北海道大学工学部研究報告
第163号（平成5年）

Bulletin of the Faculty of Engineering
Hokkaido University No. 163 (1993)

離散表現方式によるファジィ算法方程式の近似解法

河口万由香　　伊達　　惇

（平成4年10月30日受理）

Approximate Solution of Fuzzy Arithmetic Equations using Digital Representation

Mayuka F. KAWAGUCHI, Tsutomu DA-TE

(Received October 30, 1992)

ABSTRACT

This paper deals with the equations with fuzzy arithmetic operations based on sup-min convolution. Fuzzy arithmetic is expected to make possible to apply fuzzy theory to various kinds of mathematical techniques in the engineering fields. Since Sanchez formalized this type of equations and their solution, several researchers have investigated their properties, especially their solvability. However practical calculation methods for their solutions have not been studied so far.

The authors apply the digital representation method, which has been proposed in our previous paper, to the procedure to solve fuzzy arithmetic equations (i.e. inf-α convolution). We derive the formulae for three kinds of parameters which are necessary for our calculation method. Moreover, the necessary and sufficient condition for the solvability of fuzzy arithmetic equations is summarized. Some numerical examples shows that our method is effective for solution of the equations.

1．はじめに

ファジィ数とその演算に関しては，1975年にL.A.Zadehによって拡張原理の概念[12]が提唱されて以来，おおよその数値を扱う方法として、様々な研究がなされている[3,4,7]。ファジィ算法は実数演算の自然な拡張であり，例えば，「4ぐらいの数」に「7ぐらいの数」を加えると「11ぐらいの数」が得られるというものである。

ファジィ数の演算は逆元の存在しないモノイド構造を成しているため，ファジィ数に関する代数方程式（ファジィ算法方程式，以下，単にファジィ方程式と呼ぶ）は通常の代数方程式と同じ様な方法で容易に解くことはできない。すなわち，ファジィ方程式 $A+X=C$ の解 X は $C-A$ とはならない。ファジィ方程式は，ファジィ関係方程式[9]の特殊ケースとみなすことができ，この様な観点から，Sanchezによって，α-オペレータを用いる解法が定式化され[10]，また，ファジィ三段論法におけるファジィ量限定子（fuzzy quantifier）への適用が試みられている[11]。ファジィ方

情報工学科　知能情報工学講座

程式は，常に解を持つとは限らず，また存在したとしても一つとは限らない。そこで，実用的見地から，方程式の可解性に関する研究が複数の研究者によって同時に進められている[1,2,13,14]。

著者らは，ディジタル計算機への適合性と一般化されたファジィ算法への拡張性を目指して，ファジィ数演算の離散表現による計算法を提案した[5,6]。本論文では，同じ方式に基づいてファジィ方程式の解を近似的に求めることを試みる。以下，2節では，ファジィ数とその演算およびファジィ方程式の解法について整理する。3節では，ファジィ方程式の可解性に関する定理について述べる。4節では，ファジィ数の離散表現方式と，方程式を解くための公式群を導出する。5節では簡単な数値例を図示する。

2．準　　備

2.1　拡張原理[12]

A, B をそれぞれ全体集合 U, V 上のファジィ部分集合，$\mu_A: U \to [0,1]$，$\mu_B: V \to [0,1]$ をそれぞれ A, B のメンバシップ関数とする。A と B のファジィ直積 $A \times B$ は $U \times V$ 上のファジィ集合となり，γ-レベル集合を用いて

$$(A \times B)_\gamma = A_\gamma \times B_\gamma,\quad 0 < \gamma \leqq 1 \tag{2.1}$$

と定義され，そのメンバシップ関数は次式で与えられる。

$$\mu_{A \times B}(u,v) = \mu_A(u) \wedge \mu_B(v),\quad (u,v) \in U \times V \tag{2.2}$$

ここで $\wedge$ は、min 演算を表す。式(2.1)における γーレベル集合（例えば，$A_\gamma = \{u | \mu_A(u) \geqq \gamma\}, \gamma \in (0,1]$）は，通常 α-レベル集合と呼ばれるが，本論文では，γ-レベル集合と呼ぶこととする。

写像 $f: U \to V$ に対して，f による A の像 $f(A)$ は V のファジィ部分集合となり、そのメンバシップ関数 $\mu_{f(A)}(v)$ は拡張原理[12]により次式で表される。

$$\mu_{f(A)}(v) = \sup_{v=f(u)} \mu_A(u) \tag{2.3}$$

さらに，定義域が直積 $U \times V$ である写像 $f: U \times V \to W$ を考える。すると，上式は $C = f(A, B)$ として以下のような sup-min convolution で表現される。

$$\mu_C(w) = \sup_{w=f(u,v)} \mu_{A \times B}(u,v) = \sup_{w=f(u,v)} \mu_A(u) \wedge \mu_B(v) \tag{2.4}$$

2.2　ファジィ数の演算とファジィ方程式の解法

本論文では，ファジィ数 A を実数軸 $\boldsymbol{R}$ 上のファジィ部分集合で，そのメンバシップ関数 $\mu_A: \boldsymbol{R} \to [0,1]$ が次の条件を満たすものとして定義する[7]。

(FN 1) 正規性：　$\sup_x \mu_A(x) = 1$,

(FN 2) 凸性：　$\forall \lambda \in [0,1]$,　$\forall x_1 \in \boldsymbol{R}$,　$\forall x_2 \in \boldsymbol{R}$,
$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqq \mu_A(x_1) \wedge \mu_A(x_2)$,

(FN 3) $\mu_A(x)$ は上半連続,

(FN 4) A の台 $\mathrm{supp}\, A = \{x | \mu_A(x) > 0\}$ が有界。

ただし，本論文では，簡単のため $\mu_A(x)=1$ となる x は一点のみ存在すると仮定するが，一般化は容易である。以下，全てのファジィ数の族を $F[\boldsymbol{R}]$ と表すこととする。

ファジィ数 A は，次の式(2.5)，(2.6)を満足するとき，それぞれ正(positive)，負(negative)であると呼び，いずれも満足しない場合は，$A\simeq 0$ と表記する。

$$A>0 \Leftrightarrow \mu_A(x)=0\ ;\ \forall x\leqq 0, \tag{2.5}$$

$$A<0 \Leftrightarrow \mu_A(x)=0\ ;\ \forall x>0 \tag{2.6}$$

メンバシップ関数 $\mu_A(x)$ を式(2.7)のように表す方法は L-R ファジィ数もしくは L-R 表現と呼ばれ，$A=(m_A,\alpha_A,\beta_A)_{LR}$ と表記される[3]。

$$\mu_A(x)=\begin{cases} L((m_A-x)/\alpha_A) & ;\ x\leqq m_A, \\ R((x-m_A)/\beta_A)) & ;\ x\geqq m_A \end{cases} \tag{2.7}$$

ここで，m_A はファジィ数 A の平均（すなわち，$\mu_A(m_A)=1$），α_A,β_A はそれぞれ左右の広がりを示すパラメータで，$\alpha_A\equiv\sup\{\delta|\mu_A(m_A-\delta)>0\}$，$\beta_A\equiv\sup\{\delta|\mu_A(m_A+\delta)>0\}$ と定義される。型関数 L,R は (RF 1) $L(x)=L(-x)$，(RF 2) $L(0)=1,\ \lim_{x\to 1+0} L(x)=0$，(RF 3) $L(x)$ は $[0,\infty)$ で非増加，(RF4) $L(x)>0\ ;\ \forall x\in[0,1)$ を満たす関数である。これらのパラメータを用いると $\mathrm{supp}\,A$ は $m_A-\alpha_A$，$m_A+\beta_A$ をそれぞれ左端，右端とする区間となる。

また，ファジィ数Aのγ-レベル集合$A_\gamma=\{x|\mu_A(x)\geqq\gamma\}$ は，つねに閉区間となるので，$A_\gamma=[a_\gamma^L,a_\gamma^R]$ と表すこととする。

実数$\boldsymbol{R}$上の2項演算$*$は，拡張原理すなわち sup-min convolution によってファジィ数の演算に拡張される[3,4,7]。

$$\mu_{A*B}(z)=\sup_{z=x*y}\mu_A(x)\wedge\mu_B(y) \tag{2.8}$$

これを，sup-min convolution による演算もしくは単に（ファジィ数の）演算と呼ぶこととする。

この方式の演算では，演算結果のファジィ数の曖昧さがもとのファジィ数より増大する傾向がある。例えば，$A+B=C$ という演算で得られた C を用いて $C-A$ を実行しても B は得られず，曖昧さが増大したファジィ数が求められる（図1参照）。

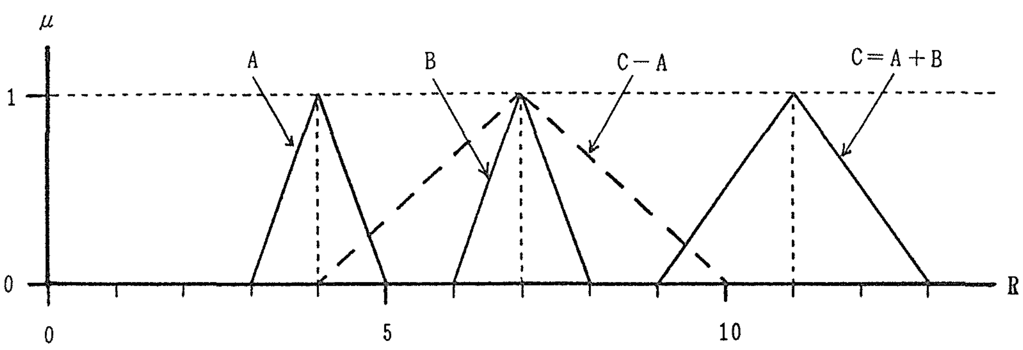

図1. $(A+B)-A\neq B$

ファジィ数 $A,C\in F[\boldsymbol{R}]$ と実数上の2項演算 $*:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ に対して，演算 $\circledast : F[\boldsymbol{R}]^2\to F[\boldsymbol{R}]$ が inf-α convolution によって次式のように定義される[10]。

$$\mu_{C \widetilde{*} A}(y) = \inf_{z=x*y} \mu_A(x)\ \alpha\ \mu_C(z) \tag{2.9}$$

ここで，$\alpha : [0,1]^2 \to [0,1]$ は α-オペレータと呼ばれ，次式で定義される[9,10]。

$$a\,\alpha\, b = \sup\{x | a \wedge x \leqq b,\ x \in [0,1]\} = \begin{cases} 1 & (a \leqq b) \\ b & (a > b) \end{cases} \tag{2.10}$$

ファジィ方程式 $A * Y = C$ の解に関して，次の定理が成立する。

[定理1]　ファジィ数 $A, C \in F[\boldsymbol{R}]$ と2項演算 $* : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ に対して，方程式 $A * Y = C$ が解を持つための必要十分条件は，$A * (C \widetilde{*} A) = C$ が成り立つことである。さらに，$C \widetilde{*} A$ が解の一つであるならば，ファジィ集合の包含関係の意味で，$C \widetilde{*} A$ は最大解であり，かつ解集合は上半束を成す。(証明略) 文献 [10] 参照。

3．ファジィ方程式の可解性に関する定理

[定理1] は，ファジィ方程式が可解であるための必要十分条件を示しているが，この条件を満たすか否かを調べるためには式(2.9)と(2.8)を各一回実行しなくてはならない。そこで，本節では，この条件を Biancino ら[1]の成果をもとに，新しい結果を加えてより具体的な形式に整理する。

以下，$*$ を連続で単調な2項演算として，ファジィ方程式 $A * Y = C$ を解くことを考える。

[定理2]　方程式 $A * Y = C$ が可解であるための必要十分条件は，任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $\mu_A(x) \leqq \mu_C(x * y_0)$ となる $y_0 \in \boldsymbol{R}$ が存在し，かつ，次の(I),(II)を満足するような閉区間の族 $\{S_\gamma\}_{\gamma \in (0,1]}$ が存在することである。

(I) 区間 $(0,1]$ の要素からなる任意の族 $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ に対して，$S_{\vee \gamma_i} = \cap S_{\gamma_i}$ が成り立つ。

(II) 任意の $\gamma \in (0,1]$ に対して，$A_\gamma * S_\gamma = C_\gamma$ が成り立つ。

[定理3]　方程式 $A + Y = C$ が可解であるための必要十分条件は，任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $\mu_A(x) \leqq \mu_C(x + y_0)$ となる $y_0 \in \boldsymbol{R}$ が存在し，かつ，$\gamma_1 \leqq \gamma_2$ なる任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1]$ に対して $c_{\gamma_1}^L - a_{\gamma_1}^L \leqq c_{\gamma_2}^L - a_{\gamma_2}^L$ かつ $c_{\gamma_1}^R - a_{\gamma_1}^R \geqq c_{\gamma_2}^R - a_{\gamma_2}^R$ が成り立つことである。

[定理4]　A, C が同じ型関数を持つ L-R ファジィ数であるとする。方程式 $A + Y = C$ が可解であるための必要十分条件は，$\alpha_A \leqq \alpha_C$ かつ $\beta_A \leqq \beta_C$ が成り立つことである。

[定理5]　方程式 $A \times Y = C$ が可解であるための必要十分条件は，任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対して $\mu_A(x) \leqq \mu_C(x \times y_0)$ となる $y_0 \in \boldsymbol{R}$ が存在し，かつ，$\gamma_1 \leqq \gamma_2$ なる任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1]$ に対して $S_{\gamma_1} \supseteq S_{\gamma_2}$ となることである。ただし，S_γ は次に示すような閉区間である。

$$S_\gamma = \begin{cases} [c_\gamma^L / a_\gamma^L,\ \ c_\gamma^R / a_\gamma^R] & (A > 0, C > 0) \\ [c_\gamma^R / a_\gamma^R,\ \ c_\gamma^L / a_\gamma^L] & (A < 0, C < 0) \\ [c_\gamma^R / a_\gamma^L,\ \ c_\gamma^L / a_\gamma^R] & (A < 0, C > 0) \\ [c_\gamma^L / a_\gamma^R,\ \ c_\gamma^R / a_\gamma^L] & (A > 0, C < 0) \\ [\min(c_\gamma^L / a_\gamma^L, c_\gamma^L / a_\gamma^R),\ \ \max(c_\gamma^R / a_\gamma^R, c_\gamma^R / a_\gamma^L)] & (A > 0, C \simeq 0) \\ [\min(c_\gamma^R / a_\gamma^R, c_\gamma^R / a_\gamma^L),\ \ \max(c_\gamma^L / a_\gamma^L, c_\gamma^L / a_\gamma^R)] & (A < 0, C \simeq 0) \end{cases} \tag{3.1}$$

[定理6]　A, C が L-R ファジィ数で，共に正または負であるとする。方程式 $A \times Y = C$ が可

解であるための必要十分条件は，$m_C/m_A \leqq \min(\alpha_C/\alpha_A, \beta_C/\beta_A)$ が成り立つことである。

［定理７］　A, C がそれぞれ L-R, R-L ファジィ数で，$A>0, C<0$ または $A<0, C>0$ であるとする。方程式 $A\times Y=C$ が可解であるための必要十分条件は，$-m_C/m_A \leqq \min(\alpha_C/\alpha_A, \beta_C/\beta_A)$ が成り立つことである。

４．離散表現によるファジィ方程式の近似解法

本節で述べる離散表現方式とは，ファジィ数 A, B のメンバシップ関数を実数軸上で離散化し，有限のサンプリング点を拡張原理に適用して，$A * B$ のメンバシップ関数を近似的な離散値で求めようとするものである。L-R ファジィ数のように型関数の組合せに関する制約は必要ない。

以下，ファジィ数 A を，L-R 表現の型関数表示を取り去って，$A=(m_A, \alpha_A, \beta_A)$ と表すこととする。

まず，演算 $A * B$ の計算を考える。ファジィ数 A のメンバシップ関数 $\mu_A(x)$ を次の $2n+1$ 点でサンプリングする。

$$x_i=\begin{cases} m_A+i\times\alpha_A/n & (i=-n,\cdots,-2,-1) \\ m_A+i\times\beta_A/n & (i=0,1\cdots,n) \end{cases} \tag{4.1}$$

$B, A * B$ のサンプリング点 y_j, z_k についても同様に求める。ただし $A * B$ の平均および広がりは，表１および表２に示す公式によってあらかじめ求めておく。以上の方法で得られた離散ファジィ数 $A=\sum_{i=-n}^{n}\mu_A(x_i)/x_i$, $B=\sum_{j=-n}^{n}\mu_B(y_j)/y_j$ の２項演算 $A*B=\sum_{k=-n}^{n}\mu_{A*B}(z_k)/z_k$ を次式で行うものとする。

$$\mu_{A*B}(z_k)=\max_{z_k=x_i*y'}\mu_A(x_i)\wedge\mu_B(y') \tag{4.2}$$

ここで，y' は x_i と z_k より求められるものであり，y' がいずれの y_j とも一致しない場合は，$y_j \leqq y' \leqq y_{j+1}$ なる２つのサンプリング値 $\mu_B(y_j)$，$\mu_B(y_{j+1})$ を用いた補間計算によって $\mu_B(y')$ の近似値を求めて式(4.2)に適用する。

次に，inf-α convolution による演算 $C \tilde{*} A$ の計算を考える。標準演算の場合と同じように，$C, A, C \tilde{*} A$ のサンプリング点 z_k, x_i, y_j を求める。$C \tilde{*} A$ の平均と広がりはパラメータ公式（表３～表６）を用いて求められる。

$$\mu_{C\tilde{*}A}(y_j)=\min_{z'=x_i*y_j}\mu_A(x_i)\ \alpha\ \mu_C(z') \tag{4.3}$$

ここで，z' は x_i と y_j より求められるものであり，z' がいずれの z_k とも一致しない場合は，ファジィ数の演算 $A * B$ の場合と同様の補間計算を行う。

式(2.9)における $\mu_A(x)\,\alpha\,\mu_C(z)$ の不連続点と式(4.3)のサンプリング点 $\mu_A(x_i)\,\alpha\,\mu_C(z')$ が一致したとき，すなわち，$\mu_A(x_i)=\mu_C(z')$ となったときには，計算精度が著しく低下する恐れがある。そこで，α-オペレータの不連続点での値だけを変更して他の値は変わらないようなオペレータ α^* を式(4.3)に適用することとする。

$$a\alpha^* b=\begin{cases} 1 & (a<b) \\ b & (a\geqq b) \end{cases} \tag{4.4}$$

5．数 値 例

本節では，ファジィ方程式の簡単な数値例をとりあげ，離散表現方式による近似解を図示する。また，3節でまとめた，方程式が可解であるための必要十分条件を満たさない例についてもとりあげる。以下，下付きの'TFN'は三角ファジィ数（Triangular Fuzzy Number）を表すものとする。

［例1］　ファジィ加算方程式　$A+Y=C$
$A=(3,1,2)_{\mathrm{TFN}}$, $C=(8,3,3)_{\mathrm{TFN}}$.

［例2］　ファジィ乗算方程式　$A\times Y=C$
$A=(3,2,1)_{\mathrm{TFN}}$, $C=(15,12,9)_{\mathrm{TFN}}$.

［例3］　ファジィ除算方程式　$A\div Y=C$
$A=(30,1,1)_{\mathrm{TFN}}$, $C=(6,1.17,1.75)_{\mathrm{TFN}}$.

［例4］　ファジィ除算方程式　$X\div B=C$
$B=(5,1,1)_{\mathrm{TFN}}$, $C=(6,1.16,1.75)_{\mathrm{TFN}}$.

［例1］～［例4］の各方程式について，離散表現方式（$n=10$）で求めた近似解をそれぞれ図2～図5に示す。ただし，図3においては $n=100$ の場合の計算結果もあわせて図示した。$n=10$ の場合と比較すると，サンプリング点数が多いほど滑らかで誤差の少ない結果が得られるという極めて妥当な結果になっている。

［例1］加算方程式については，三角ファジィ数 A,C に対して方程式の解も三角ファジィ数となっており，ファジィ算法の常識とも合致する。［例2］乗算方程式，［例3］除算方程式についても，三角ファジィ数よりはやや歪んだ滑らかな曲線が得られており，これも妥当な結果といえよう。

［例4］除算方程式の場合は，$C\ \tilde{\div}\ B$ の平均（$x=30$）においてメンバシップ値が1となっておらず，全体として正規性を満たしていない。正規ファジィ数 B,C に対して方程式 $X * B=C$ を満たすファジィ数 X が存在するならば，X は正規でなくてはならないから，これは，方程式が解を持たない例である。ここで，$X/B=X\times(1/B)=(1/B)\times X$ であることを考慮すると，［例4］は乗算方程式に置き換えることができ，［定理5］を吟味すればよいことがわかる。［例4］は［定理5］における'任意の $x\in\boldsymbol{R}$ に対して $\mu_A(x)\leqq\mu_C(x\times y_0)$ となる $y_0\in\boldsymbol{R}$ が存在する'を満足していない。

6．む す び

本論文では，離散表現によるファジィ算法方程式の解の近似計算法について述べ，さらにこの方法で必要となる3種類のパラメータを求めるための公式を導出した。さらに，ファジィ方程式の可解性に関する定理を，過去の研究成果に新しい結果を加えてまとめた。数値例によって，ファジィ方程式の求解における離散表現方式の有効性が確認された。

本手法は，あくまでも近似計算であるから，その誤差については注意を払う必要がある。図3に示したように，サンプリング点数を多くとれば（すなわち，刻み幅を小さくすれば）精度が向上し，かつ n^2 のオーダーで計算量が増大する。従って，今後の課題としては，あいまいさと誤差が共存する場合の数値的手法という位置づけから，本手法の誤差評価が必要であろう。

表1． フィジィ演算 $A*B=C$ のためのパラメータ公式

	m_C	α_C	β_C
加算	m_A+m_B	$\alpha_A+\alpha_B$	$\beta_A+\beta_B$
減算	m_A-m_B	$\alpha_A+\beta_B$	$\beta_A+\alpha_B$
乗算	$m_A\times m_B$	m_Aq+m_Bp-pq	m_As+m_Br+rs
除算	m_A/m_B	$\dfrac{m_As+m_Bp}{m_B(m_B+s)}$	$\dfrac{m_Aq+m_Br}{m_B(m_B-q)}$

表2． 乗算・除算公式における
メタパラメータ p,q,r,s の対応

<table>
<tr><th>乗　算</th><th>除　算</th><th>p</th><th>q</th><th>r</th><th>s</th></tr>
<tr><td colspan="2">$A>0,\ B>0$</td><td>α_A</td><td>α_B</td><td>β_A</td><td>β_B</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A<0,\ B<0$</td><td>$-\beta_A$</td><td>$-\beta_B$</td><td>$-\alpha_A$</td><td>$-\alpha_B$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A>0,\ B<0$</td><td>$-\beta_A$</td><td>α_B</td><td>$-\alpha_A$</td><td>β_B</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A<0,\ B>0$</td><td>α_A</td><td>$-\beta_B$</td><td>β_A</td><td>$-\alpha_B$</td></tr>
<tr><td>$A\simeq0, B>0$</td><td>—　—</td><td>α_A</td><td>$-\beta_B$</td><td>$-\beta_A$</td><td>β_B</td></tr>
<tr><td>$A\simeq0, B<0$</td><td>—　—</td><td>$-\beta_A$</td><td>α_B</td><td>$-\alpha_A$</td><td>$-\alpha_B$</td></tr>
<tr><td>—　—</td><td>$A\simeq0, B>0$</td><td>α_A</td><td>α_B</td><td>β_A</td><td>$-\alpha_A$</td></tr>
<tr><td>—　—</td><td>$A\simeq0, B<0$</td><td>$-\beta_A$</td><td>$-\beta_B$</td><td>$-\alpha_A$</td><td>β_B</td></tr>
<tr><td>$A>0, B\simeq0$</td><td>—　—</td><td>$-\beta_A$</td><td>α_B</td><td>β_A</td><td>β_B</td></tr>
<tr><td>$A<0, B\simeq0$</td><td>—　—</td><td>α_A</td><td>$-\beta_B$</td><td>$-\alpha_A$</td><td>$-\alpha_B$</td></tr>
</table>

表3． フィジィ方程式 $A*Y=C$ のためのパラメータ公式

	m_Y	α_Y	β_Y
加算	m_C-m_A	$\alpha_C-\alpha_A$	$\beta_C-\beta_A$
減算	m_A-m_C	$\beta_C-\beta_A$	$\alpha_C-\alpha_A$
乗算	m_C/m_A	$\dfrac{m_Aq-m_Cp}{m_A(m_A-p)}$	$\dfrac{m_As-m_Cr}{m_A(m_A+r)}$
除算	m_A/m_C	$\dfrac{m_As-m_Cr}{m_C(m_C+s)}$	$\dfrac{m_Aq-m_Cp}{m_C(m_C-q)}$

表4． 乗算・除算方程式 $A*Y=C$ のための公式
におけるメタパラメータ p,q,r,s の対応

<table>
<tr><th>乗　算</th><th>除　算</th><th>p</th><th>q</th><th>r</th><th>s</th></tr>
<tr><td colspan="2">$A>0,\ C>0$</td><td>α_A</td><td>α_C</td><td>β_A</td><td>β_C</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A<0,\ C<0$</td><td>$-\beta_A$</td><td>$-\beta_C$</td><td>$-\alpha_A$</td><td>$-\alpha_C$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A>0,\ C<0$</td><td>$-\beta_A$</td><td>α_C</td><td>$-\alpha_A$</td><td>β_C</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A<0,\ C>0$</td><td>α_A</td><td>$-\beta_C$</td><td>β_A</td><td>$-\alpha_C$</td></tr>
<tr><td>$A>0, C\simeq0$</td><td>—　—</td><td>$-\beta_A$</td><td>α_C</td><td>β_A</td><td>β_C</td></tr>
<tr><td>$A<0, C\simeq0$</td><td>—　—</td><td>α_A</td><td>$-\beta_C$</td><td>$-\alpha_A$</td><td>$-\alpha_C$</td></tr>
</table>

表5． フィジィ方程式 $X*B=C$ のためのパラメータ公式

	m_X	α_X	β_X
加算	m_C-m_B	$\alpha_C-\alpha_B$	$\beta_C-\beta_B$
減算	m_C+m_B	$\alpha_C-\beta_B$	$\beta_C-\alpha_B$
乗算	m_C/m_B	$\dfrac{m_Bq-m_Cp}{m_B(m_B-p)}$	$\dfrac{m_Bs-m_Cr}{m_B(m_B+r)}$
除算	$m_C\times m_B$	m_Bq-m_Cr+qr	m_Bs-m_Cr-ps

表6． 乗算・除算方程式 $X*B=C$ のための公式
におけるメタパラメータ p,q,r,s の対応

<table>
<tr><th>乗　算</th><th>除　算</th><th>p</th><th>q</th><th>r</th><th>s</th></tr>
<tr><td colspan="2">$B>0,\ C>0$</td><td>α_B</td><td>α_C</td><td>β_B</td><td>β_C</td></tr>
<tr><td colspan="2">$B<0,\ C<0$</td><td>$-\beta_B$</td><td>$-\beta_C$</td><td>$-\alpha_B$</td><td>$-\alpha_C$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$B>0,\ C<0$</td><td>$-\beta_B$</td><td>α_C</td><td>$-\alpha_B$</td><td>β_C</td></tr>
<tr><td colspan="2">$B<0,\ C>0$</td><td>α_B</td><td>$-\beta_C$</td><td>β_B</td><td>$-\alpha_C$</td></tr>
<tr><td>$B>0, C\simeq0$</td><td>—　—</td><td>$-\beta_B$</td><td>α_C</td><td>β_B</td><td>β_C</td></tr>
<tr><td>$B<0, C\simeq0$</td><td>—　—</td><td>α_B</td><td>$-\beta_C$</td><td>$-\alpha_B$</td><td>$-\alpha_C$</td></tr>
<tr><td>—　—</td><td>$B>0, C\simeq0$</td><td>α_B</td><td>α_C</td><td>$-\alpha_B$</td><td>β_C</td></tr>
<tr><td>—　—</td><td>$B<0, C\simeq0$</td><td>$-\beta_B$</td><td>$-\beta_C$</td><td>β_B</td><td>$-\alpha_C$</td></tr>
</table>

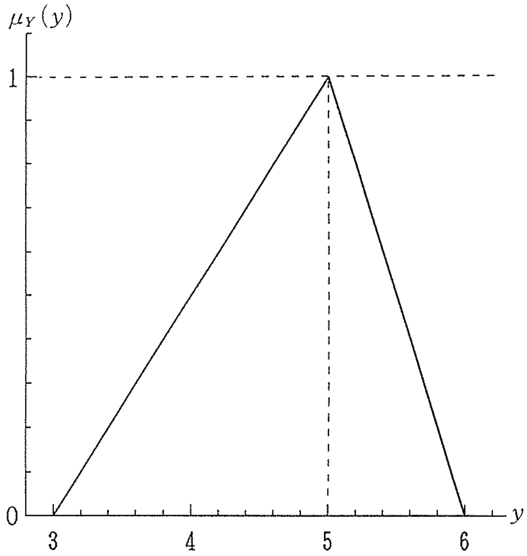

図2.　ファジィ加算方程式 $A+Y=C$ の解
［例1］ $A=(3,1,2)_{\mathrm{TFN}}$,　$C=(8,3,3)_{\mathrm{TFN}}$,
$C\tilde{-}A=(5,2,1)_{\mathrm{TFN}}$

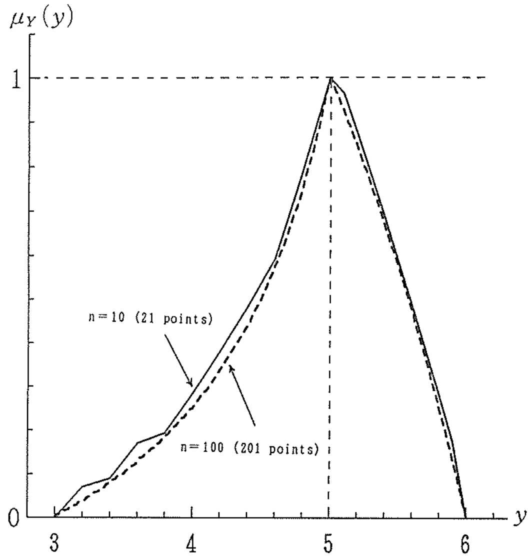

図3.　ファジィ乗算方程式 $A\times Y=C$ の解
［例2］ $A=(3,2,1)_{\mathrm{TFN}}$,
$C=(15,12,9)_{\mathrm{TFN}}$,
$C\tilde{\times}A=(5,2,1)$

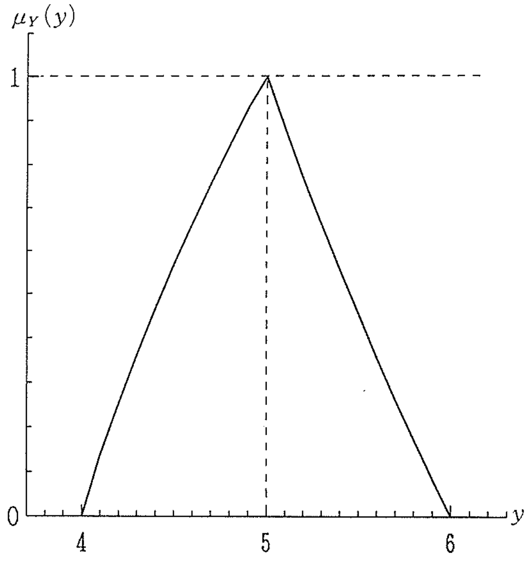

図4.　ファジィ除算方程式 $A\div Y=C$ の解
［例3］ $A=(30,1,1)_{\mathrm{TFN}}$,
$C=(6,1.17,1.75)_{\mathrm{TFN}}$,
$C\tilde{\div}A=(5,1,1)$

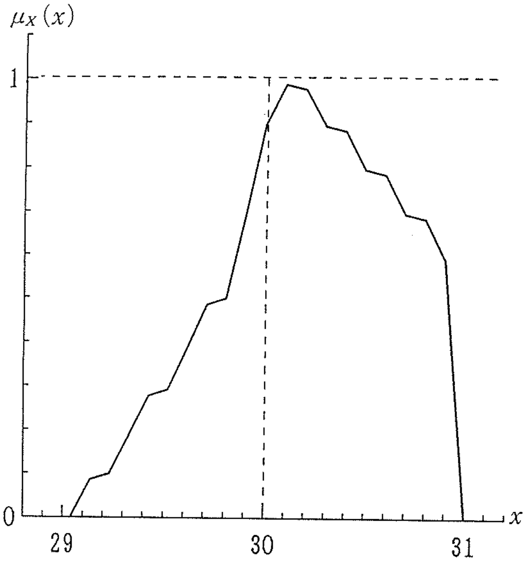

図5.　ファジィ除算方程式 $X\div B=C$ の解
［例4］ $B=(5,1,1)_{\mathrm{TFN}}$.
$C=(6,1,16,1.75)_{\mathrm{TFN}}$,
$C\tilde{\div}B=(30,0,96,1)$

ファジィ方程式の可解性に関しては，参考文献にも取り上げたように，活発に研究されている。しかし，［定理２］，［定理３］および［定理５］に示された必要十分条件は，いずれも，有限の手間で確かめることはできず，方程式が解を持つか否かをあらかじめ判定するための実用的指標とはなり得ない。一方，［定理４］及び［定理６］，［定理７］は，手間という観点からは実用的であるが，*L-R* ファジィ数の加法と乗法に限定された指標であって，汎用性に欠ける。従って，本論文で扱ったような近似的手法をもって，ある程度の誤差の範囲内で，数値的に可解性を判定することは，実用的価値があるものと思われる。

謝　辞

本研究における数値例の作成及び作図に協力いただいた，本講座学部学生　松本伸一君（現　三井物産㈱勤務）に謝意を表する。

文　献

［1］ L. Biancino & A. Lettieri ： Equations with fuzzy numbers, Information Sciences, Vol. 47 (1989) 63-76.

［2］ J.J. Buckley & Y. Qu ： Solving linear and quadratic fuzzy equations, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 38 (1990) 43-59.

［3］ D. Dubois & H. Prade ： Fuzzy Sets and Systems ： Theory and Applications, Academic Press, Inc. (1980).

［4］ A. Kaufmann & M.M. Gupta ： Introduction to Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand Reinhold Company Inc. (1985).

［5］ M.F. Kawaguchi & T. Da-te ： Parameter formulae for fundamental operations of weakly non-interactive fuzzy numbers, Proc. of IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE '92), San Diego (1992) 153-160.

［6］ 河口，伊達：離散表現による Weakly Non-Interactive ファジィ数の基本演算について，日本ファジィ学会誌，Vol.4, No.3(1992)93-105。

［7］ M. Mizumoto & K. Tanaka ： Some properties of fuzzy numbers, Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, M.M. Gupta (eds.), (1979) 153-164.

［8］ W. Pedrycz ： On solution of fuzzy functional equations, J. Math. Anal. Appl., Vol. 123 (1987) 589-604.

［9］ E. Sanchez ： Resolution of composite fuzzy relation equations, Information and Control, Vol. 30 (1976) 38-48.

［10］ E. Sanchez ： Solution of fuzzy equations with extended operations, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 12 (1984) 237-248.

［11］ E. Sanchez ： *Fuzzy quantifiers in syllogisms, direct versus inverse computations*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 28 (1988) 305-312.

［12］ L.A. Zadeh ： The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning, part I, Information Sciences, Vol. 8 (1975) 199-249.

［13］ R. Zhao & R. Govind ： Algebraic characteristics of extended fuzzy numbers, Information Sciences, Vol. 54 (1991) 103-130.

［14］ R. Zhao & R. Govind ： Solutions of algebraic equations involving generalized fuzzy numbers, Information Sciences, Vol. 56 (1991) 199-243.