



Title	不完全合成桁橋の解析法の比較について
Author(s)	佐藤, 浩一; Sato, Koichi
Citation	北海道大學工學部研究報告, 158, 1-11
Issue Date	1992-01-31
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/42306">https://hdl.handle.net/2115/42306</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	158_1-12.pdf



## 不完全合成桁橋の解析法の比較について

佐藤 浩一

(平成3年10月30日受理)

### Comparison of Structural Analysis Methods of Incomplete Composite Girder Bridges

Koichi SATO

(Received October 30, 1991)

#### Abstract

This paper presents a practical structural analysis of composite girders with incomplete interaction by two stiffness matrix methods. One is the stiffness matrix method derived from the general solutions of difference equations, and the other is based on differential equations. Both matrices can be obtained by using Anfang Parameter Method. These stiffness matrix methods are applicable to an analysis of composite girders considering deformations and variable spacings of headed stud connectors and can be extended to an analysis of continuous composite girders with variable cross sections. The validity of the stiffness matrix methods presented herein is examined and checked by numerical calculations.

#### 1. ま え が き

異種材料を合成し複合構造物として使用する主な目的は単一材料では得ることのできない望ましい力学特性を作り出すことである<sup>1)</sup>。橋梁におけるこの種の複合構造物の代表的なものの一つに鋼桁とコンクリート床版とを結合するため頭つきスタッドジベルをある間隔で離散的に配置し、両者を完全に剛に一体とした合成桁がある(完全合成桁)。この場合、鋼桁とコンクリート床版との間にずれ(すべり)が生じない結合としている。結合は一種の変形の拘束であり、拘束力はジベルに作用する力となって現れる。一方、ジベルがなければ、鋼桁とコンクリート床版の間には合成効果がないので単なる重ね梁となる。実際の合成桁に非常に剛なジベル(剛ジベル)を使用する場合でもずれあるいは変形が生じ<sup>3)</sup>、ずれあるいは変形に比例した力が作用することになる(不完全合成桁)。このように実際の合成桁は完全合成桁と重ね梁との中間の挙動を示す不完全合成桁となるはずである。

不完全合成桁の解析は最初 N. M. Newmark<sup>2)</sup>により行われた。Newmark は次の仮定を用いて釣合い方程式を導いている<sup>2)</sup>。1)鋼, コンクリートの応力とひずみ関係は線形である。2)ジベルに作用する力と変位関係は線形である。3)ジベルは等分に分布している。4)鋼桁とコンクリート床版の変位は同じである。このような条件のもとでコンクリート床版に作用する軸力に関する釣

合い方程式を作り、ジベルが等分布に配置されている場合の解を得ている。この理論式<sup>2),3)</sup>の中でジベルのずれあるいは変形の程度を示す弾性結合としてばね定数  $K(t/cm^2)$  を用い、重要なパラメータとしている。しかしながら、このばね定数  $K$  は実用計算に十分な解を得るために(微分方程式の解を得るために)、鋼桁とコンクリート床版との間の離散的結合(点状結合)を、同じ強さの連続した結合に置き換えている。これはジベル1本あたりのばね定数  $Ka(t/cm)$  を、ジベルの間隔で除した値であり、ジベル1本あたりの単位長さあたりの値となり、等間隔の場合の値である。即ち、弾性結合のばね定数  $K$  を全スパンを通じて一様であると仮定して微分方程式を誘導し、解析しているのでジベルの間隔は計算には入ってこない。実際のジベル配置は離散的であり、支点付近は密に配置し、支間中央部付近は疎に配置する。

浜田ら<sup>4)</sup>は Newmark と同じ仮定に基づき、有限要素法で連続合成桁および弾塑性範囲の解析を行っている。また、小松ら<sup>5)</sup>は有限要素法を用いてパラメトリック解析を行い、ジベルの合成作用はフレキシビリティ定数で評価できることを明らかにしている。このように不完全合成桁についてかなりの成果が得られている。しかしながら、かなりの計算量が必要と思われる。

本論文は、パソコンで計算することを前提とし、ジベル間隔の密と疎を考慮し、その間隔  $a(cm)$  を任意とし、さらにジベルのずれあるいは変形を考慮して不完全合成桁を解析したものである。解析は初期パラメータ(Anfang Parameter)法による剛性マトリックスを用いて行った。本論文の差分方程式から誘導される剛性マトリックス解析法<sup>6)</sup>(ここでは差分剛性マトリックスという)は著者の提案するものであり、理論式と解析結果の両者で、微分方程式から誘導される剛性マトリックス解析法と比較した。微分方程式から誘導される剛性マトリックスは通常の初等桁理論と吊橋の撓度理論の剛性マトリックスを用いればよい。これらの理論式あるいは解析結果から、微分方程式から誘導される剛性マトリックスは、本論文で提案する差分剛性マトリックスに含まれていることが判明した。

## 2. 本論文で用いる主な記号の説明

合成桁の合成断面を図-1に示す。本論文で用いる記号は次の通りである。

- $a$  : ジベルの間隔
- $A_c$  : 共働する版のコンクリート部の断面積
- $A_s$  : 版と合成された鋼桁の断面積
- $A_v$  :  $A_s + A_c/n$ : 鋼断面に換算した合成断面積
- $E_c$  : コンクリートのヤング係数
- $E_s$  : 鋼のヤング係数
- $I_c$  : コンクリート断面のその重心  $C$  に関する断面二次モーメント
- $I_s$  : 鋼桁のその重心  $S$  に関する断面二次モーメント
- $I_v$  :  $I_s + I_c/n + A_v s_c s_s$ : 鋼断面に換算した合成断面の断面二次モーメント
- $K$  : ジベル1本の単位長さあたりのばね定数
- $Ka$  : ジベル1本あたりのばね定数
- $l$  : スパン
- $M_v, M_{ve}$  : 完全合成桁と不完全合成桁の場合の桁の曲

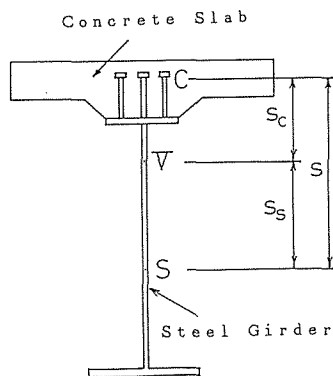


図-1 合成桁の合成断面

げモーメント

$N_v, N_{ve}$  : 完全合成桁と不完全合成桁の場合のコンクリート部および鋼桁部に作用する軸力

$n$  :  $E_s/E_c$  : 鋼とコンクリートとのヤング係数比

$N$  : ジベルの本数

$p$  : 荷重強度

$Q_v, Q_{ve}$  : 完全合成桁と不完全合成桁の場合の桁のせん断力

$s$  :  $s=s_c+s_s$  : 版のコンクリートの重心  $C$  と鋼桁の重心  $S$  との距離

$s_c$  :  $s_c=A_s/A_v \times s$  : 合成断面の中立軸  $V$  と版のコンクリートの重心  $C$  との距離

$s_s$  :  $s_s=A_c/A_v \times s/n$  : 合成断面の中立軸  $V$  と鋼桁の重心  $S$  との距離

$T_v, T_{ve}$  : 完全合成桁と不完全合成桁の場合のジベルに作用する水平せん断力

$y_v, y_{ve}$  : 完全合成桁と不完全合成桁の場合の桁のたわみ  $y_{ve}=y_v+y_e$

$\Delta$  : 差分演算子

### 3. 中央差分表示

関数  $y(x)$  の微分は  $y$  の変化量として定義され、 $x$  に関して一次微分、二次微分は次式で表示される。

一次微分

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

二次微分

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \quad (2)$$

高次の場合も同様に定義される。もし  $\Delta x$  が零に近づかず、ある有限の値 ( $a$  : 例えばジベルの間隔など) をとるならば、差分表示になる。中央差分表示を用いれば、次式のような<sup>7)</sup>。

$$\frac{\Delta y(i)}{\Delta x} = \frac{y(i+1) - y(i-1)}{2a} \quad (3)$$

$$\frac{\Delta^2 y(i)}{\Delta x^2} = \frac{y(i+1) - 2y(i) + y(i-1)}{a^2} \quad (4)$$

$$\frac{\Delta^3 y(i)}{\Delta x^3} = \frac{y(i+2) - 2y(i+1) + 2y(i-1) - y(i-2)}{2a^3} \quad (5)$$

$$\frac{\Delta^4 y(i)}{\Delta x^4} = \frac{y(i+2) - 4y(i+1) + 6y(i) - 4y(i-1) + y(i-2)}{a^4} \quad (6)$$

### 4. 不完全合成桁の微分方程式と差分方程式

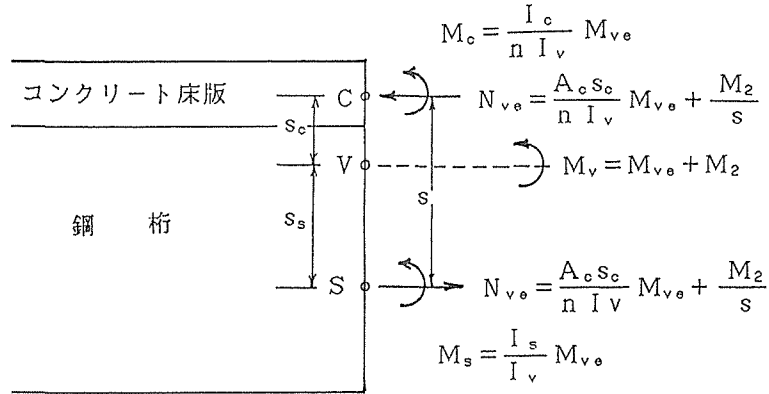
仮定は Newmark<sup>2)</sup>と同じであるが、ジベルは等分に分布している場合ばかりでなく、離散的に間隔は任意であるという点が本論文の特徴である。図-2 は合成断面の中立軸に作用する曲げモーメントの分配を示している。

不完全合成桁の変形  $y_{ve}$  に関する微分方程式および差分方程式は、次式のような<sup>8)</sup>。

$$\frac{d^4 y_{ve}}{dx^4} - \lambda^2 \frac{d^2 y_{ve}}{dx^2} = - \frac{1}{E_c(nI_s + I_c)} \frac{d^2 M_v}{dx^2} - \lambda^2 \frac{d^2 y_v}{dx^2} \quad (7a)$$

$$\frac{\Delta^4 y_{ve}}{\Delta x^4} - \lambda^2 \frac{\Delta^2 y_{ve}}{\Delta x^2} = - \frac{1}{E_c(nI_s + I_c)} \frac{\Delta^2 M_v}{\Delta x^2} - \lambda^2 \frac{\Delta^2 y_v}{\Delta x^2} \quad (7b)$$

$$\text{ここで, } \lambda^2 = \frac{nI_v}{nI_s + I_c} \cdot \frac{K}{E_c A_c} \cdot \frac{S}{S_c} \quad (8)$$

図-2 曲げモーメント  $M_v$  の分配

次に、完全合成桁の場合のたわみが  $y_v$  であり、ジベルの変形を考慮した場合のたわみが  $y_{ve}$  であるので、 $y_{ve}$  と  $y_v$  との差を  $y_e$  とすれば<sup>8)</sup>、 $y_v$  に関しては式 (9 a<sub>1</sub>)、(9 b<sub>1</sub>) が成立する。また、 $y_e$  に関しては式 (7 a)、(7 b) と式 (9 a<sub>1</sub>)、(9 b<sub>1</sub>) の差より式 (9 a<sub>2</sub>)、(9 b<sub>2</sub>) となる。

従って、 $y_v$  と  $y_e$  に関して次式のような 2 個の微分方程式および差分方程式になる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 y_v}{dx^4} = -\frac{1}{E_s I_v} \frac{d^2 M_v}{dx^2} \end{array} \right. \quad (9 a_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 y_e}{dx^4} - \lambda^2 \frac{d^2 y_e}{dx^2} = -\frac{1}{E_s I_e} \frac{d^2 M_v}{dx^2} \end{array} \right. \quad (9 a_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta^4 y_v}{\Delta x^4} = -\frac{1}{E_s I_v} \frac{\Delta^2 M_v}{\Delta x^2} \end{array} \right. \quad (9 b_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta^4 y_e}{\Delta x^4} - \lambda^2 \frac{\Delta^2 y_e}{\Delta x^2} = -\frac{1}{E_s I_e} \frac{\Delta^2 M_v}{\Delta x^2} \end{array} \right. \quad (9 b_2)$$

$$\text{ここで、} \quad y_{ve} = y_v + y_e \quad (10)$$

$$I_e = \frac{n I_s + I_c}{A_c s_c s} I_v \quad (11)$$

以上より、不完全合成桁の場合の合成桁の変形は、 $y_v$  と  $y_e$  との代数和で求まる。応力も完全合成桁の場合の応力と  $y_e$  の変形に見合う応力との代数和で求まる<sup>8)</sup>。従って、不完全合成桁のたわみ、曲げモーメント、軸力、せん断力、ジベルに作用する水平せん断力は次式で求まる。

$$y_{ve} = y_v + y_e \quad (12)$$

$$M_{ve} = M_v + M_e = M_v + \frac{I_v}{I_e} M_{ee} \quad (13)$$

$$N_{ve} = \frac{A_c s_c}{n I_v} (M_v - M_{ee}) \quad (14)$$

$$Q_{ve} = Q_v + \frac{I_v}{I_e} \left( Q_{ee} - H \frac{dy_e}{dx} \right) \quad (15)$$

$$T_{ve} = \frac{A_c s_c}{n I_v} \left( Q_v - Q_{ee} + H \frac{dy_e}{dx} \right) \quad (16)$$

## 5. Anfang Parameter 法による剛性マトリックスの誘導

式 (9 a<sub>1</sub>) は完全合成桁の場合のたわみ  $y_v(x)$  に関する微分方程式である。式 (9 a<sub>1</sub>) から誘導

される剛性マトリックスは通常の桁の剛性マトリックスであるからここでは省略する。不完全合成桁の場合の剛性マトリックスは微分および差分方程式の一般解から誘導される。従って、式 (9 a<sub>2</sub>) の一般解と式 (9 b<sub>2</sub>) の一般解とが必要になってくる。

式 (9 a<sub>2</sub>) の一般解は次式の形で与えられる

$$y_e(x) = A_1 \sinh \lambda x + B_1 \cosh \lambda x + C_1 x + D_1 \tag{17 a_2}$$

同様に、式 (9 b<sub>2</sub>) の一般解は次式で与えられる<sup>9),10)</sup>

$$y_e(i) = A_2 \sinh \mu i + B_2 \cosh \mu i + C_2 i + D_2 \tag{17 b_2}$$

ここで、  $\lambda^2 = \frac{H}{E_s I_e}$  (18 a),  $\mu = \cosh^{-1} \left( \frac{1}{2} \lambda^2 a^2 \right) \doteq \lambda a$  (18 b)

$$H = K \cdot \left( \frac{n I_v}{A_c S_c} \right)^2 \tag{18 c}$$

式 (17 a<sub>2</sub>), (17 b<sub>2</sub>) における定数 A, B, C, D は桁の両端の境界条件によって決定されるものである。たわみ角  $y'_e(x)$  と  $y'_e(i)$ , 曲げモーメント  $M_{ee}(x)$  と  $M_{ee}(i)$ , 鉛直力  $Q_{ee}(x)$  と  $Q_{ee}(i)$ , はそれぞれ微分および差分 (中央差分を用いる) することによって次式で得られる。

$$y'_e(x) = \frac{dy_e(x)}{dx} \tag{19 a),} \quad y'_e(i) = \frac{\Delta y_e(i)}{\Delta x} \tag{19 b)}$$

$$M_{ee}(x) = -E_s I_e \frac{d^2 y_e(x)}{dx^2} \tag{20 a),} \quad M_{ee}(i) = -E_s I_e \frac{\Delta^2 y_e(i)}{\Delta x^2} \tag{20 b)}$$

$$Q_{ee}(x) = -E_s I_e \frac{d^3 y_e(x)}{dx^3} + H \frac{dy_e(x)}{dx}, \tag{21 a)} \quad Q_{ee}(i) = -E_s I_e \frac{\Delta^3 y_e(i)}{\Delta x^3} + H \frac{\Delta y_e(i)}{\Delta x} \tag{21 b)}$$

以下、両剛性マトリックスの誘導において、 $y_e, y'_e, M_{ee}, Q_{ee}$  の添字 (e, ee) を省略し、最後の剛性マトリックスの表示の際に添字を付ける。

次に、図-3 (a) に示すように一様の桁要素を考える。微分および差分方程式においては、節点力ベクトルと節点変位ベクトルの符号は図-3 (a) の場合をプラスとしている。

微分方程式からの剛性マトリックスの誘導の詳細はここでは省略する。結果のみを表-1 に示す。

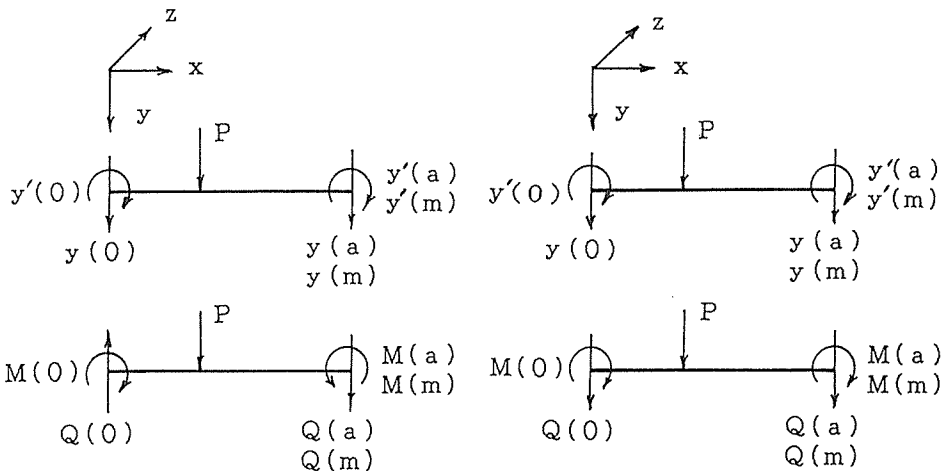


図-3 (a) 微分および差分方程式における節点変位と節点力の符号

図 3 (b) 剛性マトリックスにおける節点変位と節点力の符号

式 (17 b), (19 b), (20 b) および (21 b) において,  $i=0$  とおき, 要素の左端の節点変位ベクトル  $y(0)$  と  $y'(0)$ , 節点力ベクトル  $M(0)$  と  $Q(0)$  とを求め, 行列表示すれば,

$$\begin{Bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sinh \mu/a & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & -H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H/a & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (22 \text{ b})$$

となる。式 (22 b) の行列表示を, 一つの記号を用いて略した表示すれば, 次式のようにになる。

$$\{X(0)\} = [H_{02}] \{C_2\} \quad (22 \text{ b})$$

式 (17 b), (19 b), (20 b) および (21 b) において,  $i=m$  とおき, 要素の右端の節点変位ベクトル  $y(m)$  と  $y'(m)$ , 節点力ベクトル  $M(m)$  と  $Q(m)$  とを求め, 行列表示すれば,

$$\begin{Bmatrix} y(m) \\ y'(m) \\ M(m) \\ Q(m) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sinh \mu m & \cosh \mu m & m & 1 \\ \sinh \mu/a \cdot \cosh \mu m & \sinh \mu/a \cdot \sinh \mu m & 1/a & 0 \\ -H \cdot \sinh \mu m & -H \cdot \cosh \mu m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H/a & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (23 \text{ b})$$

となる。式 (23 b) の行列表示を, 一つの記号を用いて略した表示すれば, 次式のようにになる。

$$\{X(m)\} = [H_{m2}] \{C_2\} \quad (23 \text{ b})$$

式 (22 b) より  $[H_{02}]$  の逆行列  $[H_{02}]^{-1}$  を求め,  $\{C_2\}$  を求めれば, 次式のようにになる。

$$\{C_2\} = [H_{02}]^{-1} \{X(0)\} \quad (24 \text{ b})$$

式 (24 b) を式 (23 b) に代入すれば, 次式のようにになる。

$$\{X(m)\} = [H_{m2}] [H_{02}]^{-1} \{X(0)\} \quad (25 \text{ b})$$

式 (25 b) を具体的に表示すれば, 次式のようにになる。

$$\begin{Bmatrix} y(m) \\ y'(m) \\ M(m) \\ Q(m) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} \quad (25 \text{ b})$$

ここで,  $b_{11}=1$ ,  $b_{12}=a/\sinh \mu \cdot \sinh \mu m$ ,  $b_{13}=1/H \cdot (1 - \cosh \mu m)$ ,  
 $b_{14}=1/H \cdot a/\sinh \mu \cdot (m \cdot \sinh \mu - \sinh \mu m)$ ,  
 $b_{21}=0$ ,  $b_{22}=\cosh \mu m$ ,  $b_{23}=-1/H \cdot \sinh \mu/a \cdot \sinh \mu m$ ,  
 $b_{24}=1/H \cdot (1 - \cosh \mu m)$ ,  
 $b_{31}=0$ ,  $b_{32}=-H \cdot a/\sinh \mu \cdot \sinh \mu m$ ,  $b_{33}=\cosh \mu m$ ,  
 $b_{34}=a/\sinh \mu \cdot \sinh \mu m$ ,  $b_{41}=b_{42}=b_{43}=0$ ,  $b_{44}=1$

式 (25 b) のマトリックスを, 次式のような分割マトリックスで表示する。

$$\begin{Bmatrix} X_1(m) \\ X_2(m) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{Bmatrix} \quad (26 \text{ b})$$

ここで,

$$X_1(m) = \begin{Bmatrix} y(m) \\ y'(m) \end{Bmatrix}, \quad Y_1(0) = \begin{Bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{Bmatrix}, \quad X_2(m) = \begin{Bmatrix} M(m) \\ Q(m) \end{Bmatrix}, \quad X_2(0) = \begin{Bmatrix} M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} \quad (27 \text{ b})$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 1 & a/\sinh \mu \cdot \sinh \mu m \\ 0 & \cosh \mu m \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 1/H \cdot (1 - \cosh \mu m) & 1/H \cdot a/\sinh \mu \cdot (m \cdot \sinh \mu - \sinh \mu m) \\ -1/H \cdot \sinh \mu / a \cdot \sinh \mu m & 1/H \cdot (1 - \cosh \mu m) \end{bmatrix},$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -H \cdot a/\sinh \mu \cdot \sinh \mu m \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} \cosh \mu m & a/\sinh \mu \cdot \sinh \mu m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28 \text{ b})$$

式(26 b)において、マトリックス演算し、節点力ベクトル $[X_2(0), X_2(m)]^T$ は変位ベクトル $[X_1(0), X_1(m)]^T$ を用いて表示すれば次式のようなになる。

$$\begin{Bmatrix} X_2(0) \\ X_2(m) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{12}^{-1} D_{11} & D_{12}^{-1} \\ D_{21} - D_{22} D_{12}^{-1} D_{11} & D_{22} D_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(0) \\ X_1(m) \end{Bmatrix} \quad (29 \text{ b})$$

ここで、 $D_{12}^{-1}$ は $D_{12}$ の逆マトリックスである。結局、次のようなマトリックス表示を得る。

$$\begin{Bmatrix} Q_{ee}(0) \\ M_{ee}(0) \\ Q_{ee}(m) \\ M_{ee}(m) \end{Bmatrix} = G_2 \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ \text{sym.} & & k_{33} & k_{34} \\ & & & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_e(0) \\ y'_e(0) \\ y_e(m) \\ y'_e(m) \end{Bmatrix} \quad (30 \text{ b})$$

$$\text{ここで, } G_2 = H^2 / (2 - 2 \cosh \mu m + m \cdot \sinh \mu \cdot \sinh \mu m) \quad (31 \text{ b})$$

式(30 b)が差分方程式から誘導した4行4列の剛性マトリックスであり、対称マトリックスである。節点力ベクトル $(Q_{ee}, M_{ee})$ および節点変位ベクトル $(y_e, y'_e)$ の符号は剛性マトリックスの符号に直しているの、図-3(b)に示すような場合をプラスとする。

式(30 b)に略した表示法を適用すれば,

$$f = ku \quad (32)$$

ここで、 $f$ は部材要素における節点力ベクトルであり、 $k$ は部材要素における剛性マトリックスであり、 $u$ は部材要素における変位ベクトルである。微分方程式および差分方程式から誘導した $k_{ij}$ を具体的に対比して表示すれば、表-1のようなになる。表-1の両方程式から誘導された剛性マトリックスの要素 $k_{ij}$ を比較することは非常に有意義である。

式(18 b)の意味するところは $\lambda a$ が小さければ、 $\mu \doteq \lambda a$ となることである。即ち、式(18 b)の $\lambda a$ が非常に小さければ、 $\mu$ は $\lambda a$ に限りなく近づくことである。従って、表-1において、 $\sinh \mu \doteq \sinh \lambda a \doteq \lambda a$ とおき $m=1$ とすれば、 $\sinh \mu m$ は $\sinh \lambda a \cdot 1$ となる。即ち、 $\sinh \lambda a$ となる。

結局、 $\lambda a$ が非常に小さければ、 $\lambda a = \mu$ となり、微分方程式の一般解の式(17 a<sub>2</sub>)と差分方程式の一般解の式(17 b<sub>2</sub>)は一致することになる。このことから不完全合成桁の場合、微分方程式から誘導される剛性マトリックスは差分方程式から誘導される剛性マトリックスの特別の場合であることがわかる。

表-1 部材要素の剛性マトリックスの具体的表示

$k_{ij}$	微分方程式から誘導した $k_{ij}$	差分方程式から誘導した $k_{ij}$
$k_{11}, -k_{13}, k_{33}$	$\frac{1}{H} \lambda \cdot \sinh \lambda a$	$\frac{1}{H} \frac{\sinh \mu}{a} \sinh \mu m$
$k_{12}, -k_{23}, k_{14}, -k_{34}$	$\frac{1}{H} (\cosh \lambda a - 1)$	$\frac{1}{H} (\cosh \mu m - 1)$
$k_{22}, k_{44}$	$\frac{1}{H\lambda} (\lambda a \cdot \cosh \lambda a - \sinh \lambda a)$	$\frac{1}{H} \frac{a}{\sinh \mu} (m \cdot \sinh \mu \cdot \cosh \mu m - \sinh \mu m)$
$k_{24}$	$\frac{1}{H\lambda} (\sinh \lambda a - \lambda a)$	$\frac{1}{H} \frac{a}{\sinh \mu} (\sinh \mu m - m \cdot \sinh \mu)$

式(32)の剛性マトリックスは部材要素に関するものである。これらを全体座標系における構造全体の剛性マトリックスに重ね合わせて組み込めばよい。差分方程式から誘導された剛性マトリックスは表-1において $m=1$ として重ね合わせればよい。その場合、表-1の最後の項 $k_{24}=0$ となる。 $m=2$ として全体の剛性マトリックスを組み立てて解析しても同じ結果が得られることを確かめてある。その場合、表-1の最後の項 $k_{24} \neq 0$ である。

本論文ではパソコンを用いるために、メモリーに制限があるので、一次元配列のスカイライン法と一次元配列のICCG法(不完全コレスキー分解と共役勾配法の併用)を用いて解析した。要素数を少なくした場合には逆マトリックスによる解析とも比較し、3解析とも計算値が一致することを確認した。

## 6. 数値計算例

図-4のようなスパン $l=3000$  cmとし、図-5のような断面を有する合成桁を両剛性マトリックスを用いて、両端単純支持とし、スパン中央に集中荷重 $P=1$  tonを載荷して、解析した。断面諸元は、 $s=114.4$  cm,  $A_s=344.2$  cm<sup>2</sup>,  $A_c=5355$  cm<sup>2</sup>,  $n=7$ ,  $I_s=1506100$  cm<sup>4</sup>,  $I_c=196796$  cm<sup>4</sup>とした。ジベル1本あたりのばね定数 $Ka$ およびジベルの間隔 $a$ は種々に変化させた。 $N$ はジベルの本数であり、種々に変化させた。計算はPC-9801 VM2を用い、MS-FORTRANで倍精度で行った。計算時間は300要素で約20秒であった。

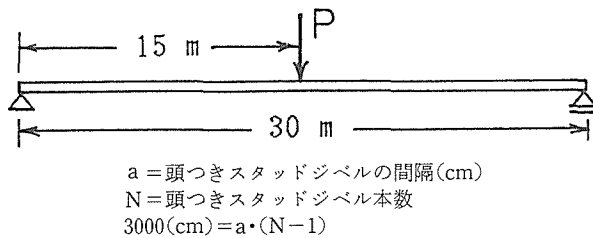


図-4 単純合成桁

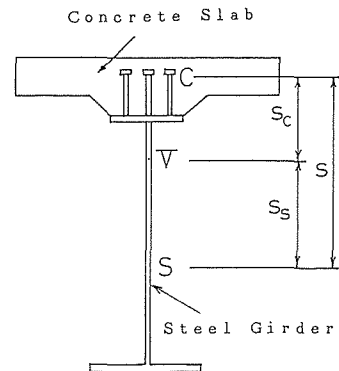


図-5 合成桁の合成断面

### 6.1 数値計算例1 両剛性マトリックス解析値の比較(ジベルが等間隔の場合)

表-2は図-4において、ジベル本数 $N=151$ 本(150要素,  $a=20$  cm),  $N=301$ 本(300要素,

表-2 両剛性マトリックスの解析結果の比較

			中 央 点 の 値					
			た わ み (mm)		曲げモーメント(kg・cm)		軸 力 (kg)	
Ka(t/cm)	a(cm)	K(t/cm <sup>2</sup> )	微分方程式	差分方程式	微分方程式	差分方程式	微分方程式	差分方程式
6.5	20	0.325	1.0031560	1.0031940	1449964	1449892	2366.047	2366.255
6.5	10	0.65	0.8403011	0.8403077	1257193	1257168	2923.087	2923.160
19.5	30	0.65	0.8403011	0.8403602	1257193	1256966	2923.087	2923.744
Ka→∞	a→0	K→∞	0.5771512	0.5771512	750000	750000	4388.702	4388.702

a=10 cm), N=101 本 (100 要素, a=30 cm) の場合の中央点のたわみ, 曲げモーメント, 軸力を比較して示したものである。数値で比較するため有効数字 7 桁まで示している。ばね定数は文献<sup>13,4)</sup>より, かなり小さい値を用いた。微分方程式の解析結果は差分方程式の解析結果と比較して, 僅かではあるが, たわみ および軸力 は小さめの値となり, 曲げモーメント は大きめの値となる。また, K を一定とした場合, 即ち, Ka, a が変わっても  $K=K/a$  を一定とした場合, 微分方程式による解析結果は同じになり, ジベル間隔 a の影響は入ってこない。一方, 差分方程式による解析結果は a, Ka,  $\mu$  (無次元量) を用い, a の影響が入るので, 異なった結果になる。また, 同じ K の場合でも a を小さくすれば, たわみ および 軸力 は減少し, 曲げモーメント は増加していく傾向にある。これは微分方程式の解析結果に近づいていくことを示している。換言すれば, a が大きくなれば (ジベル本数が少なくなれば), 両解析法の解析結果の差が大きくなることを示している。

また, 表-2 の曲げモーメントと軸力との間に次式の釣合いが成立している。これは, 合成断面の中立軸に作用する曲げモーメントが, コンクリート部と鋼桁部の重心にそれぞれ曲げモーメントと軸力に分配されることを示している (図-2 参照)。

$$\frac{nI_s + I_c}{nI_v} M_{ve} + (s_c + s_s) \cdot N_{ve} = M_v \quad (33)$$

式(13)の両辺に  $(nI_s + I_c) / (nI_v)$  を乗じ, 式(14)の両辺に  $(s_c + s_s)$  を乗じ, 両辺をそれぞれ加え, 式(11)を用いれば, 式(33)になっている。

## 6.2 数値計算例 2 たわみ, 曲げモーメント, 軸力 (ジベルが不等間隔の場合)

図-6 に示すように, スパン  $l=3000$  cm の単純合成桁とし, これを大きく 3 つの部分 (7.5 m, 15 m, 7.5 m) に分け, それぞれの部分でジベル間隔を一定とした (CASE 1 から CASE 4)。CASE 5 と CASE 6 はさらに支点付近のジベルの間隔を密にした場合である。頭つきスタッドジベルの間隔と要素数は表-3 のとおりである。Ka は 130 t/cm とし, 全要素数は 100 要素とした。表-4 は CASE 1 から CASE 6 までの中央点のたわみ, 曲げモーメント, 軸力の解析結果を比較したものである。この表よりわかることは, ジベルを等間隔にした場合, 僅かではあるが, たわみと曲げモーメントの値は小さくなり, 軸力の値は大きくなるが, ほとんど差がないことがわかる。

表-3 頭つきスタッドジベルの間隔と要素数

	a <sub>1</sub> (cm)	E <sub>a1</sub>	a <sub>2</sub> (cm)	E <sub>a2</sub>	a <sub>3</sub> (cm)	E <sub>a3</sub>	b <sub>1</sub> (cm)	E <sub>b1</sub>
CASE 1	30	25	—	—	—	—	30	50
CASE 2	25	30	—	—	—	—	37.5	40
CASE 3	21.43	35	—	—	—	—	50	30
CASE 4	20.27	37	—	—	—	—	57.69	26
CASE 5	10	20	32.35	17	—	—	57.69	26
CASE 6	10	20	20	10	50	7	57.69	26

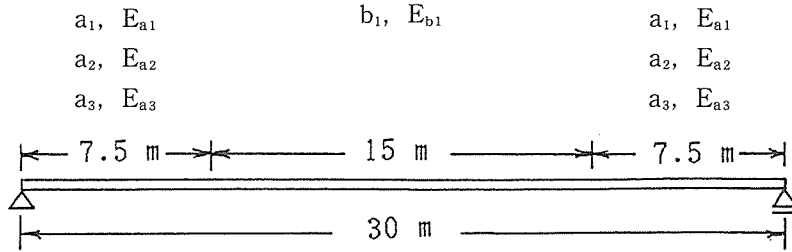


図-6 単純合成桁（ジベルが不等間隔の場合）

表-4 ジベル間隔が異なる場合の解析結果の比較

	中 央 点 の 値					
	た わ み (mm)		曲 げ モ ー メ ン ト (kg・cm)		軸 力 (kg)	
	微分方程式	差分方程式	微分方程式	差分方程式	微分方程式	差分方程式
CASE 1	0.6287100	0.6287327	947453.3	946871.8	3818.130	3819.810
CASE 2	0.6277083	0.6277502	968207.3	967393.2	3758.158	3760.510
CASE 3	0.6289905	0.6290850	996230.4	994976.3	3677.180	3680.804
CASE 4	0.6302069	0.6303473	1010423.0	1008871.0	3636.169	3640.652
CASE 5	0.6358151	0.6359488	1014894.0	1013345.0	3623.251	3627.726
CASE 6	0.6396054	0.6397417	1018392.0	1016838.0	3613.141	3617.632
完全合成桁	0.5771512		750000.		4388.702	

図-6 および表-3 において、 $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $b_1$  は頭つきスタッドジベルの間隔(cm)であり、 $E_{a1}$ ,  $E_{a2}$ ,  $E_{a3}$ ,  $E_{b1}$  はそれぞれの要素数であり、 $a_1 \times E_{a1} + a_2 \times E_{a2} + a_3 \times E_{a3} = 750$  cm,  $b_1 \times E_{b1} = 1500$  cm,  $2 \times (E_{a1} + E_{a2} + E_{a3}) + E_{b1} = 100$  要素である。

## 7. あとがき

本研究で得られた結論は次の通りである。

- 1) 従来はジベルのばね定数  $K(t/cm^2)$  を全スパンを通じて一様と仮定して、微分方程式で解析しているが、ジベルの間隔を  $a$  として離散した結合と考えると、本論文で示すような差分方程式で解析する方が Newmark の仮定を一つ減らすことができる。
- 2) 微分方程式から誘導した剛性マトリックスと差分方程式から誘導した剛性マトリックスとを比較しながら表示し、両者の関係を理論式と計算例から明らかにした。前者は後者に含まれていることが判明した。
- 3) 微分方程式と差分方程式による解析において、数値計算例で計算値に僅かではあるが、差が生じている。ジベル1本の単位長さあたりのばね定数  $K(t/cm^2)$ 、ジベル間隔  $a(cm)$ 、ジベル1本あたりのばね定数  $Ka(t/cm)$  を同じにして解析した場合、微分方程式の解は差分方程式の解と比較して僅かではあるが たわみ および 軸力 は小さめの値となり、曲げモーメントは大きめの値となる。
- 4) 微分方程式および差分方程式の解において、 $K(t/cm^2)$  および  $Ka(t/cm)$  を大きくすれば(完全合成桁に近づける)、たわみおよび曲げモーメントは減少し、軸力は増加する。
- 5)  $Ka$  を一定にした場合でも、ジベルの間隔  $a$  が変われば(ジベルの本数が変われば)、 $K = Ka/a$  は変わる。即ち、 $a$  を小さくすれば(ジベルの本数を多くすれば)、 $K$  は大きくなり、4)の

結果と同じになる。

- 6)  $K$  を一定にした場合、即ち、 $Ka$  と  $a$  が変わっても、 $K=Ka/a$  を一定とした場合、微分方程式による解は  $K(t/cm^2)$  および  $\lambda(1/cm)$  を用いるので、同じ結果になる。ジベル間隔  $a$  の影響は計算の中に入ってこない。一方、差分方程式による解は、 $a$ 、 $Ka$ 、 $\mu$  (無次元量) を用い、ジベル間隔  $a$  の影響が入るので、異なった結果になる。即ち、同じ  $K$  の場合でも  $a$  を小さくすれば、たわみおよび軸力は減少し、曲げモーメントは増加する。また、 $a$  を小さくすれば、微分方程式の解に近づいていく。
- 7) 本報告での両剛性マトリックス解析法 (微分方程式から誘導した剛性マトリックス解析法と差分方程式から誘導した剛性マトリックス解析法) は連続桁にも適用できる。
- 8) 構造解析にスカイライン法や ICCG 法などの一次元配列を用いれば、パソコンでもかなり大規模な計算が可能である。本解析では 630 要素まで倍精度で行った。
- 9) 将来、新しい素材が開発され合成桁のように離散的に結合される構造物の解析に本論文で提案する差分方程式から誘導された剛性マトリックス解析法は微分方程式から誘導された剛性マトリックス解析法と同様に有効であると思われる。

## 謝 辞

本論文の作成にあたり、北海道大学 渡辺 昇名誉教授から御指導と有益な助言を頂いたことに対し心より感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) 土木学会編：鋼・コンクリート合成構造の設計ガイドライン，1989.
- 2) Newmark, N. M., Siess, C. P. and Viest, I. M.: Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Analysis, Vol. 9, No. 1, pp. 75-93, 1951.
- 3) A. ハウラネック/O. シュタインハルト：鋼橋の理論と計算(橋 善雄, 小松定夫共訳), 山海堂, 1965.
- 4) 浜田純夫, 有住康則：不完全連続合成桁の有限要素解析, 土木学会論文報告集, 第 265 号, pp. 1-9, 1977 年 9 月.
- 5) 小松定夫, 佐々木孝：不完全合成桁の理論と近似計算法について, 土木学会論文報告集, 第 329 号, pp. 27-37, 1983 年 1 月.
- 6) 井上稔康, 佐藤浩一, 渡辺昇：不完全合成桁の差分剛性マトリックス解析法について, 構造工学論文集 Vol. 36 A, pp. 1223-1236, 1990.
- 7) PING-CHUN WANG: Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics with Applications to Computers, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.
- 8) 島田静雄, 熊沢周明：合成桁の理論と設計, 山海堂, 1973.
- 9) 福田武雄：差分法, 生産技術センター, 1977.
- 10) 丸山哲郎：自然科学・工学のための差分方程式序説, 現代数学社, 1981.
- 11) 中井 博編：プレキャスト床版合成桁橋の設計・施工, 森北出版, 1988.
- 12) 森 正武：FORTRAN 77 数値計算プログラミング, 岩波書店, 1987.