それぞれ異なった分布則を有する。これは S 次元空間内の点集合において，各次元毎に特定の分布則を有することに対応している。

(ii)　乱数によって作られた点集合を有限の個数に分割すれば，各部分集合はほとんど同じとなるが，数論メッシュの S 個の部分はそれぞれ独特な分布則を持つので，任意に分割することはできない。即ち，各部分の全数を見るとそれぞれの値は0～1の間に一様に分布するが，その一部を抜き出すと一様にはならない。

(iii)　設定した N によって付表1のように係数 a_i は異なり，式(2)に示す数論メッシュ M も異なる。

従ってむやみに乱数を数論メッシュに代えるわけにはいかず，多重積分の対象となる関数と数論メッシュの対応関係を考慮しておく必要がある。しかしながら，数論メッシュは上述の考え方によって求めた式(2)を用いて計算されるが，実際の解析対象となる問題ではいろいろな因子を含むので，数学的に関数と数論メッシュの対応関係を求めることは不可能である。筆者等はこのため実用的方法として下記のような手法を用いることとした。

まずモンテカルロ法により粒子数を十分用いて精度の良い計算結果を得，それから適当に選択した数論メッシュを選び，乱数をすべてこの数論メッシュに代えて再び計算を行う。両者の計算結果を比較し，モンテカルロ法の計算結果に一番近づく数論メッシュを選ぶことで，関数との対応関係を求めることができる。

このような目的で，図3に示す2次元の系の放射，対流共存伝熱を考える。またこの系の境界条件と入力条件を図4に示す。この計算ではエネルギー粒子1個の射出あたり乱数を5ケ用いるので，5次元積分方程式を解くことに対応しており $S=5$ となる。N を与えると，a_i（$i=1$，2，

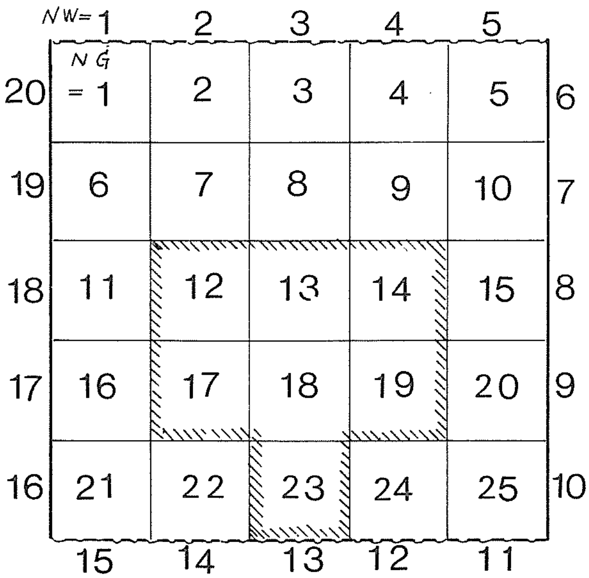

図3　2次元燃焼室解析モデル

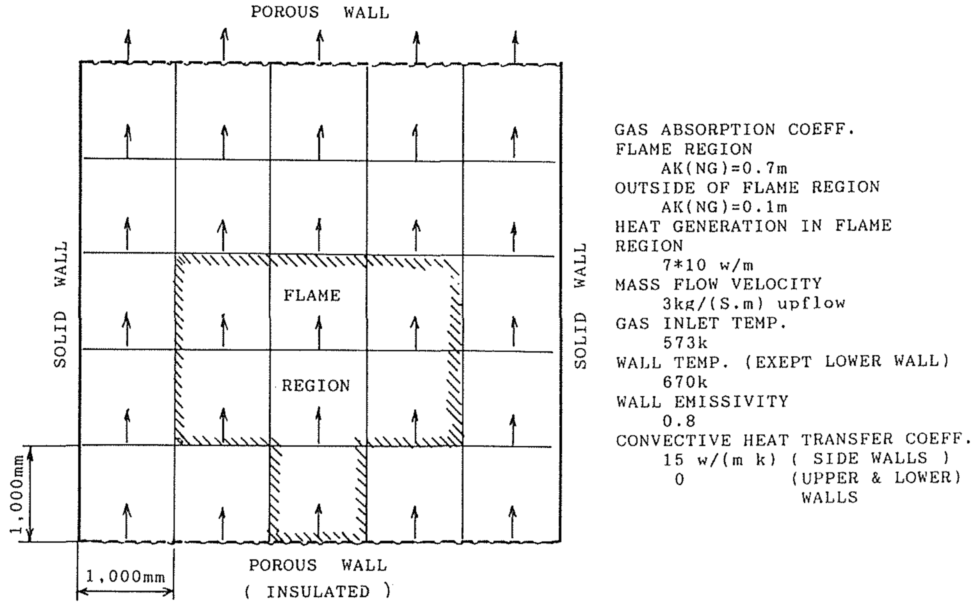

図4 境界条件と入力条件

…, 5) は付表1から求まるので，これを用いて式(2)の数論メッシュを求め，*DATA* 文でプログラム中に入れておけば，計算中必要なときに直接読み込みができる。これにより計算時間の短縮を計ることができる。

4．計算結果と考察

数論メッシュ法とモンテカルロ法による計算結果の比較を図5-a, b, c と図6に示す。図5-a, b, c は熱流束分布，図6は温度分布である。図5-a は数論メッシュ法による粒子数を2129と8191用いた場合の計算結果で，いずれも多数のエネルギー粒子を使用したモンテカルロ法により求められた解とよく合い，数論メッシュ法の妥当性が示されている。また，図5-b, c より，粒子数が同じ場合には，数論メッシュ法のほうがモンテカルロ法より結果がよくなっていることがわかる。この差は特に粒子数の少ない図5-c の場合に著しくなる。図6より温度分布も数論メッシュ法（粒子数8191）の解は多数のエネルギー粒子を用いたモンテカルロ法（粒子数 N＝50000）の解と良い一致を示している。

したがって適当に数論メッシュを選択すれば，これをモンテカルロ法で用いる一様乱数と置き換えられることが分かった。また数論メッシュ法では，数論メッシュをあらかじめ算出して DATA 文で記述してあるので，乱数の値をその都度計算して求めるモンテカルロ法よりも計算時間が20%位の短縮になった。また，同じ精度を要求した場合には，数論メッシュ法のほうがモンテカルロ法より所要粒子数が少ないので，数論メッシュ法の計算時間はさらに短縮される。

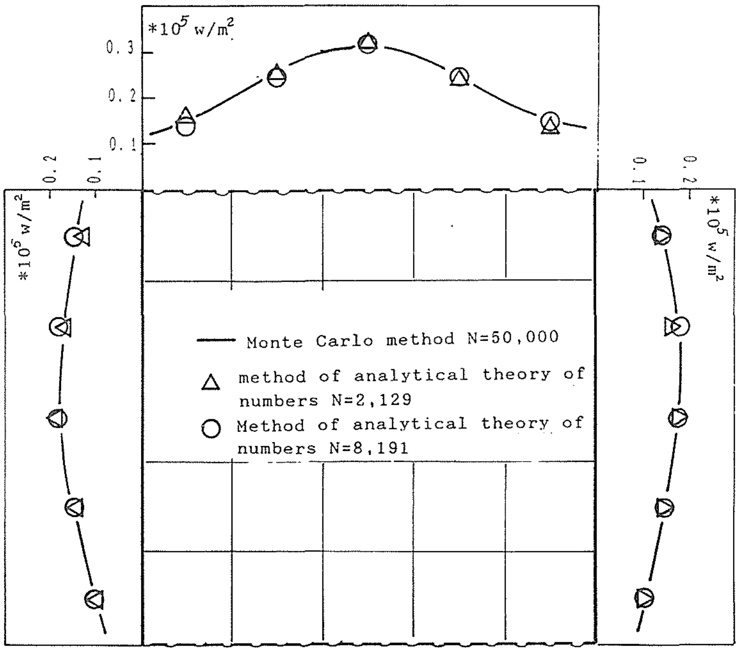

図５-a　壁面熱流束分布比較

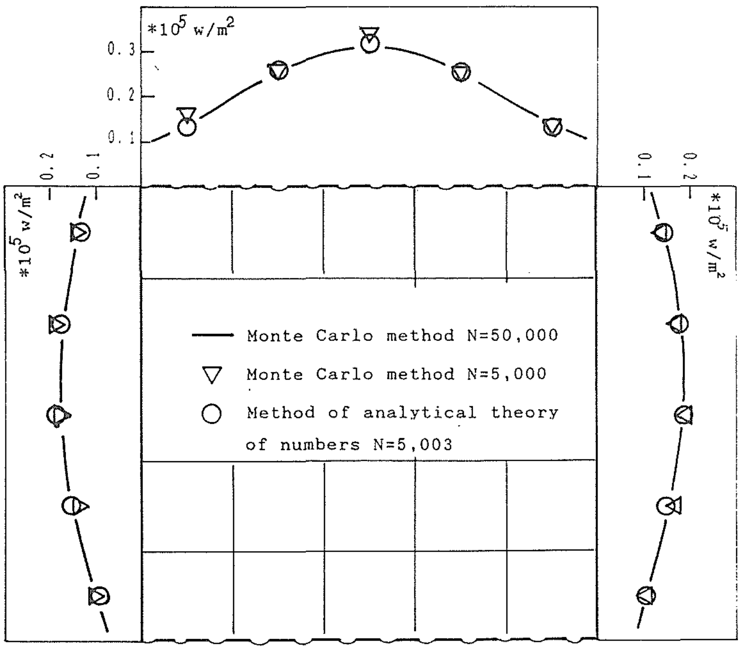

図５-b　壁面熱流束分布比較

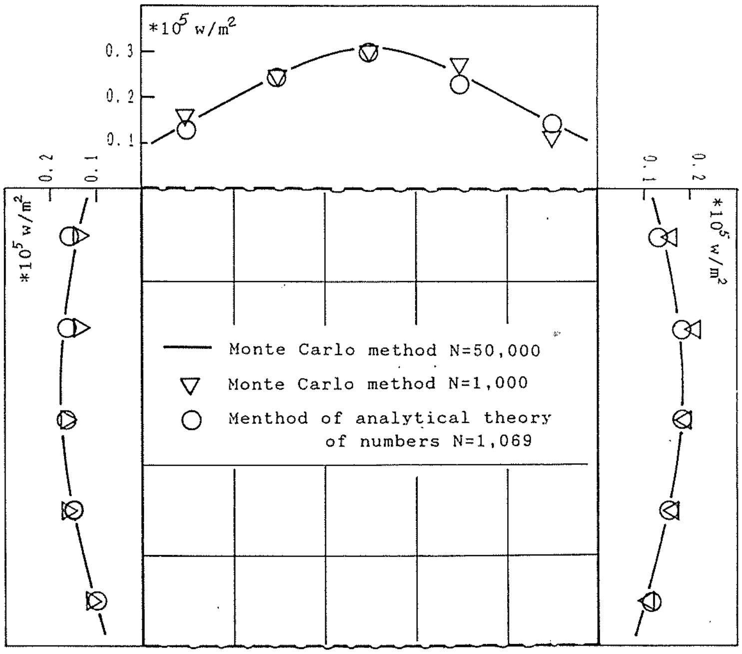

図５-c　壁面熱流束分布比較

upper: Monte Carlo method N=50,000

lower: Method of analytical theory of numbers N=8,191

	670	670	670	670	670	
670	587 587	1024 1024	1190 1190	1023 1024	587 587	670
670	584 584	1028 1028	1200 1200	1028 1028	584 584	670
670	581 581	1032 1031	1210 1210	1031 1031	581 581	670
670	578 578	815 815	1027 1028	815 815	578 578	670
670	575 575	575 576	8096 8098	576 576	575 575	670
	791 785	833 828	835 842	835 832	789 783	

図６　温度分布　(K)

5．ま と め

(1) 数論メッシュは計算機中で求める一様乱数より分布の一様性が遥かによく，モンテカルロ法で用いる乱数を数論メッシュに代えると計算時間を短縮することができる。

付表1 数論メッシュ法の最適係数

S——積分重数

N＝p(素数)——公式メッシュ数

$a_i(i=1,2,\cdots)$——最適係数，ただし，$a_1=1$

H(b)−1——誤差関数，ここで，$f \in E^{a}_{s}(c)$，積分誤差の見積りの式は $|E| \leqq c(\pi^2/6)^{(as/2)}\,[H(b)-1]^{(a/2)}$

	S=3			S=4			
$N=p$	$H(b)-1$	a_2	a_3	$H(b)-1$	a_2	a_3	a_4
101	0.0703	40	85				
199	0.0214	30	104				
307	0.0114	75	99	0.0906	42	229	101
523	0.00454	78	331	0.0412	178	304	243
701	0.00319	215	660	0.0281	82	415	382
1069	0.00142	186	323	0.0150	71	765	865
1543	0.00075	355	1042	0.00837	128	954	215
2129	0.00044	359	1141	0.00500	766	1281	1906
3001	0.00025	276	1151	0.00303	174	266	1259
4001	0.00015	722	1154	0.00200	113	766	2537
5003	0.000105	1476	2274	0.001480	792	1889	191
6507	0.000070	592	2058	0.001009	1351	5080	3086
8191	0.000044	739	5515	0.000622	2488	5939	7859
10007	0.000033	544	5733	0.000486	1206	3421	2842
20039	0.000016	5704	12319	0.000276	19668	17407	14600
28117	0.000008	19449	5600	0.000108	17549	1900	24455
39029	0.000005	10607	26871	0.000077	30699	34367	60605
57091	0.000002	48188	21101	0.000056	52590	48787	38790
82001	0.000001	21252	67997	0.000031	57270	58903	17672
100053	0.000001	28036	22431	0.000019	92313	24700	95582

S=5						S=6					
$N=p$	$H(b)-1$	a_2	a_3	a_4	a_5	$H(b)-1$	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1069	0.0962	63	762	970	177						
1543	0.0580	58	278	694	134						
2129	0.0383	618	833	1705	1964	0.186	41	1681	793	578	279
3091	0.0237	408	1409	1681	1620	0.123	233	271	122	1417	51
4001	0.0154	1534	568	3095	2544	0.086	1751	1235	1945	844	1475
5003	0.0114	840	177	3593	1311	0.063	2037	1882	1336	4803	2846
6007	0.0085	509	780	558	1693	0.050	312	1232	5943	4060	5250
8191	0.0055	1386	4302	7715	3735	0.034	1632	1349	6380	1399	6070
10007	0.0042	198	9183	6967	8507	0.027	2240	4093	1908	931	3984
15619	0.0032	10641	2640	6710	784	0.0197	8743	8358	6559	2795	772
20039	0.0022	11327	11251	12076	18077	0.0123	5557	150	11951	2461	9179
33139	0.0011	32133	17866	21281	32247	0.0060	18236	1831	19143	5522	22910
51097	0.0000	44672	45346	7044	14242	0.0031	9931	7551	29682	44446	17340
71053	0.0002	33755	65170	12470	6878	0.0026	18010	3155	50203	6605	13328
100063	0.002	90036	77477	27253	6222	0.0015	43307	15440	39114	43534	30955

(2) 乱数を数論メッシュで代替するためには、解くべき多重積分の被積分関数の各次元と数論メッシュの各部分の対応関係を探す必要がある。この関係は，試行錯誤により適当な対応を得ることができる。

(3) 乱数を数論メッシュに代えることにより，解析条件に柔軟に対応できるというモンテカルロ法の長所を保存し，計算精度の向上と計算時間の短縮を計ることができた。

参考文献

1）谷口　博　他：放射熱線法による円筒形ガス改質炉内三次元放射伝熱解析，日本機械学会論文集，Vol. 55, No. 514, 1989, p. 1724-1728.

2）工藤一彦：モンテカルロ法による放射伝熱の解法とガス燃焼円筒炉への適用，燃焼研究，No. 82, 1989, p. 3-26.

3）工藤一彦：モンテカルロ法による放射熱伝達解析，伝熱研究，Vol. 26, No. 102, 1987, p. 101-123.

4）華羅庚，王元：数論在近似分析中的応用，中国科学出版社，1986，p. 74-77.

5）陳昌和：数論方法在輻射換熱過程数値模擬中的応用，中国清華大学博士学位論文，p. 41-89.

6）谷口　博：機械工学における電子計算機の応用，サイエンス社，1979，p. 14-109.

7）小竹　進　等，日本機械学会編：熱と流れのコンピュータアナリシス，コロナ社，1986，p. 154-175.

8）徐旭常：燃焼室数学模擬和輻射伝熱的 Monte-Carlo 解法，中国清華大学熱能工程系研究報告，1979，p. 19-28.

9）徐旭常等：燃焼過程数値計算，中国科学出版社，1986，p. 134-203.

10）王雲山等：大型電站鍋炉中火焰三元伝熱数値計算的実際応用和結果分析，中国工程熱物理学報，Vol. 7, No. 2, 1986, p. 143-146.