



Title	変厚片持長方形板の自由振動
Author(s)	田中, 克明; Tanaka, Katsuaki; 山田, 元 他
Citation	北海道大學工學部研究報告, 157, 47-57
Issue Date	1991-10-16
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42299
Type	departmental bulletin paper
File Information	157_47-58.pdf



変厚片持長方形板の自由振動

田中 克明* 山田 元* 小林 幸徳*

(平成 3 年 6 月 28 日受理)

Free Vibration of a Cantilever Rectangular Plate with Varying Thickness

Katsuaki TANAKA, Gen YAMADA and Yukinori KOBAYASHI

(Received June 28, 1991)

Abstract

An analysis was presented for the free vibration of a cantilever rectangular plate with varying thickness by using the Ritz method. The transverse deflection of the plate was approximately expressed in series of the power function. Substituting the expression for the maximum kinetic and strain energies of the plate into Lagrange functional, the frequency equation was derived by the condition for a stationary value of the Lagrange functional. Eigenvalues and mode shapes of vibration were calculated numerically up to higher modes and the effects of the varying thickness on them were studied.

1. 緒 言

本論文では、変厚片持長方形板の自由振動を、リッツ法を用いて解析した。長方形板の振動に関する研究は数多く見られるが¹⁾、一端が固定され、残りの三つの辺が自由である片持長方形板の板厚が変化する場合についての研究は、航空機の羽根やタービン翼など産業界ではきわめて重要であるにもかかわらず数が少なく、著者らの知る限りでは、LIU ら²⁾の有限要素法を用いた研究があるに過ぎない。一方、著者らは、変厚片持扇形板の研究³⁾をすすめているが、リッツ法を用いた解析結果を検証するために、変厚片持長方形板の固有振動数と振動モードを求めたのが本研究である。

この研究のため、板の変位をべき関数で近似し、運動エネルギーとひずみエネルギーを解析的に求め、ラグランジュ関数の停留条件を用いることによって振動数方程式を導く。この結果をもとに数値計算を行ない、片持長方形板の固有振動数と振動モードに及ぼす変厚の影響を調べるとともに、他の著者の研究との比較も行った。

2. 理論解析

図 1 に示す変厚片持長方形板の中央面内に直角座標 (x, y) をとることによって、板の運動エネルギーとひずみエネルギーの最大値は次のように表される。

* 機械工学第二学科 機械力学講座

$$T = \frac{1}{2} \frac{D_0}{\mu a^2} \Omega^2 \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} \bar{h}(\xi) W^2 d\xi d\eta \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{D_0}{\mu a^2} \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} \bar{h}(\xi)^3 \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right)^2 + \mu^4 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right)^2 + 2\nu\mu^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) + 2(1-\nu)\mu^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta \quad (2)$$

ここで、 W は板の変位振幅、 D_0 は板の曲げこわさで縦弾性係数 E 、ポアソン比 ν および固定部の板厚 h_0 を用いて $D_0 = Eh_0^3 / \{12(1-\nu^2)\}$ で与えられる。また、 $\mu = a/b$ は板の縦横比であり、 $\xi = x/a$ 、 $\eta = y/b$ は、板の無次元座標である。 Ω は $\Omega^2 = \rho h_0 a^4 \omega^2 / D_0$ で定義される無次元振動数パラメータであり、 ρ は密度、 ω は円振動数である。

板厚が ξ 軸方向に直線的に変化するとき、板厚 $h(\xi)$ は、次のように表される。

$$h(\xi) = h_0 \bar{h}(\xi), \quad \bar{h}(\xi) = \left. \begin{array}{l} 1 - (1-\kappa)\xi \\ \kappa = h_1/h_0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

式中の h_1 は板の自由端での厚さであり、 κ は板厚比である。

以下の解析では、板の変位を許容関数を用いて次のように近似する。

$$W = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} Z_m(\xi) \cdot \Phi_n(\eta) \quad (4)$$

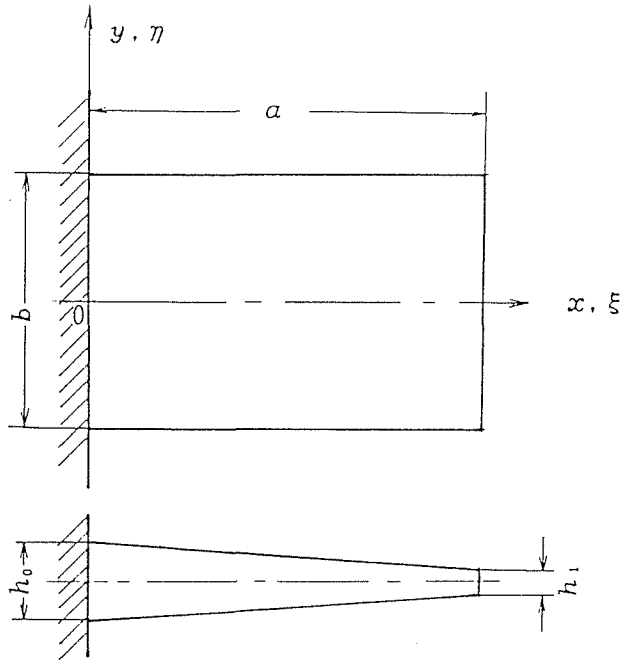


図1 変厚片持長方形板

許容関数として、固定部の幾何学的境界条件のみを満足するべき関数を用いる。

$$Z_m(\xi) = \xi^{m+2}, \quad \Phi_n(\eta) = \eta^n \quad (5)$$

べき級数は、リッツ法において比較的精度の高い近似解を与える。式(4)を式(1)と(2)へ代入し、ラグランジュ関数 $L = T - U$ の停留条件式 $\partial L / \partial A_{mn} = 0$ を用いることによって、次の振動数方程式が導かれる。

$$[U_{mn}^{(kl)} - \Omega^2 T_{mn}^{(kl)}] \{A_{mn}\} = 0 \quad (m, k=0, 1, \dots; n, l=0, 1, \dots) \quad (6)$$

式(6)は未定係数 A_{mn} に関する線形同次方程式で、この式より固有値 Ω を計算することによって板の固有振動数が決定され、その固有値に対応する固有ベクトルを計算することによって、板の振動モードを描くことができる。ここで、定積分された式(6)中の係数マトリックスの要素は次のとおりである。

$$[T_{mn}^{(kl)}] = \left(\frac{1}{(m+k+5)(n+l+1)} - \frac{(1-t)}{(m+k+6)(n+l+1)} \right) \times (1/2)^{(n+l+1)} \quad (7)$$

$$[U_{mn}^{(kl)}] = A \{1/(m+k+1) - 3t/(m+k+2) + 3t^2/(m+k+3) - t^3/(m+k+4)\} \\ + B \{1/(m+k+5) - 3t/(m+k+6) + 3t^2/(m+k+7) - t^3/(m+k+8)\} \\ + C \{1/(m+k+3) - 3t/(m+k+4) + 3t^2/(m+k+5) - t^3/(m+k+6)\} \quad (8)$$

なお、 A 、 B 、 C および t は

$$A = (m+2)(m+1)(k+2)(k+1)(1/2)^{(n+l+1)}/(n+l+1) \\ B = \mu^4 n(n-1)l(l-1)(1/2)^{(n+l-3)}/(n+l-3) \\ C = [\nu\mu^2 \{ (m+2)(m+1)l(l-1) + (k+2)(k+1)n(n-1) \} \\ + 2\mu^2(1-\nu)(m+2)(k+2)nl] (1/2)^{(n+l-1)}/(n+l-1) \\ t = (1-\kappa) \quad (9)$$

である。

ここで、板とはりの円振動数は、それぞれ次のように表される。

$$\text{板の場合} \quad ; \quad \omega_i = \frac{h_0}{a^2} \Omega_i \sqrt{E/12\rho(1-\nu^2)}, \quad (i=1, 2, \dots) \quad (10)$$

$$\text{はりの場合} \quad ; \quad \omega_i = \frac{h_0}{l^2} \lambda_i^2 \sqrt{E/12\rho}, \quad (i=1, 2, \dots) \quad (11)$$

したがって、はりの無次元振動数パラメーター λ_i は、次式によって板の無次元振動数パラメーター Ω_i に変換できる。

$$\Omega_i = \sqrt{1-\nu^2} \lambda_i^2 \kappa \quad (i=1, 2, \dots) \quad (12)$$

3. 数値計算結果と考察

板は、 ξ 軸に関して対称な構造であるので、 ξ 軸に関して対称な振動 (S形) と逆対称振動 (A形) が生じる。これを考慮すれば、式(4)において、対称振動では n として偶数のみを、逆対称振動では奇数のみを用いて計算することができる。したがって、横方向 (η 方向) の積分領域は、 $0 \sim 1/2$ を考慮すれば十分である。

表1は、板の縦横比を $a/b=2$ 、板厚比を $h_1/h_0=0.2$ とした場合の変厚長方形板の固有値の収束状況を示す。べき級数の項数 ($M \times N$) が増加するに従って、固有値は有効数字 2~3桁の範囲で収束している。本論文では、実用上の精度を考慮して、 $M \times N=8 \times 8$ を採用した。

表2は、GORMAN⁴⁾ が重ね合せ理論を用いて求めた等厚片持正方形板の固有値と、MABIE⁵⁾ の片持はりの固有値との比較を示す。等厚の片持正方形板の場合は、縦横比は $\mu = a/b=1$ 、板厚比

表1 変厚片持長方形板の固有値の収束状況 ($\nu=0.333$, $\mu=a/b=2.0$, $\kappa=h_1/h_0=0.2$).

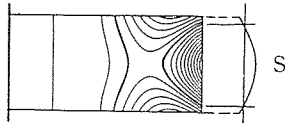
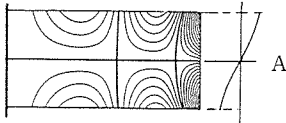
Type	Mode number	Ω $M \times N$					
		5 × 5	6 × 6	7 × 7	8 × 8	9 × 9	10 × 10
	1	4.154	4.152	4.151	4.151	4.150	4.150
	2	15.26	15.25	15.25	15.25	15.24	15.24
	3	35.47	35.02	35.01	35.00	34.99	34.98
	4	38.56	38.24	38.23	38.21	38.19	38.19
	5	64.36	64.09	63.98	63.96	63.94	63.92
	6	—	70.11	67.42	67.41	67.23	67.17
	1	11.63	11.63	11.63	11.63	11.63	11.63
	2	26.01	25.99	25.99	25.98	25.98	25.98
	3	50.05	48.94	48.89	48.86	48.83	48.82
	4	78.72	78.44	77.67	77.60	77.56	77.52
	5	95.80	86.42	83.61	83.58	83.34	83.31
	6	—	130.49	129.48	124.15	124.07	123.39

表2 片持板と変厚片持りとの固有値 Ω の比較, ($\nu=0.333$, $M \times N=8 \times 8$).

(a) $\mu=a/b=1$, $\kappa=h_1/h_0=1$, (b) $\mu=a/b=10$, $\kappa=h_1/h_0=1$,
(c) $\mu=a/b=10$, $\kappa=h_1/h_0=0.2$.

Mode Number	(a)		(b)		(c)	
	著者ら	Gorman[4]	著者ら	Mabieら[5]	著者ら	Mabieら[5]
1	3.46	3.46	3.35	3.32	4.07	4.05
2	21.10	21.09	21.00	20.78	14.96	14.84
3	27.07	27.06	58.83	58.18	35.14	34.76
4	53.54	53.53	115.69	114.00	65.25	64.21
5	61.13	61.12	192.58	188.40	105.95	103.33

は $\kappa=h_1/h_0=1$ であり, 固有値は文献[4]と良く一致している。一方, 片持りとの比較では長方形板の縦横比を, $a/b=10$ として, 等厚板(b) ($h_1/h_0=1$)と, 変厚板(c) ($h_1/h_0=0.2$)の場合について比較した。低次では, はりの固有値とは良く合っているが, 高次になると板の固有値がわずかに高くなっている。

図2は, 片持長方形板の縦横比 a/b を0.5から6まで変化させたときの対称振動(S形)の固有値曲線を示す。図中の実線は, 板厚比 $h_1/h_0=0.2$ の変厚片持長方形板を示し, 破線は, 等厚長方形板($h_1/h_0=1$)に対応している。縦横比 a/b が大きくなると, 固有値は高くなるが, 等厚長方形板の方がより高くなっている。図中の黒丸印は, 各固有値曲線の最大値を示し, それより縦横比が大きくなると固有値はわずかに低下する。右端の○印と△印は, 文献[5]の変厚りと同様はりの固有値を示す。なお, 図に示した固有値曲線の数値を, 附表1に示す。

図3は, 縦横比を $a/b=2$ とし, 板厚比 h_1/h_0 を変化させたときの固有値曲線を示す。図中の実線は対称振動(S形), 破線は逆対称振動(A形)を示し, ○印と△印は, LIUら²⁾が有限要素法を用いて求めた固有値を示す。板厚比 h_1/h_0 が大きくなると, 固有値は対称形1次振動(S-1)を除いて単調に増加している。有限要素法の結果とは, 1次から3次までの低次の場合と板厚比が0.8から1と板厚が一樣に近いところでは良く合っている。特に, 等厚の場合には◎印で示される

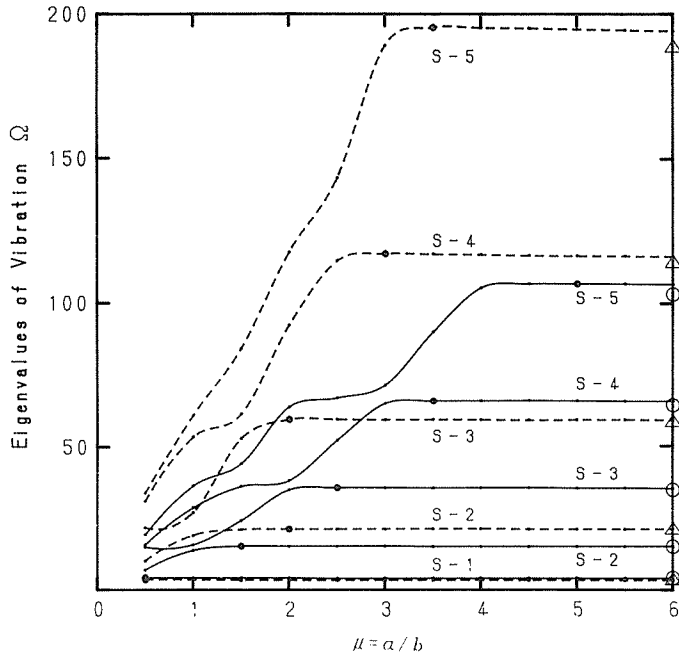


図2 変厚片持長方形板と等厚片持長方形板の対称振動の縦横比($\mu = a/b$)の変化による固有値曲線. ($\nu = 0.333, M \times N = 8 \times 8$),
 — ; $h_1/h_0 = 0.2$, - - - ; $h_1/h_0 = 1$

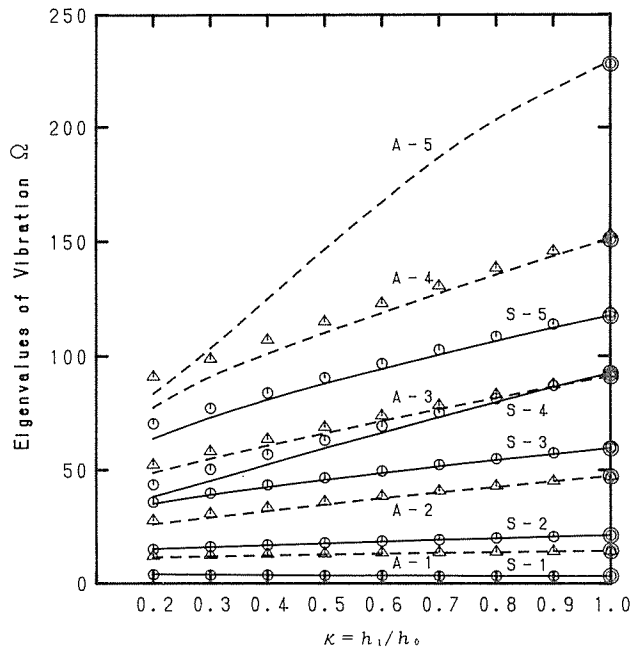


図3 変厚片持長方形版の板厚比($\kappa = h_1/h_0$)の変化による固有値曲線.
 ($\nu = 0.333, \mu = a/b = 2.0, M \times N = 8 \times 8$).
 — ; 対称振動, - - - ; 逆対称振動.

附表1 縦横比($\mu=a/b$)を変化させたときこ片持長方形板の対称振動(S形)の固有値 Ω .
($\nu=0.333, M \times N=8 \times 8$)

(a) 変厚片持長方形板($\kappa=h_1/h_0=0.2$).

Mode Number	$\mu=a/b$											
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
1	<u>4.25</u>	4.21	4.18	4.15	4.13	4.12	4.11	4.10	4.10	4.10	4.09	4.09
2	6.89	13.71	<u>15.28</u>	15.25	15.20	15.16	15.13	15.10	15.07	15.05	15.04	15.02
3	14.88	15.75	24.22	35.00	<u>35.74</u>	35.69	35.62	35.54	35.48	35.42	35.37	35.33
4	15.81	28.78	36.30	38.21	52.44	65.33	<u>66.14</u>	66.10	66.01	65.90	65.80	65.71
5	19.17	36.36	44.16	63.96	67.21	71.73	90.39	105.74	106.98	<u>107.00</u>	106.90	106.77

(b) 等厚片持長方形板($\kappa=h_1/h_0=1$)

Mode Number	$\mu=a/b$											
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
1	<u>3.49</u>	3.46	3.44	3.42	3.41	3.40	3.39	3.38	3.38	3.37	3.37	3.37
2	10.03	21.10	21.13	<u>21.29</u>	21.25	21.21	21.18	21.15	21.12	21.10	21.09	21.07
3	21.79	27.07	53.05	<u>59.77</u>	59.75	59.63	59.51	59.40	59.31	59.23	59.16	59.10
4	31.07	53.54	61.56	92.70	117.29	<u>117.55</u>	117.37	117.15	116.94	116.75	116.57	116.42
5	33.88	61.13	84.45	117.92	143.40	192.84	<u>195.40</u>	195.27	194.98	194.66	194.36	194.07

表中のアンダーラインは同一モードに対する固有値の最大値を示す。

附表2 板厚比($\kappa=h_1/h_0$)を変化させたときの変厚片持長方形板の固有値 Ω .
($\nu=0.333, \mu=a/b=2.0, M \times N=8 \times 8$)

Tyke	Mode number	Ω $h_1 h_0$										文献(4)
		0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0		
S 形	1	4.15 (4.05)	3.95 (3.92)	3.81 (3.81)	3.71 (3.73)	3.63 (3.65)	3.56 (3.58)	3.51 (3.53)	3.46 (3.48)	3.42 (3.43)	3.42	
	2	15.25 (15.12)	16.09 (16.20)	16.92 (17.11)	17.71 (17.93)	18.48 (18.69)	19.22 (19.39)	19.93 (20.07)	20.62 (20.71)	21.29 (21.34)	21.28	
	3	35.00 (35.88)	39.03 (39.88)	42.48 (43.44)	45.68 (46.67)	48.71 (49.66)	51.61 (52.47)	54.41 (55.16)	57.13 (57.75)	59.77 (60.26)	59.76	
	4	38.21 (43.61)	45.31 (50.46)	52.51 (57.01)	59.60 (63.36)	66.52 (69.55)	73.30 (75.59)	79.92 (81.50)	86.39 (87.28)	92.70 (92.93)	92.68	
	5	63.96 (70.60)	73.23 (77.45)	81.05 (84.12)	87.98 (90.63)	94.45 (96.90)	100.65 (102.90)	106.61 (108.6)	112.36 (114.0)	117.92 (119.2)	117.72	
A 形	1	11.63 (12.28)	12.11 (12.68)	12.54 (13.20)	12.93 (13.33)	13.29 (13.60)	13.62 (13.85)	13.93 (14.09)	14.23 (14.32)	14.51 (14.53)	14.50	
	2	25.98 (27.98)	29.02 (30.90)	31.92 (33.57)	34.70 (36.07)	37.38 (38.49)	39.97 (40.82)	42.49 (43.10)	44.95 (45.32)	47.35 (47.50)	47.32	
	3	48.86 (52.52)	55.05 (58.42)	60.83 (63.94)	66.34 (69.11)	71.63 (74.0)	76.75 (78.75)	81.71 (83.32)	86.55 (87.76)	91.28 (92.11)	91.24	
	4	77.60 (91.23)	91.13 (99.19)	101.04 (107.2)	110.15 (115.3)	118.91 (123.2)	127.40 (130.9)	135.64 (138.6)	143.63 (146.1)	151.40 (153.4)	151.16	
	5	83.58	103.41	125.12	146.55	167.34	186.85	203.46	216.91	229.25	228.12	

() は文献(2)の固有値を示す。

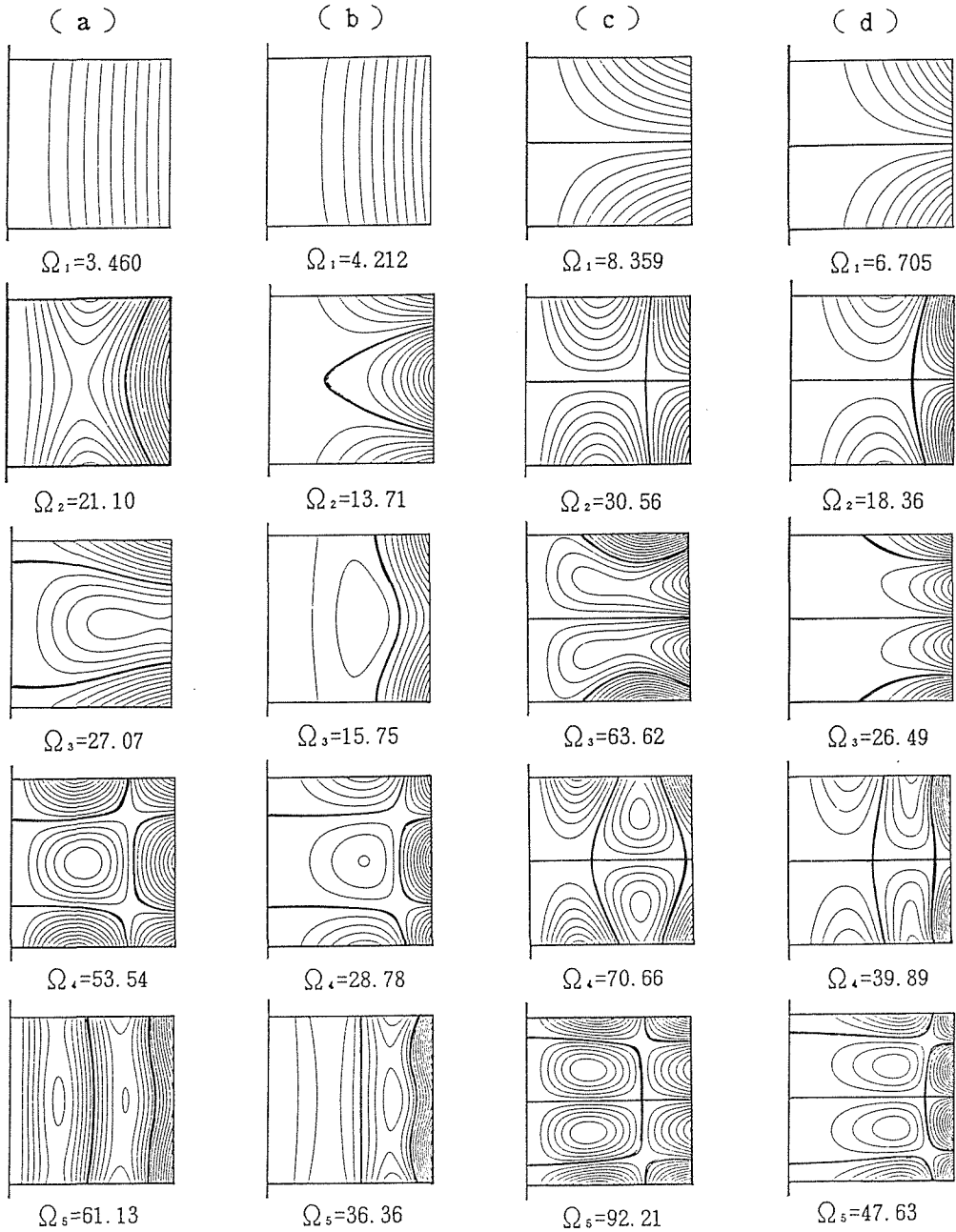


図4 片持正方形板の振動形, ($\nu=0.333, \mu=1, M \times N=8 \times 8$)
 (a) 等厚 $\kappa=1$, (b) 変厚 $\kappa=0.2$, の対称振動(S形)
 (c) 等厚 $\kappa=1$, (d) 変厚 $\kappa=0.2$, の逆対振動(A型).

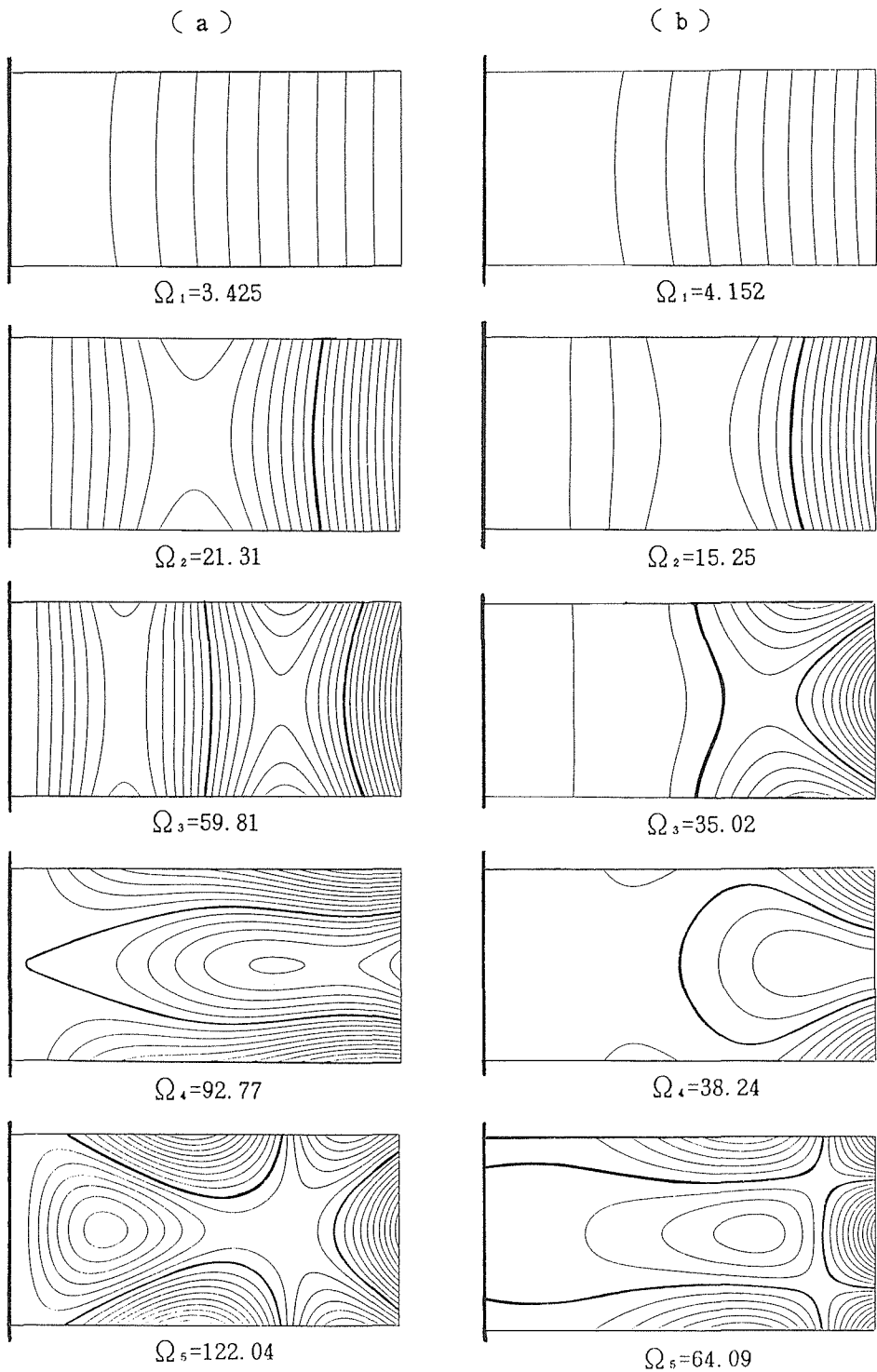


図 5-1 片持長方形板の振動形, 対称振動(S型)の場合($\nu=0.333$, $\mu=2$, $M \times N=6 \times 6$)
 (a) 等厚片持長方形板($\kappa=1$), (b) 変厚片持長方形板($\kappa=0.2$).

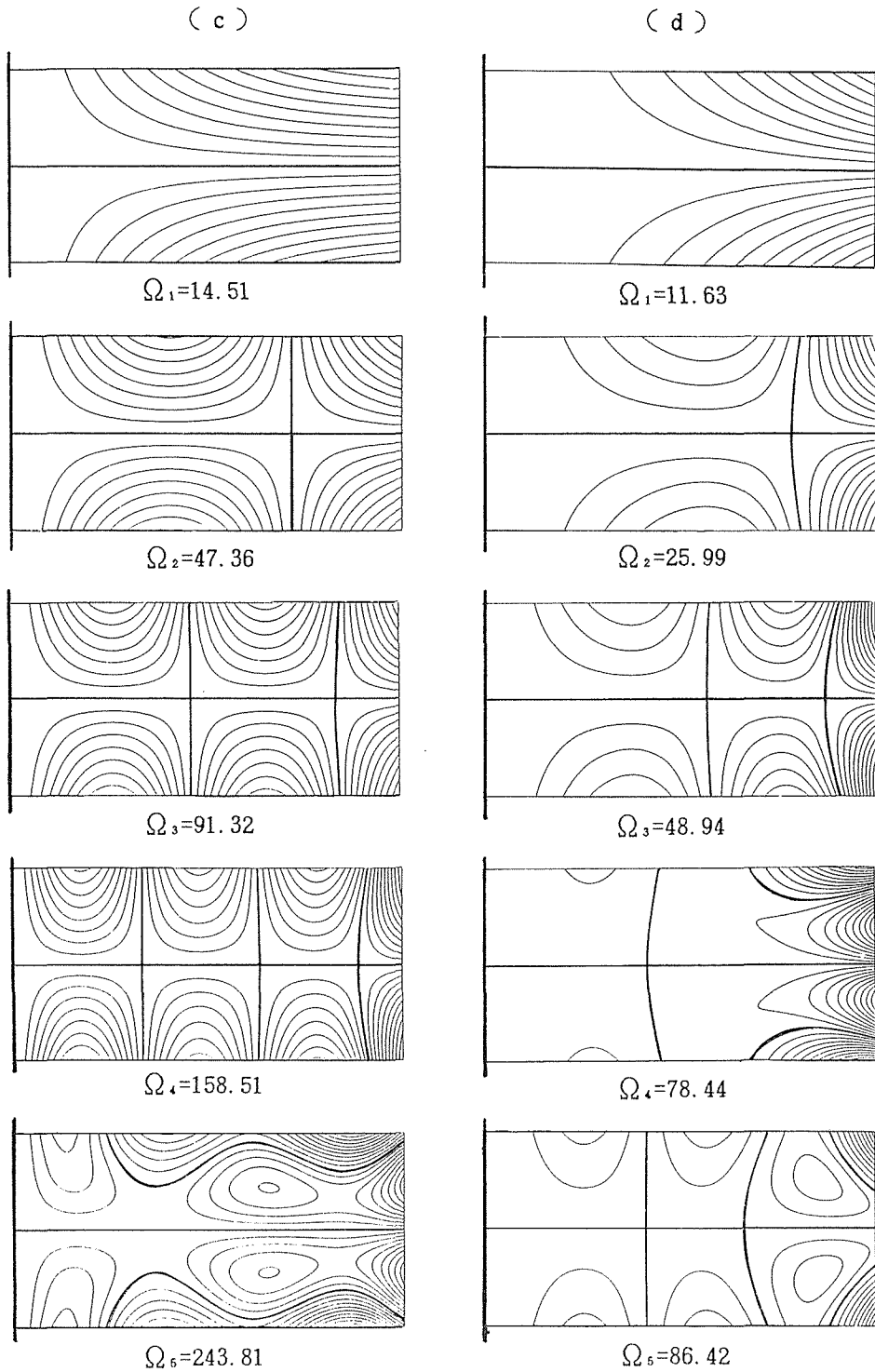


図5-2 片持長方形板の振動形，逆対称振動(A形)の場合($\nu=0.333$, $\mu=2$, $M \times N=6 \times 6$)
 (c) 等厚片持長方形板($\alpha=1$), (d) 変厚片持長方形板($\alpha=0.2$).

GORMAN⁴⁾の値とも良好な一致をみている。しかし、板厚比が小さく先端部が薄い場合は、高次になるほど、有限要素法との差は大きくなっている。なお、図で示した固有値曲線の数値を附表2に示す。

図4は、片持正方形板の5次までの固有モードを示す。図中の(a), (c)は等厚正方形板の対称振動と逆対称振動を示し、(b), (d)は、板厚比 $h_1/h_0=0.2$ の変厚正方形板のそれぞれの振動モードに対応する。図中の太い実線は節線を示し、細線は最大振幅を100としたときの、10刻みの等高線を示す。等厚板の(a), (c)と比較すると、変厚板の場合は節線と等高線が板の自由端へ移動している。これは先端部が薄いために、先端部が振動しやすくなっているからである。ここで、等厚正方形板のモード図(a), (c)は、GORMAN⁴⁾と、LEISSAら⁶⁾のモード図と一致している。なお、図中の固有値 Ω は $M \times N = 8 \times 8$ の項数を用いて求めた値である。

図5は、片持長方形板の縦横比を、 $a/b=2$ としたときの5次までのモード図を示す。(a), (c)はそれぞれ等厚長方形板の対称、逆対称振動のモード図を示し、(b), (d)は板厚比 $h_1/h_0=0.2$ の変厚長方形板の対称、逆対称振動のモード図を示す。ここで、図4と図5を比較すると、板の縦横比が異なるため、振動形がそれぞれ異なるのは当然であるが、対称振動では片持正方形板の(b)図の4次モードと、片持長方形板の(b)図の5次モードが類似である。また、逆対称振動の(c), (d)では、長方形板の場合、4次モードまで、 η 軸方向に区切られた節線が現れているのに対して、正方形板では、1次、2次モードまでが、類似の振動モードとなっている。なお、図5に示されている固有値 Ω は $M \times N = 6 \times 6$ の項数を用いて求めた値である。

4. あとがき

縦横比と変厚比の二つの形状パラメーターが、変厚片持長方形板の自由振動に及ぼす影響について調べた。各種の無次元量を用いているため、変厚片持長方形板の結果の比較が容易であり、同時に、軽量化を目的とする設計資料にも役立つものと思われる。結論として次の三つが上げられる。

- (1) 板の縦横比(a/b)がある程度大きくなり、細長い長方形板ではその固有値は、はりの固有値に近づく。
- (2) 変厚片持長方形板の対称形1次振動は、等厚片持長方形板の対称形の1次振動より固有値は高くなっている。それ以外の振動については、板厚比(h_1/h_0)が小さいとき、あるいは高次になるほど、等厚片持板($h_1/h_0=1$)と較べて、固有値は低い値となる。
- (3) 変厚片持長方形板は、等厚片持長方形板と較べて、板厚の厚い固定部では振動しにくく、板厚の薄い先端部が振動しやすくなり、また、片持正方形板よりも η 軸方向に節線が現れやすい。

参考文献

- (1) LEISSA, A. W., Vibration of plates, NASASP-160, Washington, D. C, U. S. Government Printing Office, (1969).
- (2) LIU, W. H., and CHANG, I. B., Some studies on the free vibration of cantilever plates with uniform and non-uniform thickness, J. Sound Vib., 130-2, (1989), 337.
- (3) TANAKA, K., YAMADA, G., KOBAYASHI, Y., and MIURA, S., Free vibration of a cantilever plate with curved radial edges and varying thickness, J. Sound Vib., 143-2, (1990), 329.
- (4) GORMAN, D. J., Free vibration analysis of cantilever plates by the method of superposition, J. Sound

- Vib., 49-4, (1976), 453.
- (5) MABIE, H. H., and ROGERS, C. B., Transverse vibration of double-tapered cantilever beams, J. Acoust. Soc. Am., 51-5, (1972), 1771.
- (6) LEISSA, A. W., LEE, J. K., and WANG, A. J., Vibration of cantilever doubly-curved shallow shells, Int. J. Solids Struct., 19-5, (1983), 411.