



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	位相共役鏡による結像特性の空間周波数伝達関数を用いた解析
Author(s)	岡本, 淳; Okamoto, Atsushi; 三島, 瑛人 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 156, 77-83
Issue Date	1991-07-20
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/42286">https://hdl.handle.net/2115/42286</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	156_77-84.pdf



## 位相共役鏡による結像特性の空間周波数伝達関数を用いた解析

岡本 淳 三島 英人

(平成3月3月20日受理)

### Optical Fourier Analysis of Image Formation by a Phase Conjugate Mirror

Atsushi OKAMOTO and Teruhito MISHIMA

(Received March 20, 1991)

#### Abstract

The optical transfer function and equation expressing the axial location of the image by PCM have been derived from the phase transfer characteristics of the function. In the non-degenerate operation with pure monochromatic waves, we show that the perfect conjugate replica can be obtained under the paraxial ray approximation. We also show that the transverse locations of the object and the image coincide but that the axial locations do not. The spreads of the axial location of the image owing to the temporal frequency bandwidth of a probe wave and the thickness of a nonlinear medium are discussed.

#### 1. ま え が き

近年、パラメトリック4光波混合を用いた光位相共役鏡の研究が活発になされている。位相共役鏡の持つ空間的波面反転の機能に着目して、光画像通信や光画像処理への様々な応用が提案されている<sup>1)</sup>。

原理的には、位相歪を受けた画像を理想的な位相共役鏡を用いることによって完全に再生することが可能である。しかし、実際には、用いる光波の周波数帯域幅や媒質の有限な寸法などによって位相共役鏡の画像品質は制限を受ける。一方、理想的な縮退4光波混合においては、位相共役鏡に入射する物体像(プローブ像)と発生する共役像の位置が一致し、完全な位相共役像が得られることはすでによく知られている。しかし、プローブ光と共役光の周波数が異なる非縮退4光波混合の結像特性は、Mannebergが共役像の倍率について報告しているに過ぎず<sup>2)</sup>、非縮退動作に伴う物体像と共役像の位置のずれやプローブ光の周波数帯域幅による画像品質の低下については報告されていない。

本報告では、パラメトリック4光波混合による位相共役鏡を画像デバイスに応用した場合の基本的な特性を空間周波数伝達関数を用いて解析する。まず、非線形光学媒質中における位相共役波の発生過程を空間周波数領域で説明し、位相共役鏡の空間周波数伝達関数を導出する。次に、この伝達関数の位相特性に着目することによって、プローブ像と共役像の位置関係を定める結像式を導いている。更に、得られた結像式を、プローブ光の周波数帯域幅や非線形光学媒質の厚さ

を考慮した場合の解析に応用し、画像品質の低下の原因となる結像位置の広がりを表す定量的な表現式を導出する。

以下の解析においては、解析を簡単にするため、均一な屈折率を持つ非線形光学媒質を仮定する。簡単のため、媒質の屈折率は1に等しいとして解析を進めるが、この仮定は非線形光学媒質としてアルカリ金属蒸気などの気相媒質を用いる場合にはそのまま適用できる。また、本解析は、プローブ光と共役光の周波数が異なる準縮退<sup>3)</sup>および非縮退4光波混合<sup>2)</sup>を用いた位相共役鏡に対しても適用可能である。

## 2. 位相共役波発生の空間周波数領域における記述

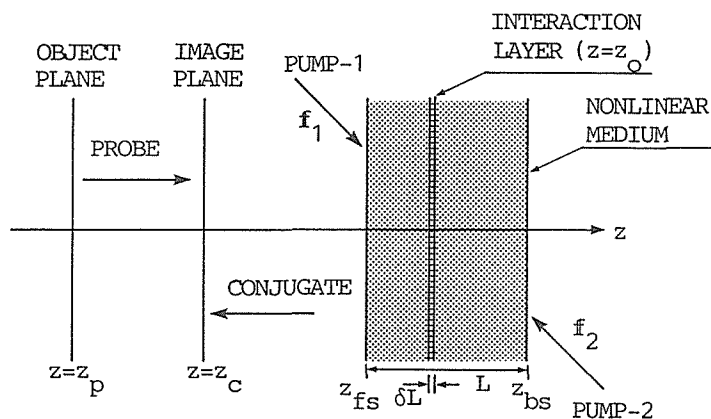


図1 非線形光学媒質と物像面の座標系

位相共役鏡に対して、図1に示す座標系を仮定する。非線形光学媒質の入射面の法線をデバイスの軸方向 $z$ と定める。ここで、非線形光学媒質が多くの仮想的な相互作用領域から構成されていると仮定する。各々の相互作用領域は像面間の距離や媒質の開口と比較して十分に薄く、その厚さを $\delta L$ 、その位置を $z=z_0$ とする。非線形光学媒質に対するこのようなモデルは、非線形結晶を用いた赤外線映像アップコンバータの解析においてChiou<sup>4)</sup>が提案したものである。

まず、パラメトリック混合における4つの波が、各々単一の空間周波数成分からなる場合を考える。非線形光学媒質の開口が十分な大きさを持つ場合には、光軸に垂直な方向に対する位相整合条件が厳密に満たされる必要がある。この関係を空間周波数領域で表すと

$$f_c = f_e - f_p \quad (1)$$

となる。ここで、 $f_e$ および $f_p$ は、共役光とプローブ光の空間周波数であり、二つの平面波ポンピング光の空間周波数を $f_1$ および $f_2$ で表すと

$$f_e = f_1 + f_2 \quad (2)$$

が成立している。以下において、 $f_e$ をポンピング光の等価空間周波数と呼ぶ<sup>5)</sup>。

縮退4光波混合による位相共役波の発生においては、図2に示すように、通常、二つの対向伝搬するポンピング光が用いられる。この場合、二つのポンピング光の空間周波数に対して $f_1 = -f_2$ が成立するから、式(2)は

$$f_e = 0 \quad (3)$$

となる。これを、式(1)に代入すると

$$f_c = -f_p \quad (4)$$

が成立し、入射プローブ光の波面反転成分が得られることが分かる。もし、プローブ光と共役光の(時間)周波数が一致していれば、図2に示すようにこれらの波は互いに反対方向に伝搬する。

次に、入射プローブ光が複数の空間周波数成分から構成される一般的な像の場合を考察する。相互作用領域が十分に薄い場合には、この領域に入射するプローブ光とここから発生する共役光のフーリエスペクトルは比例関係にある。この関係は、Pepperら<sup>6)</sup>によって得られた結合モード方程式をフーリエ変換することによって容易に示される。式(1)の位相整合条件を考慮して、厚さ $\delta L$ の相互作用領域に入射するプローブ光のフーリエスペクトル $A_p^*(f; z_0)$ と発生する共役光のフーリエスペクトル $A_c(f; z_0)$ の関係式を導くと

$$A_c(f; z_0) = -j\beta\delta L \cdot A_p^*(f_c - f; z_0) \quad (5)$$

となる(付録参照)。但し、 $\beta$ は非線形相互作用の強さを表す係数であり、記号\*はフーリエスペクトルの複素共役成分を表している。

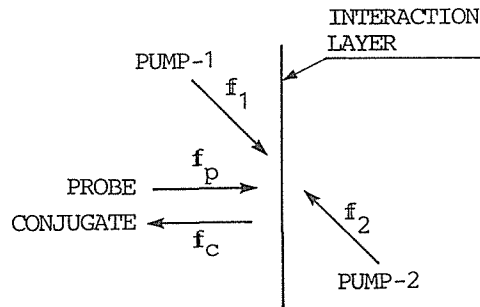


図2 縮退4光波混合

### 3. 単一の相互作用領域による結像

ここでは、単一の相互作用領域による結像作用について考察し、プローブ物体、共役像および相互作用領域の位置関係を表す方程式を導出する。図1に示すように、物体面、共役像面および相互作用領域の位置を各々 $z = z_p$ 、 $z = z_c$ および $z = z_0$ とする。

まず、プローブ像が物体面 $z = z_p$ から相互作用領域 $z = z_0$ まで自由伝搬する過程を考える。物体面におけるプローブ像のフーリエスペクトルを $A_p^*(f; z_p)$ で表すと、この伝搬区間の特性を表す空間周波数伝達関数は

$$\begin{aligned} H_p(f) &\equiv \frac{A_p^*(f; z_0)}{A_p^*(f; z_p)} \\ &= \exp\left\{jk_p(z_0 - z_p)\left[1 - \left(2\pi \frac{f}{k_p}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \end{aligned} \quad (6)$$

で与えられる。ここで、 $f = |f|$ であり、 $k_p$ はプローブ光の波数を表す。

同様に、相互作用領域 $z = z_0$ において発生した共役光が、共役像面 $z = z_c$ まで自由伝搬する過程を表す空間周波数伝達関数は

$$H_c(\mathbf{f}) \equiv \frac{A_c(\mathbf{f}; z_0)}{A_c(\mathbf{f}; z_c)} = \exp\left\{jk_c(z_0 - z_c)\left[1 - \left(2\pi \frac{f}{k_c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \quad (7)$$

となる。但し、 $A_c(\mathbf{f}; z_c)$ は共役像面における位相共役像のフーリエスペクトルであり、 $k_c$ はその波数を表す。

式(5)に示されるように、相互作用領域における共役像  $A_c(\mathbf{f}; z_0)$  とプローブ像  $A_p^*(\mathbf{f}_e - \mathbf{f}; z_0)$  は比例関係にあるから、物体面上のプローブ像と共役像面上の位相共役像との間に次式の空間周波数伝達関数を定義できる。

$$H_{\text{PCM}}(\mathbf{f}) \equiv \frac{A_c(\mathbf{f}; z_0)}{A_p^*(\mathbf{f}_e - \mathbf{f}; z_p)} \quad (8)$$

本来非線形な現象であるパラメトリック過程に対して、このような伝達関数の手法を用いることが可能であるのは、厳密には、ポンピング光が平面波の場合に限られることに注意を要する。式(5),(6)および式(7)を用いると、式(8)は

$$H_{\text{PCM}}(\mathbf{f}) = -j\beta \delta L \exp\{j\theta\} \quad (9)$$

と書ける。但し

$$\theta \equiv -k_c(z_0 - z_c)\left[1 - \left(2\pi \frac{f}{k_c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + k_p(z_0 - z_p)\left[1 - \left(2\pi \frac{|\mathbf{f} - \mathbf{f}_e|}{k_p}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

とおいた。

はじめに、縮退4光波混合において対向ポンピングを用いる場合には、式(3)が成立するため、式(10)における位相  $\theta$  は

$$\theta \equiv k(z_c - z_p)\left[1 - \left(2\pi \frac{f}{k}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

となる。ここで、波数に対して

$$k \equiv k_c = k_p \quad (12)$$

とおいた。式(10)より物体面と共役像面の位置が等しく  $z_c = z_p$  とすると、任意の空間周波数に対して  $\theta = 0$  が成立する。この場合、式(9)のフーリエ逆変換はDiracのデルタ関数に比例するため、完全な位相共役像が物体面と同じ位置に生ずることが分かる。

次に、プローブ光と共役光の周波数が異なる非縮退4光波混合の場合を考察する。式(10)をTaylor展開し空間周波数の低次の項によって近似すると（幾何光学における近軸近似に対応する）、

$$\theta = \theta_0 + 2\pi \Delta \rho \cdot \mathbf{f} + \pi \epsilon_F f^2 \quad (13)$$

が得られる。但し、 $\theta_0$ 、 $\Delta \rho$  および  $\epsilon_F$  は

$$\theta_0 \equiv k_p(z_0 - z_p) - k_c(z_0 - z_c) - 2\pi^2 \frac{z_0 - z_c}{k_p} f_e^2 \quad (14)$$

$$\Delta \rho \equiv 2\pi \frac{z_0 - z_p}{k_p} \mathbf{f}_e \quad (15)$$

および

$$\epsilon_F \equiv 2\pi \left( \frac{z_0 - z_c}{k_c} - \frac{z_0 - z_p}{k_p} \right) \quad (16)$$

で与えられる。ここで、 $\Theta_0$  は空間周波数に依存しない位相推移を表し、検出される像の品質には影響を与えない。 $\Delta\rho$  は光軸に垂直な横方向への像の平行移動を表している<sup>7)</sup>。この  $\Delta\rho$  の影響は対向ポンピング ( $f_e=0$ ) によって取り除くことができる。プローブ像の完全な位相共役像が得られるためには、式(9)のフーリエ逆変換が Dirac のデルタ関数で表される必要がある。このための条件は  $\epsilon_F=0$  すなわち

$$\frac{z_0 - z_c}{k_c} = \frac{z_0 - z_p}{k_p} \quad (17)$$

である。上式は単一の相互作用領域によって生ずる位相共役像に対する光軸方向の結像公式に対応している。特に、非縮退4光波混合においては近軸光線近似のもとでのみ完全な共役像が得られること、および、物体面と共役像面の位置が一致しないことが縮退4光波混合の場合との相違である。

#### 4. プローブ光の周波数帯域幅による結像位置の広がり

これまでの議論においては、すべて単色光を仮定していた。しかし、実際には用いる光源の有限な帯域幅を考慮する必要がある。その理由は、式(17)の分母にある波数  $k_c$  および  $k_p$  が各光波の周波数に依存するため、プローブ光の周波数帯域に含まれる異なった周波数成分は各々異なった位置に位相共役像を発生させるからである。共役像面の位置の広がり観測される画像の品質を低下させる。ここでは、縮退4光波混合の場合を仮定し、プローブ光の周波数帯域幅とそれによって生ずる共役像面の位置の広がりに対する定量的な関係式を導出する。

まず、プローブ光の中心周波数と帯域幅を各々  $\omega_0$  および  $\Delta\omega$  で表す。ポンピング光は純単色光と仮定する。縮退4光波混合の場合には、 $\omega_0$  はポンピング光の周波数ならびに発生する位相共役光の中心周波数と一致する。いま、位相共役鏡に周波数  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega/2$  のプローブ光成分が入射した場合、発生する位相共役光成分の周波数は  $\omega = \omega_0 - \Delta\omega/2$  であり、式(17)よりこの場合の共役像面の位置は

$$\begin{aligned} z_c(\omega = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}) &= z_0 - \frac{\omega_0 - \Delta\omega/2}{\omega_0 + \Delta\omega/2} (z_0 - z_p) \\ &\simeq z_p + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} (z_0 - z_p) \end{aligned} \quad (18)$$

となる。近似は  $\Delta\omega \ll \omega_0$  の実用的な場合に対して成立する。従って、周波数帯域幅  $\Delta\omega$  に対する共役像面の位置の広がり  $\Delta z_c$  として

$$\begin{aligned} \Delta z_c &\equiv \left| z_c(\omega = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}) - z_c(\omega = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}) \right| \\ &= 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} |z_0 - z_p| \end{aligned} \quad (19)$$

が得られる。上式より、共役像面の位置の広がり、プローブ光の周波数帯域幅ならびに物体面と相互作用領域の距離に比例して増加することが分かる。

## 5. 非線形媒質の厚さによる結像位置の広がり

単一の相互作用領域による結像作用については、すでに第3章において解析した。非線形光学媒質が十分に薄い場合には、単一の相互作用領域を仮定して得られた結果をそのまま適用することができる。しかし、非線形光学媒質がある程度の厚さを持つ場合には、媒質中の異なった位置にある相互作用領域から発生する位相共役光の影響を考慮する必要がある。

いま、式(13)右辺に含まれる係数  $\Theta_0$ 、 $\Delta\rho$  および  $\epsilon_F$  について相互作用領域の位置  $z_0$  に対する依存性を考察する。まず、式(14)より明らかなように、 $\Theta_0$  は相互作用領域の位置  $z_0$  の関数であるにもかかわらず空間周波数には依存していない。従って、この  $\Theta_0$  は像全体の明るさに影響するものの位相共役光の結像位置には全く影響を及ぼさないことが分かる。これは、式(9)を  $z_0$  に関して媒質全体にわたって積分すれば容易に判明する。次に、 $\Delta\rho$  については前述した通り  $f_e=0$  とすることでその影響を除去できる。最後に、 $\epsilon_F$  の影響は、式(17)の結像式で示されている。ここで、共役像面の位置  $z_c$  は、物体面の位置  $z_p$  だけではなく相互作用領域の位置  $z_0$  にも依存している。従って、異なる位置にある相互作用領域から発生する共役光は光軸上の異なる位置に結像する。いま、 $z_c$  は  $z_0$  の単調関数であるから、非線形光学媒質の厚さ  $L$  による共役像面の位置の広がり、式(17)より

$$\begin{aligned} \Delta z_c &\equiv \left| z_c(z_0 = z_{fs}) - z_c(z_0 = z_{bs}) \right| \\ &= \left| \left( 1 - \frac{k_c}{k_p} \right) (z_{fs} - z_{bs}) \right| \\ &= \left| 1 - \frac{k_c}{k_p} \right| L \end{aligned} \quad (20)$$

となる。ここで、 $z_{fs}$  と  $z_{bs}$  は各々非線形光学媒質の前面と後面を表している ( $z_{bs} - z_{fs} = L$ )。縮退4光波混合においては、 $k_c = k_p$  を仮定すると媒質の厚さにかかわらず  $\Delta z_c = 0$  が得られる。しかし、非縮退4光波混合 ( $k_c \neq k_p$ ) の場合には、媒質の厚さに比例して  $\Delta z_c$  が増加することが分かる。

## 6. 結 論

本報告では、位相共役鏡の空間周波数伝達関数を導出し、その位相伝達特性に着目することによって物体面、共役像面および相互作用領域の位置関係を表す結像式を導出した。はじめに、十分に薄い相互作用領域に単色光を入射する非縮退4光波混合について以下の結論を得た。縮退4光波混合においては全立体角にわたって完全な位相共役像が得られるのに対し、非縮退4光波混合の場合には近軸光線近似のもとでのみ完全な位相共役像が得られる。ポンピング光の等価空間周波数に対して  $f_e=0$  となるような対向ポンピングによって、光軸に垂直な方向の像のずれを除去できる。物体面と共役像面の軸方向位置は一致しない。

次に、プローブ光の周波数広がり、位相共役鏡の画像品質に影響を及ぼすことを指摘し、縮退4光波混合においてプローブ光の周波数帯域幅と共役像面の位置の広がりとの関係式を導出した。

更に、共役像面の位置が、物体面の位置だけではなく非線形光学媒質中の相互作用領域の位置にも依存することに着目し、非線形光学媒質の厚さによる共役像面の位置の広がりを求めた。こ

これらの像面の位置の広がり、固定された観測面上では共役像のぼけとして検出されるものであり、位相共役鏡の画像品質の評価において有用であると考えられる。

### 謝 辞

本研究を進めるに当たって、数多くのご助言を頂いた北海学園大学工学部の桜庭一郎教授ならびに北海道大学工学部の小柴正則教授に深謝します。

### 文 献

- 1) See, for instance: R. A. Fisher, ed., Optical phase conjugation, (1983), Academic Press, New York. D. M. Pepper: IEEE J. Quant. Electron. QE-25 (1989), p. 312
- 2) G. Manneberg: J. Opt. Soc. Amer. A 3 (1986), p. 2033
- 3) D. M. Pepper and R. L. Abrams: Opt. Lett. 3 (1978), p. 212
- 4) W. Chiou: J. Appl. Phys. 42 (1971), p. 1985
- 5) 岡本, 佐藤, 三島, 桜庭: 信学論 (C), J71-C (昭63), 8, p.1
- 6) D. M. Pepper, D. Fekete and A. Yariv: Appl. Phys. Lett. 33 (1978), p. 41
- 7) J. W. Goodman: Introduction to Fourier Optics, (1968), p. 16, Mc-GrawHill, New York

### 付録 式(5)の導出

相互作用領域が十分に薄いと仮定すると、文献6)の式(2)は

$$A_c(x, y) = -j \frac{2\pi\omega}{c} \chi^{(3)} \delta L A_1(x, y) A_2(x, y) A_p^*(x, y)$$

となる。但し、 $c$ は光速、 $\chi^{(3)}$ は非線形感受率である。平面波ポンピングの場合には、ポンピング光のフーリエスペクトルは  $A_1(\mathbf{f}) = A_1 \delta(\mathbf{f} - \mathbf{f}_1)$  および  $A_2(\mathbf{f}) = A_2 \delta(\mathbf{f} - \mathbf{f}_2)$  で与えられるから、上式のフーリエ変換として

$$\begin{aligned} A_c(\mathbf{f}; z_0) &= -j\beta \delta L \cdot A_p^*(-\mathbf{f}; z_0) \star A_1(\mathbf{f}) \cdot A_2(\mathbf{f}) \\ &= -j\beta \delta L \cdot A_p^*(\mathbf{f}_e - \mathbf{f}; z_0), \end{aligned}$$

が得られる。ここで、記号 $\star$ は相関積分、記号 $\cdot$ は畳み込み積分を表し、係数 $\beta$ は

$$\beta = \frac{2\pi\omega}{c} \chi^{(3)} A_1 A_2$$

である。