



Title	合成板の合成度評価式とその適用に関する研究
Author(s)	佐藤, 浩一; Sato, Koichi; 及川, 昭夫 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 164, 1-14
Issue Date	1993-05-28
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/42367">https://hdl.handle.net/2115/42367</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	164_1-14.pdf



## 合成板の合成度評価式とその適用に関する研究

佐藤 浩一 及 川 昭夫  
小幡 卓司 平 沢 秀之  
(平成4年12月24日受理)

### Study on Composite Degree Expression and Its Application to Analyses of Composite Plates

Koichi SATO, Akio OIKAWA, Takashi OBATA and Hideyuki HIRASAWA  
(Received December 30, 1992)

#### Abstract

This paper offers a set of practical expressions on the composite degree designed to enable static and buckling analyses of partial (incomplete) composite plates consisting of two layers of isotropic materials.

The paper also analyzes the relationship of lateral deflections and critical loads among complete composite plates, partial composite plates and individual plates that do not interact with regard to simply supported rectangular composite plates subjected to fully distributed loads and simply supported circular plates subjected to rotationally symmetric loading.

$\alpha=1$  signifies complete composite plates.

$0<\alpha<1$  signifies partial composite plates.

$\alpha=0$  signifies individual plates that do not interact.

#### 1. ま え が き

現在用いられている鋼とコンクリートとの合成構造物の設計ガイドラインとして、最近、土木学会より文献<sup>1)</sup>が出版され、異種材料を合成し複合構造物として設計することが今後益々重要になるものと思われる。例えば、橋梁における複合構造物の一つに鋼桁とコンクリート床版とを頭つきスタッドジベルで完全に剛に一体として結合した合成桁(完全合成桁)があるが、実際の合成桁は完全合成桁と重ね梁の中間の挙動を示す不完全合成桁である。これらについては多くの研究がなされている<sup>2)-12)</sup>。しかしながら、合成桁に関する合成度を評価する簡易式についてあまり発表されていないようである。一方、CS橋<sup>13)</sup>のように鋼板とコンクリート床版とを頭つきスタッドジベルで一体として結合した合成板においても上述の不完全合成桁と同じように不完全合成板となり、完全合成板と重ね板との中間の挙動を示すはずである。頭つきスタッドジベルの変形を考慮した合成板の面外荷重による解析理論として文献<sup>14)</sup>があるが、この理論では鋼板厚はコンクリート板厚に比較して非常に小さいとし、断面諸元の算定においてある部分で鋼板厚を零として

いる。文献<sup>16),17),20),22)</sup>は鋼板厚をも考慮した解析理論を誘導し、文献<sup>14)</sup>を包含していることを示し、文献<sup>14)</sup>との差異を比較検討している。しかしながら、合成板に関する合成度を評価する実用的な簡易式もやはり発表されていないようである。また、有限要素法を用いて不完全合成板の解析をし、文献<sup>20)</sup>の数値計算と比較している研究も報告されているが<sup>27)</sup>、計算量はかなりのものと思われる。

本論文では、鋼板とコンクリート床版からなる合成板に限定せず、等方性材料であるが、弾性係数、ポアソン比、板厚等の異なる二枚の板を接着剤で合成した合成板（二層板）を考える。合成桁において離散的に配置された頭つきスタッドジベルの変形を考慮する場合はこの離散的配置をならして同じ強さの連続的配置に置換して解析しているのが<sup>6)</sup>、頭つきスタッドジベルの代わりに連続的配置の接着剤を用いることができるものとする。従って、接着が完全に剛であるならば、完全合成二層板と考えることができる。ここでは接着は完全に剛でなく接着剤の変形を考慮した場合の合成二層板について考える（以下、不完全合成二層板という）。このような考えに基づいた不完全合成二層板の解析例として長方形板の座屈解析がなされているが<sup>24),29)</sup>、不完全合成二層板の座屈解析例は示されていない。しかしながら、これは直交座標を極座標に変換して解析すれば可能である。

以上のように、これら長方形板、正方形板、円板、桁など合成構造物の静的解析および座屈解析が個々に行われており、合成度を用いて系統的に評価する式が示されていない。即ち、このような不完全合成二層板、不完全合成桁の合成度に関する簡単な実用的評価式についての研究はあまりなされていないようである。

そこで、本論文は全周辺単純支持の長方形板（正方形板を含む）および円板、また、長方形板の特別の場合としての桁の合成度に関する非常に簡単な代数式で表示される実用的評価式を誘導し、式中で定数を入れ換えるだけで、上述の構造物の静的解析および座屈解析とが系統的に同時にできることを示すものである。また、定数を比較するだけで上述の構造物の合成度の大小が判定できることを示すものである。この二点が本論文の主な目的である。具体的には、構造物の静的解析および座屈解析ごとに無次元量として $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ なるパラメータを示し、これらのパラメータは両解析において同一になることを示すものであり、数値解析により不完全合成二層板（不完全合成桁）の特性を示す。即ち、無次元量の $\alpha=1$ の場合が完全合成二層板であり、 $0<\alpha<1$ の場合が不完全合成二層板であり、 $\alpha=0$ の場合が重ね二層板であることを示すものである。数値解析にはパソコンを用いるまでもなく、電卓で十分である。また、新しい型のジベルを用いた合成床版の合成度の評価<sup>28)</sup>に文献<sup>16)</sup>を適用している。この文献<sup>16)</sup>を更に利用しやすい代数式で表示したものが、本論文の合成度に関する実用的評価式であるので、適用性は広いものと思われる。

## 2. 本論文で用いる主な記号

図1, 2は本解析で用いる第1板と第2板とが接着剤で合成された長方形板（合成二層板）を示している。また、本論文で用いる主な記号は次の通りである。

$A_1$  = 第1板の単位幅あたりの断面積、 $A_2$  = 第2板の単位幅あたりの断面積、 $A_v = A_2 + A_1/\bar{n}$  = 第2板に換算した単位幅あたりの合成断面積、 $D_v = \bar{E}_2 I_v$  = 完全合成二層板の単位幅あたりの換算板剛性、 $E_1$  = 第1板のヤング率、 $E_2$  = 第2板のヤング率、 $\bar{E}_1 = E_1/(1-\nu_1^2)$ 、 $\bar{E}_2 = E_2/(1-\nu_2^2)$ 、 $h_1$  = 第1板の板厚、 $h_2$  = 第2板の板厚、 $I_1$  = 第1板のその重心Cに関する単位幅あたり断面二次モーメント、 $I_2$  = 第2板のその重心Sに関する単位幅あたり断面二次モーメント、 $I_v = I_2 + I_1/\bar{n} + A_v s_1$

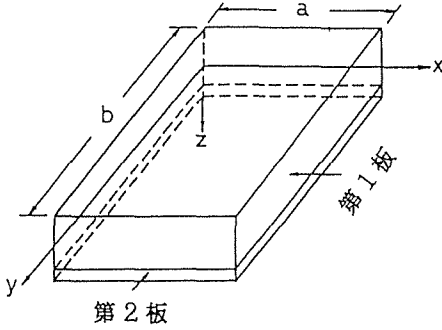


図1 合成二層板の座標

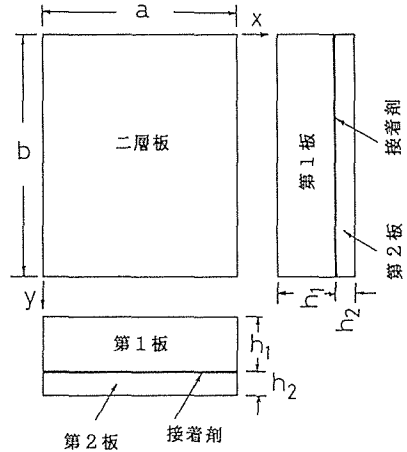


図2 合成二層板

$s_2$  = 第2板に換算した合成断面の単位幅あたりの断面二次モーメント,  $K$  = 単位長さあたりの接着剤のばね定数 ( $K=0$  の場合は重ね二層板,  $0 < K < \infty$  の場合は不完全合成二層板,  $K = \infty$  の場合は完全合成二層板),  $\bar{n} = \bar{E}_2 / \bar{E}_1$ <sup>14)</sup>,  $M_{vx}(x, y)$  = 完全合成二層板の単位幅あたりの  $x$  方向の曲げモーメント,  $M_{vy}(x, y)$  = 完全合成二層板の単位幅あたりの  $y$  方向の曲げモーメント,  $p_z(x, y)$  = 荷重強度,  $s$  = 第1板の重心  $C$  と第2板の重心  $S$  との距離,  $s_1 = A_2 / A_v \times s$  = 合成断面の中立軸  $V$  と第1板の重心  $C$  との距離,  $s_2 = A_1 / (\bar{n} A_v) \times s$  = 合成断面の中立軸  $V$  と第2板の重心  $S$  との距離,  $w_v(x, y)$  = 完全合成二層板のたわみ,  $w_{ve}(x, y)$  = 不完全合成二層板のたわみ,  $\alpha, \beta, \gamma$  = 無次元パラメータ,  $\nu$  = 二層板(合成板)のポアソン比,  $\nu_1$  = 第1板のポアソン比,  $\nu_2$  = 第2板のポアソン比。なお, 詳細な記号の説明は文献<sup>24)</sup>を参照されたし。

### 3. 不完全合成二層平板の面外荷重による解析理論 (偏微分方程式)

本解析理論では次の5つの仮定を用いる。

- (1) 第1板と第2板の応力とひずみ関係は線形である。
- (2) 接着剤に作用する力と変位は線形である。
- (3) 接着剤は均等に塗布されているものとする。
- (4) 第1板と第2板の  $z$  方向の変位は同じである。
- (5) 接着剤の厚さは無視する。

ここでは, 文献<sup>7)</sup>にある不完全合成桁の場合の誘導方法を不完全合成二層板に適用していくものである。詳細は省略するが, 誘導などは文献<sup>20), 22), 23), 24)</sup>などを参照されたし。以降, 重要な式のみを簡単に示す。完全合成二層平板のたわみを  $w_v(x, y)$  とし, 完全合成二層板の単位幅あたりの換算板剛性を  $D_v$  とすれば<sup>18), 19)</sup>,

$$\nabla^2 \nabla^2 w_v(x, y) = \frac{p_z(x, y)}{D_v} \tag{1}$$

$$\text{ここで } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2}$$

式(2)は直交座標における Laplace 演算子である。

また、曲げモーメント  $M_{vx}(x, y)$ ,  $M_{vy}(x, y)$  は

$$M_{vx}(x, y) = -D_v \left( \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$M_{vy}(x, y) = -D_v \left( \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial x^2} \right) \quad (4)$$

となる。接着剤のばね定数  $K$  は Newmark<sup>2)</sup> による押し抜きせん断試験により求めるものとし

$$\kappa^2 = K \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_2 + I_1} \frac{\bar{n}}{\bar{E}_2 A_1} \frac{s}{s_1} \quad (5)$$

とおく<sup>20), 22)</sup>。この  $\kappa$  は本論文の目的である静的および座屈の系統的解析における合成度を評価するために重要なパラメータの一つである。不完全合成二層平板(接着剤の弾性変形を考慮した場合の合成二層平板)のたわみ  $w_{ve}(x, y)$  で整理すれば、

$$D_v \nabla^4 w_{ve}(x, y) - \kappa^2 D_v \nabla^2 w_{ve}(x, y) = -\kappa^2 D_v \nabla^2 w_v(x, y) + \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_2 + I_1} p_z(x, y) \quad (6)$$

となる。また、式(6)に  $\nabla^2$  を施せば

$$D_v \nabla^6 w_{ve}(x, y) - \kappa^2 D_v \nabla^4 w_{ve}(x, y) = -\kappa^2 p_z(x, y) + \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_2 + I_1} \nabla^2 p_z(x, y) \quad (7)$$

となる。式(6)あるいは式(7)が不完全合成二層平板のたわみに関する偏微分方程式である。ここで、不完全合成桁の場合の文献<sup>7)</sup> の考え方を適用する。完全合成二層平板の場合のたわみが  $w_v(x, y)$  であり、接着剤の変形を考慮した場合のたわみが  $w_{ve}(x, y)$  であり、 $w_{ve}(x, y)$  と  $w_v(x, y)$  との差を  $w_e(x, y)$  とすれば、 $w_v(x, y)$  に関しては式(1)、即ち、式(9)が成立する。また、 $w_e(x, y)$  に関しては式(6)と式(1)との差より、

$$D_v \nabla^4 w_e(x, y) - D_v \kappa^2 \nabla^2 w_e(x, y) = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} p_z(x, y) \quad (8)$$

となる。結局、式(6)は次の2個の偏微分方程式になる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^4 w_v(x, y) = \frac{p_z(x, y)}{D_v} \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^4 w_e(x, y) - \kappa^2 \nabla^2 w_e(x, y) = \frac{p_z(x, y)}{D_e} \end{array} \right. \quad (10)$$

ただし、

$$D_v = \bar{E}_2 I_v, \quad D_e = D_v \frac{\bar{n} I_2 + I_1}{A_1 s_1 s}, \quad (11)$$

$$\bar{E}_2 = E_2 / (1 - \nu_2^2), \quad \bar{E}_1 = E_1 / (1 - \nu_1^2), \quad \bar{n} = \bar{E}_2 / \bar{E}_1,$$

$$I_v = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_2 s_2 s = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_1 s_1 s / \bar{n} = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_v s_1 s_2$$

式(11)の  $D_v$  は文献<sup>15)</sup> の p.5 および文献<sup>19)</sup> の p.391 にある二層板の場合の  $D_v$  と一致することを確認してある。式(10)は面外荷重 ( $p_z(x, y)$ ) が作用する他に面内荷重(引張力)に相当する  $D_e \cdot \kappa^2$  が合成断面の中立面に作用する平板に対する基礎偏微分方程式と同形である。

なお、本解析理論と文献<sup>14)</sup> との断面諸元の算定には次のような差異があるようである<sup>20)</sup>。

文献<sup>14)</sup> では、第1板厚  $h_1$  に比べて、第2板厚  $h_2$  は非常に小さいとしている。

即ち、 $A_v \rightarrow A_1 / \bar{n}$ ,  $s \rightarrow 0.5 \times h_1$ ,  $s_1 \rightarrow 0$ ,  $s_2 \rightarrow s \rightarrow 0.5 \times h_1$ ,  $I_2 \rightarrow 0$ ,

$I_v \rightarrow I_1 / \bar{n} + h_2 \times 0.5 h_1 \times 0.5 h_1$ , とし、

$$C_0 = \frac{\bar{E}_2 A_2}{\bar{E}_1 A_1} = \frac{\bar{E}_2 h_2}{\bar{E}_1 h_1} = \bar{n} \frac{h_2}{h_1} \quad (12)$$

とにおいて、 $D_v \rightarrow \bar{E}_2 I_v$  としている。即ち、 $D_v \rightarrow \bar{E}_1 I_1 (1+3C_0)$  としている。具体的には

$$D_v = \frac{\bar{E}_1 h_1^3}{12} (1+3C_0) \quad (13)$$

としている。このように文献<sup>14)</sup>では、 $A_v$ ,  $s$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $I_2$ ,  $I_v$ ,  $D_v$ の算定において、第2板厚  $h_2$  を省略している。ただし、 $A_2$ だけは考慮しているようである。なお、文献<sup>14)</sup>の断面諸元は著者らが文献<sup>14)</sup>より推察したものである。文献<sup>20),22)</sup>に差異を詳細に比較している。

#### 4. 不完全合成二層円板の面外荷重による解析理論 (常微分方程式)

平板のたわみ問題は一般的には2個の独立変数  $x$  と  $y$  に関する二次元問題であるが、円板に軸対称荷重が作用し、また円板の支持方法も軸対称である場合には、1個の独立変数  $r$  に関する一次元問題となり、桁の場合と同様に簡単に解ける。円板を解析する場合、式(1)の支配方程式を図3に示すように極座標で表示すれば、便利である。式(1)から式(10)までの Laplace 演算子  $\nabla^2$  を Laplace 演算子  $\nabla_r^2$  に、直角座標  $(x, y)$  を極座標  $(r, \phi)$  に変換すればよい。軸対称の場合は  $\phi=0$  とすればよい。従って、式(2)の Laplace 演算子は

$$\nabla_r^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \quad (14)$$

となる<sup>18),19)</sup>。ここで、式(14)は極座標における Laplace 演算子である。また、式(9), (10)を極座標  $(r)$  で表示すれば

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_r^4 w_v(r) - \frac{p_z(r)}{D_v} \\ \nabla_r^4 w_e(r) - \kappa^2 \nabla_r^2 w_e(r) = \frac{p_z(r)}{D_e} \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_r^4 w_v(r) - \frac{p_z(r)}{D_v} \\ \nabla_r^4 w_e(r) - \kappa^2 \nabla_r^2 w_e(r) = \frac{p_z(r)}{D_e} \end{array} \right. \quad (16)$$

となる。式(15), (16)が不完全合成二層円板のたわみに関する偏微分方程式である。式(16)は曲げと面内荷重(引張力)に相当する  $H(=D_e \cdot \kappa^2)$  が合成断面の中立面に作用する円板の基礎偏微分方程式と同形である。

#### 5. 不完全合成桁の面外荷重による解析理論 (常微分方程式)

式(6), (9), (10), (11)において、 $\nabla^4 w_v \rightarrow w_v^{(4)} = d^4 w_v / dx^4$ ,  $\nabla^4 w_e \rightarrow w_e^{(4)} = d^4 w_e / dx^4$ ,  $\nabla^2 w_e \rightarrow d^2 w_e / dx^2$ ,  $D_v \rightarrow E_s I_v$  とすれば、即ち、 $y$  に関する項およびポアソン比を零とすれば不完全合成桁の場合の常微分方程式となる<sup>7),12),20)</sup>。従って、式(6)は次式ようになる。

$$E_s I_v \frac{d^4 w_{ve}}{dx^4} - \kappa^2 E_s I_v \frac{d^2 w_{ve}}{dx^2} = -\kappa^2 E_s I_v \frac{d^2 w_v}{dx^2} + \frac{n I_v}{n I_s + I_c} p \quad (17)$$

文献<sup>7)</sup>と同様に考えて、完全合成桁の場合のたわみが  $w_v$  であり、接着剤の弾性変形を考慮した場合のたわみが  $w_{ve}$  であり、 $w_{ve}$  と  $w_v$  との差を  $w_e$  とすれば、 $w_v$  に関しては式(19)が成立する。また、 $w_e$  に関しては式(17)と式(19)との差より

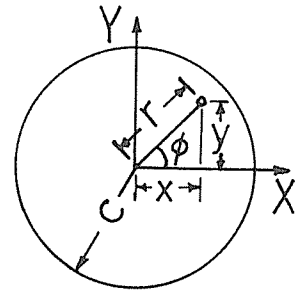


図3 極座標

$$E_s I_v \frac{d^4 w_e}{dx^4} - \kappa^2 E_s I_v \frac{d^2 w_e}{dx^2} = \frac{A_c S_c S}{n I_s + I_c} p \tag{18}$$

となる。結局、式(17)は次の2個の常微分方程式になる。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^4 w_v}{dx^4} &= \frac{p}{E_s I_v} \\ \frac{d^4 w_e}{dx^4} - \kappa^2 \frac{d^2 w_e}{dx^2} &= \frac{p}{E_s I_e} \end{aligned} \right. \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

ただし、

$$I_e = I_v \frac{n I_s + I_c}{A_c S_c S}, \quad n = \frac{E_s}{E_c} \tag{21}$$

式(21)における不完全合成桁の場合の断面積  $A_c$  の単位は長さの2乗であり、断面二次モーメント  $I_s, I_c, I_v, I_e$  の単位は長さの4乗である。また、 $E_c, E_s$  はバーの付かないものである。

### 6. 不完全合成二層長方形板と円板の座屈の偏微分方程式

前節までの荷重は静的な面外荷重である。ここでは合成二層板の中立面に作用する面内荷重の圧縮力による座屈について考察する。完全二層平板の鉛直たわみに関する式(9)は板剛性( $D_v$ )で面外荷重( $p_z(x, y)$ )が作用する平板の曲げに関する偏微分方程式である。同様に、式(10)は板剛性( $D_e$ )で面外荷重( $p_z(x, y)$ )が作用する他に面内荷重(引張力)に相当する  $H(=D_e \cdot \kappa^2)$  が中立面に作用する平板の偏微分方程式である。図4に示すような面内荷重  $p_{vex}$  と  $p_{vey}$  が作用する合成二層長方形板を考える。式(9)、(10)は次のような偏微分方程式になる。

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla^4 w_v(x, y) &= \frac{1}{D_v} \left[ p_z(x, y) - p_{vx} \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial x^2} - p_{vy} \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial y^2} \right] \\ \nabla^4 w_e(x, y) - \kappa^2 \nabla^2 w_e(x, y) &= \frac{1}{D_e} \left[ p_z(x, y) - p_{ex} \frac{\partial^2 w_e(x, y)}{\partial x^2} - p_{ey} \frac{\partial^2 w_e(x, y)}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \right. \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

図5に示すような合成二層円板の中立面に作用する面内荷重( $p_{ve}$ )による座屈について考察する。式(15)、(16)は次のような偏微分方程式になる。

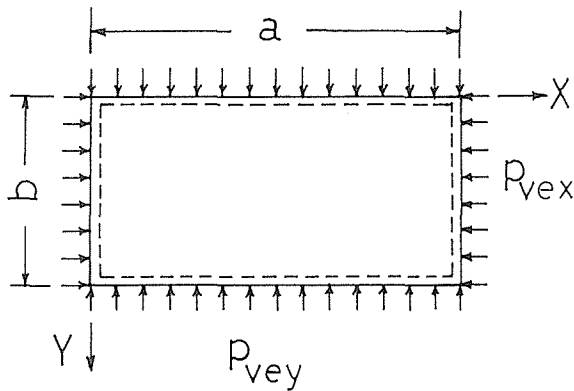


図4 面内荷重  $p_{vex}$  と  $p_{vey}$  が作用する全周辺単純支持合成二層長方形板

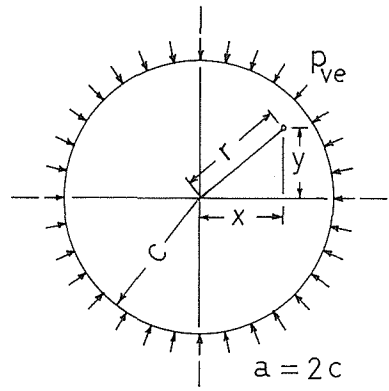


図5 面内荷重  $p_{ve}$  が作用する全周辺単純支持合成二層円板

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_r^4 w_v(r) = \frac{1}{D_v} \left[ p_z(r) - p_v \nabla_r^2 w_v(r) \right] \\ \nabla_r^4 w_e(r) = \frac{1}{D_e} \left[ p_z(r) - (p_e - H) \nabla_r^2 w_e(r) \right] \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_r^4 w_v(r) = \frac{1}{D_v} \left[ p_z(r) - p_v \nabla_r^2 w_v(r) \right] \\ \nabla_r^4 w_e(r) = \frac{1}{D_e} \left[ p_z(r) - (p_e - H) \nabla_r^2 w_e(r) \right] \end{array} \right. \quad (25)$$

## 7. 全周辺単純支持の不完全合成二層長方形板と円板の静的解析と座屈解析

次のような4ケースの無次元量パラメータ  $\alpha_{11}$ ,  $\beta_{11}$ ,  $\gamma_{11}$  を求める。

### 7.1 長方形板の場合の静的解析における $\alpha_{11}$ , $\beta_{11}$ , $\gamma_{11}$ (ケース1)

長方形板の境界条件が四辺単純支持ならば、式(22), (23)の平板のたわみ曲面を次式のように仮定することができる。

$$w_v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v W_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (26)$$

$$w_e(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e W_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (27)$$

$$(m=1, 2, \dots; n=1, 2, \dots)$$

式(22), (23)において、面外荷重  $p_z(x, y) = p_z$  (等分布満載荷重の場合)ならば、式(26), (27)の  $v W_{mn}$ ,  $e W_{mn}$  は次のように求まる<sup>18)</sup>。

$$v W_{mn} = \frac{16 p_z}{D_v \pi^6 m n \left[ \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{p_{vx} m^2}{\pi^2 D_v a^2} - \frac{p_{vy} n^2}{\pi^2 D_v b^2} \right]} \quad (28)$$

$$e W_{mn} = \frac{16 p_z}{D_e \pi^6 m n \left[ \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{p_{ex} m^2}{\pi^2 D_e a^2} - \frac{p_{ey} n^2}{\pi^2 D_e b^2} + \frac{\kappa^2}{\pi^2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right]} \quad (29)$$

式(28), (29)において、 $p_{vx} = p_{vy} = 0$ ,  $p_{ex} = p_{ey} = 0$  とおけば、静的解析の場合のたわみ曲面が求まる。また、式(28), (29)において、第1項のみをとり<sup>26)</sup>、次のような比をとる。

$$\gamma_{11} = \frac{W_e(0.5a, 0.5b)}{W_v(0.5a, 0.5b)} = \frac{e W_{11}}{v W_{11}} = \frac{D_v}{D_e} \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{n I_2 + I_1} \cdot \beta_{11} \quad (30)$$

ここで、

$$\beta_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2}{\pi^2 \mu_{11}^2}} = 1 - \alpha_{11} \quad (31)$$

ここで、

$$\text{長方形板の場合 } \mu_{11}^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \quad \text{正方形板の場合 } \mu_{11}^2 = \frac{2}{a^2} \quad (32)$$

以上の説明の詳細については文献<sup>26)</sup>を参照されたし。

### 7.2 円板の場合の静的解析における $\alpha_{11}$ , $\beta_{11}$ , $\gamma_{11}$ (ケース2)

円板の境界条件が全周辺単純支持で、面外荷重  $p_z(r) = p_z$  (等分布満載荷重)のみによる場合の円板中央点のたわみ  $w_{0v}(0)$  は式(24)を解けば、次式のように簡単に求まる<sup>18), 25)</sup>。

$$W_{0v}(0) = \frac{p_z c^4}{64 D_v} \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \quad (33)$$

同様に、面外荷重  $p_z(r) = p_z$  (等分布満載荷重) のみによる場合の円板中央点のたわみは  $W_{0e}(0)$  は式(25)を解けば、次式のように簡単に求まる<sup>18),25)</sup>。

$$W_{0e}(0) = \frac{p_z c^4}{64 D_e} \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \quad (34)$$

次に、これらの解、即ち、式(33)、(34)を用いれば、式(24)、(25)の解  $w_v(0)$ 、 $w_e(0)$  は次式のように簡単に求まる<sup>18),25)</sup>。ここで、 $c$  は円板の半径である。

$$w_v(0) = \frac{w_{0v}(0)}{1 - \frac{p_v \cdot c^2}{4.20 D_v}} \quad (35), \quad w_e(0) = \frac{w_{0e}(0)}{1 - \frac{(p_e - H) \cdot c^2}{4.20 D_e}} \quad (36)$$

式(35)、(36)において、 $p_v = 0$ 、 $p_e = 0$  とおけば、静的解析の場合のたわみ曲面が求まる。また、次のような比をとり、式(11)を代入する。ただし、 $H = D_e \cdot \kappa^2$  である。

$$\gamma_{11} = \frac{w_e(0)}{w_v(0)} = \frac{D_v}{D_e} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2 \cdot c^2}{4.20}} = \frac{D_v}{D_e} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 S_1 S}{n I_2 + I_1} \cdot \beta_{11} \quad (37)$$

ここで、

$$\beta_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2 \cdot c^2}{4.20}} = 1 - \alpha_{11} \quad (38)$$

不完全合成二層板(長方形板、正方形板および円板)の変形は、 $w_v$  と  $w_e$  との代数和で計算される<sup>7)</sup>。従って、たわみ  $w_{ve}$  は

$$w_{ve} = w_v + w_e = w_v \cdot (1 + \gamma_{11}) \quad (39)$$

で求まる。この  $\gamma_{11}$  が不完全合成二層板と考えた場合の増加分であり、完全合成二層板を基準にしている。また、 $w_v$  は完全合成二層板の換算板剛性  $D_v$  に反比例するのは明らかである。

### 7.3 長方形板の場合の座屈解析における $\alpha_{11}$ 、 $\beta_{11}$ 、 $\gamma_{11}$ (ケース3)

式(28)において、分母を零とする  $p_{vx}$  と  $p_{vy}$  の限界値が座屈荷重である。

$$\frac{(p_{vx})_{cr} m^2}{\pi^2 D_v a^2} + \frac{(p_{vy})_{cr} n^2}{\pi^2 D_v b^2} = \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (40)$$

$$p_{vx} = p_{vy} = p_v \text{ の場合, } (p_v)_{cr} = \pi^2 D_v \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (41)$$

また、式(29)において、分母を零とする  $p_{ex}$  と  $p_{ey}$  の限界値が座屈荷重である。

$$\frac{(p_{ex})_{cr} m^2}{\pi^2 D_e a^2} + \frac{(p_{ey})_{cr} n^2}{\pi^2 D_e b^2} = \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{\kappa^2}{\pi^2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (42)$$

$$p_{ex} = p_{ey} = p_e \text{ の場合, } (p_e)_{cr} = \pi^2 D_e \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{\kappa^2}{\pi^2} \right) \quad (43)$$

次のような比をとり、式(11)を代入すれば、

$$\gamma_{11} = \frac{(p_v)_{cr}}{(p_e)_{cr}} = \frac{D_v}{D_e} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 S_1 S}{n I_2 + I_1} \cdot \beta_{11} \quad (44)$$

ここで、

$$\beta_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2}{\pi^2 \mu_{11}^2}} = 1 - \alpha_{11} \quad (45)$$

ここで、

$$\text{長方形板の場合 } \mu_{11}^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \quad \text{正方形板の場合 } \mu_{11}^2 = \frac{2}{a^2} \quad (46)$$

ここで、式(44)、(45)、(46)と式(30)、(31)、(32)を比較してみれば、同一であることがわかる。

#### 7.4 円板の場合の座屈解析における $\alpha_{11}$ 、 $\beta_{11}$ 、 $\gamma_{11}$ (ケース4)

式(35)、(36)において、分母を零とする  $p_v$  と  $p_e$  の限界値が座屈荷重である。これらを求めると

$$p_v = \frac{4.20 D_v}{c^2} \quad (47), \quad p_e = \frac{4.20 D_e}{c^2} + \kappa^2 \cdot D_e \quad (48)$$

次のような比をとり、式(11)を代入すれば、直径  $a=2c$  として

$$\gamma_{11} = \frac{(p_v)_{cr}}{(p_e)_{cr}} = \frac{D_v}{D_e} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 S_1 S}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot \beta_{11} \quad (49)$$

ここで、

$$\beta_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2 \cdot a^2}{16.80}} = 1 - \alpha_{11} \quad \text{円板の場合} \quad (50)$$

ここで、式(49)、(50)と式(37)、(38)を比較してみれば、同一であることがわかる。 $(p_v)_{cr}$  あるいは  $(p_e)_{cr}$  は単位幅あたりの限界圧縮荷重であり、 $D_v$  あるいは  $D_e$  は単位幅あたりの換算板剛性である。限界荷重は  $D_v$  あるいは  $D_e$  に比例することは明らかである。

不完全合成二層板（長方形板、正方形板および円板）の限界荷重  $(p_{ve})_{cr}$  は次式で求まる。

$$\frac{1}{(p_{ve})_{cr}} = \frac{1}{(p_v)_{cr}} + \frac{1}{(p_e)_{cr}} = \frac{1}{(p_v)_{cr}} \left[ 1 + \frac{(p_v)_{cr}}{(p_e)_{cr}} \right] \quad (51)$$

式(44)、(49)の  $\gamma_{11}$  を式(51)の  $(p_{ve})_{cr}$  に代入すれば、

$$\frac{1}{(p_{ve})_{cr}} = \frac{1}{(p_v)_{cr}} (1 + \gamma_{11}) = \frac{1}{(p_v)_{cr}} (1 + \beta_{11} \cdot \frac{I_{12v}}{I_2}) = \frac{1}{(p_v)_{cr}} \frac{I_2 + \beta_{11} \cdot I_{12v}}{I_2} \quad (52)$$

$$\text{ここで、} \quad I_v = I_2 + I_{12v}; I_{12} = I_2 + \frac{I_1}{\bar{n}}; I_{12v} = \frac{A_1 S_1 S}{\bar{n}} \quad (53)$$

式(51)における  $p_v$  および  $p_{ve}$  の“v”および“ve”はそれぞれ完全合成二層板および不完全合成二層板を意味している。以上より、長(正)方形板と円板の合成度  $\alpha_{11}$  は簡単な代数式で表示できることがわかる。一方、不完全合成桁のこれらのパラメータは、式(19)、(20)をフーリエ級数で展開すれば、同様に求めることができる。結果のみを示せば次のとおりである。

$$\alpha_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{\kappa^2 \cdot a^2}} = 1 - \beta_{11} \quad (54)$$

ただし、 $a$  をスパン長とする。

以上をまとめると、長(正)方形板、円板、桁の合成度  $\alpha_{11}$  は次式の定数だけが異なるが、全く同一の式になる。定数は表-1 のようである。

$$\alpha_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\text{定数}}{\kappa^2 \cdot a^2}} = 1 - \beta_{11} \quad (55)$$

表-1 式(55)における定数

	長方形板	正方形板	円板	桁
定数	$(1 + \frac{a^2}{b^2}) \cdot \pi^2$	$2\pi^2$	16.80	$\pi^2$

式(55)と表-1の定数を用いれば、合成度  $\alpha_{11}$  ( $=1-\beta_{11}$ ) を簡単に求めることができる。この定数が小さい方が合成度が大きいことがわかる。この  $\beta_{11}$  に  $D_v/D_e$  を乗ずれば  $\gamma_{11}$  が求まる。次に、完全合成二層板あるいは完全合成桁におけるたわみ ( $w_v$ ) および座屈荷重 ( $(p_v)_{cr}$ ) を求めておく。これらの値は完全合成二層板の単位幅あたりの換算板剛性  $D_v$  を式(11)で求めておきさえすれば、公式集<sup>5)</sup>、設計便覧<sup>25)</sup> やその他の参考書 (例えば文献<sup>18)</sup>) などを利用すれば簡単に求めることができる。次に、 $(1+\gamma_{11})$  を計算する。

従って、不完全合成二層板 (長方形板, 正方形板, 円板あるいは桁) のたわみ  $w_{ve}$  は式(39)より次式で求まる。

$$w_{ve} = w_v \cdot (1 + \gamma_{11}) \quad (56)$$

また、不完全合成二層板 (長方形板, 正方形板, 円板あるいは桁) の座屈荷重  $(p_{ve})_{cr}$  は式(52)より次式で求まる。

$$(p_{ve})_{cr} = (p_v)_{cr} / (1 + \gamma_{11}) \quad (57)$$

## 8. 全周辺単純支持の不完全合成二層板の静的および座屈特性

合成二層板は式(55)で定義される  $\alpha_{11}$  (あるいは  $\beta_{11}$ ) の値によって、大きく次の3つに分類される。

- 1)  $\beta_{11} = 0$ , 即ち,  $\alpha_{11} = 1$ ,  $\gamma_{11} = 0$ , の場合は完全合成二層板。
- 2)  $0 < \beta_{11} < 1$ , 即ち,  $\alpha_{11} = 1 - \beta_{11}$ ,  $\gamma_{11} = \frac{A_1 S_1 S}{\bar{n} I_2 + I_1} \beta_{11}$ , の場合は不完全合成二層板。
- 3)  $\beta_{11} = 1$ , 即ち,  $\alpha_{11} = 0$ ,  $\gamma_{11} = \frac{A_1 S_1 S}{\bar{n} I_2 + I_1}$ , の場合は重ね二層板。

図6は長(正)方形板の場合において、座屈荷重特性を検討するため、縦軸に  $\alpha_{11}$  をとり、横軸に  $\kappa a$  をとり図示したものである。また、長(正)方形板の場合において、より厳密な計算結果を用いて、縦軸に  $\alpha_{11}$  をとり、横軸に  $\kappa a$  をとり図示したものが文献<sup>16),20),22),26)</sup> などに示されている。また、不完全合成桁の場合において、同様に図示したものが文献<sup>16),20)</sup> に示されている。これらを比較してみれば、曲線はほとんど重なることがわかる。このことはフーリエ級数の第一項のみで実用上十分であることを示している。

次に、図6の使い方を説明しよう。最初に、断面諸元を与え、式(5)を用いて  $\kappa$  の値を求め、この  $\kappa$  に辺長“a”を乗ずる。二番目に  $\kappa a$  の値をプロットして図上で  $\alpha_{11}$  を求める。従って、 $\beta_{11} = 1 - \alpha_{11}$  も求めることができる。三番目に  $\gamma_{11}$  を  $A_1 S_1 S / (\bar{n} I_2 + I_1) \cdot \beta_{11}$  で求める。最後に、この  $\gamma_{11}$  を式(56)の  $w_{ve}$  に代入すれば、不完全合成二層板の場合のたわみが求まり、また、式(57)の  $(p_{ve})_{cr}$  に代入すれば、不完全合成二層板の場合の座屈荷重が求まる。もし、これらの図が手元になれば、次に示す手順で解析できる。その手順を数値計算例によって説明しよう。材料は特に指定し

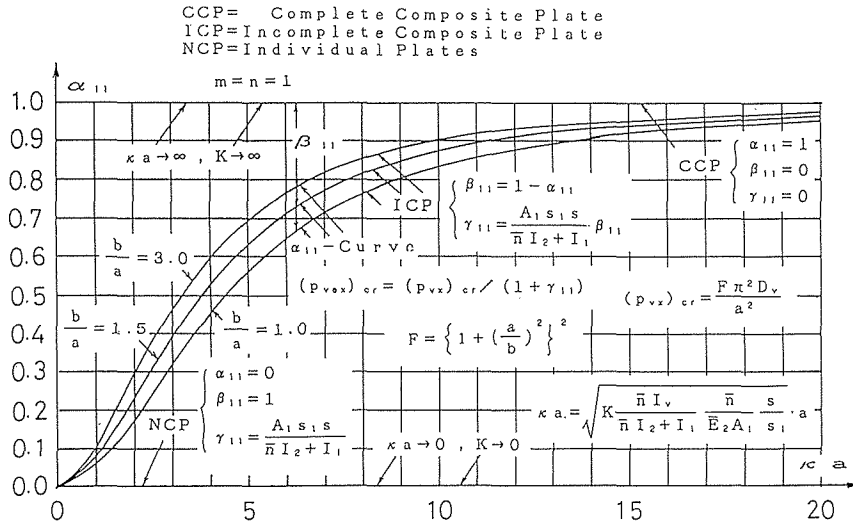


図6 不完全合成二層長方形板の  $\alpha_{11}$  曲線

ない。不完全合成二層板の一般的な諸元は次のようであるとする（図1，2参照）。

円板(直径  $a=3$  m)と比較するために長方形板の大きさは  $a \times b=3$  m  $\times$  3 m の正方形板とする。

$E_1=3.0 \times 10^6$  ton/m<sup>2</sup>,  $E_2=2.1 \times 10^7$  ton/m<sup>2</sup>,  $I_{12}=1.42859 \times 10^{-6}$  m<sup>4</sup>/m,  $I_{12v}=2.49396 \times 10^{-6}$  m<sup>4</sup>/m,  $K=8660$  ton/m/m,  $h_1=0.05$  m,  $h_2=0.006$  m,  $\bar{n}=7.385$ ,  $\nu=0.3$ (仮定),  $\nu_2=0.3$ ,  $\nu_1=0.2$ ,  $s=0.028$  m,  $s_1=0.013155$  m,  $s_2=0.014845$  m,  $A_1=0.05$  m<sup>2</sup>/m,  $A_2=0.006$  m<sup>2</sup>/m,  $A_v=0.0127708$  m<sup>2</sup>/m,  $I_v=3.92255 \times 10^{-6}$  m<sup>4</sup>/m,  $D_v=90.5205$  ton  $\cdot$  m<sup>2</sup>/m。これらの諸元を用いれば、完全合成二層正方形板の場合には式(5)を用いて、 $\kappa=5.69$ /m,  $\kappa a=17.07$  と求まり、次に式(55)と表-1の正方形の場合の定数  $2\pi^2$  を用いて、 $\alpha_{11}=0.9366$ ,  $\beta_{11}=0.0634$ ,  $\gamma_{11}=0.1107$ , および  $(1+\gamma_{11})=1.1107$  と求まる。一方、完全合成二層円板の場合には全く同様にして式(5)を用いて、 $\kappa=5.69$ /m,  $\kappa a=17.07$  と求まり、次に表-1の円板の場合の定数  $16.80$  を用いて、 $\alpha_{11}=0.9455$ ,  $\beta_{11}=0.0545$ ,  $\gamma_{11}=0.0951$ , および  $(1+\gamma_{11})=1.0951$  と求まる。また、前述のように円板の場合の合成度  $\alpha_{11}$  が正方形板の場合の合成  $\alpha_{11}$  よりわずかではあるが大きいことがわかる。完全合成二層正方形板の中央点のたわみは  $p_2=10$  ton/m/m として文献<sup>5)</sup>より  $3.6330$  cm と求まる。従って、不完全合成二層正方形板の中央点のたわみは  $3.6330 \times 1.1107=4.0352$  cm と求まる。完全合成二層円板の中央点のたわみは  $p_2=10$  ton/m/m として文献<sup>5)</sup>より  $3.5626$  cm と求まる。従って、不完全合成二層円板の中央点のたわみは  $3.5626 \times 1.0951=3.9014$  cm と求まる。また、完全合成二層正方形板の座屈荷重は文献<sup>18)</sup>より  $198.53$  ton/m と求まる。従って、不完全合成二層正方形板の座屈荷重は  $198.53/1.1107=178.74$  ton/m と求まる。完全合成二層円板の座屈荷重は文献<sup>18)</sup>より  $168.97$  ton/m と求まる。従って、不完全合成二層円板の座屈荷重は  $168.97/1.0951=154.30$  ton/m と求まる。

以上の数値計算例からもわかるように、電卓と公式集があれば簡単に計算できる本提案の方法は実用上のたわみおよび座屈荷重を求める場合に非常に便利であり、静的解析および座屈解析を系統的にできることを示している。

## 9. あとがき

本研究で得られた結論は次の通りである。

- (1) 論文は不完全合成二層板（接着剤の弾性変形を考慮した二層板）の合成度を求め、静的解析および座屈解析を合成度を用いて系統的に行う手法を示したものである。
- (2) 本論文は全周辺単純支持の長(正)方形板および円板の静的解析および座屈解析を系統的に行うために  $\alpha_{11}$ ,  $\beta_{11}$ ,  $\gamma_{11}$  なる無次元量を導入し、完全合成二層板、不完全合成二層板、重ね二層板のたわみおよび座屈荷重の相互関係を明らかにした。

$\beta_{11}=0$ , 即ち,  $\alpha_{11}=1$ ,  $\gamma_{11}=0$ , の場合は完全合成二層板である。

$0 < \beta_{11} < 1$ , 即ち,  $\alpha_{11}=1-\beta_{11}$ ,  $\gamma_{11}=\frac{A_1 S_1 S}{\bar{n}I_2+I_1}\beta_{11}$ , の場合は不完全合成二層板。

$\beta_{11}=1$ , 即ち,  $\alpha_{11}=0$ ,  $\gamma_{11}=\frac{A_1 S_1 S}{\bar{n}I_2+I_1}$ , の場合は重ね二層板。

ここで,  $\alpha_{11}$  は合成二層板の合成度を意味し,  $\beta_{11}=1-\alpha_{11}$  を意味し,  $\gamma_{11}$  は完全合成二層板を基準にした場合の増加分を意味している。

- (3) 上述の  $\alpha_{11}$ ,  $\beta_{11}$ ,  $\gamma_{11}$  なる無次元量を用いれば, 長(正)方形板, 円板, 桁の合成度は次式で示すような定数だけが異なる全く同一な簡単な代数式で表示できることが判明した。定数は表-1 のようである。

$$\alpha_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\text{定数}}{\kappa^2 \cdot a^2}} = 1 - \beta_{11}$$

また, この表における定数が小さい方が合成度が大きいことが判明した。例えば, 円板は正方形板より合成度が大きい。他の例として, 文献<sup>20)</sup>の図5と図6を比較してみれば, 図5(不完全合成桁の合成度  $\alpha_{11}$  を意味している)の  $\alpha$  曲線が図6の  $\alpha$  曲線の上方に位置することはこの事項を意味している。ただし, 不完全合成桁の場合は  $a$  はスパン長とする。更に, これらのパラメータは静的解析および座屈解析で同一であることも判明した。

- (4) 文献<sup>20), 22), 23), 24)</sup>などに図示されている桁および長(正)方形板の  $\alpha$  曲線(フーリエ級数の有限項の和の比をとる)は本論文の式(55)(フーリエ級数の第一項のみをとる)で求めたものとほとんど重なる。換言すれば文献に図示されている  $\alpha$  曲線は本論文の式(55)を図化したものであると解釈できる。たわみおよび座屈荷重は式(56)および式(57)で求めることができるので, 計算は電卓と公式集<sup>5)</sup>あるいは設計便覧<sup>25)</sup>などがあれば十分可能である。

## 謝 辞

本論文の作成にあたり, 北海道大学渡辺昇名誉教授から御指導と有益な助言を頂いたことに対し心より感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) 土木学会編：鋼・コンクリート合成構造の設計ガイドライン, 1989.
- 2) Newmark, N. M., Siess, C. P., and Viest, I. M.: Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Analysis, Vol. 9, No. 1,

- pp. 75-93, 1951.
- 3) 山本 稔：不完全合成桁の曲げ理論，土木学会論文集，No. 67，pp. 1-10，1960年3月。
  - 4) 橋 善雄，足立義雄：不完全合成桁について，土木学会論文集，No. 112，pp. 11-19，1964年12月。
  - 5) 構造力学公式集，土木学会編，1986。
  - 6) A. ハウラネック／O. シュタインハルト：鋼橋の理論と計算(橋 善雄，小松定夫共訳)，山海堂，1965。
  - 7) 島田静雄，熊沢周明：合成桁の理論と設計，山海堂，1973。
  - 8) 浜田純夫，有住康則：不完全連続合成桁の有限要素解析，土木学会論文報告集，第265号，pp. 1-9，1977年9月。
  - 9) 小松定夫，佐々木孝：不完全合成桁の理論と近似計算法について，土木学会論文報告集，第329号，pp. 27-37，1983年1月。
  - 10) 中井 博編：プレキャスト床版合成桁橋の設計・施工，森北出版，1988。
  - 11) 佐藤浩一，渡辺 昇：差分方程式の剛性マトリックス解析法について，土木学会北海道支部論文報告集，第44号，pp. 87-92，1988。
  - 12) 井上稔康，佐藤浩一，渡辺 昇：不完全合成桁の差分剛性マトリックス解析法について，構造工学論文集 Vol. 36 A，pp. 1223-1236，1990。
  - 13) 渡辺 昇，井上稔康：CS橋の開発的研究—鉛直突起板の設計について，鋼パネル板のリップの設計について—，土木学会北海道支部論文報告集，第43号，pp. 31-36，pp. 37-42，1987。
  - 14) J. L. Clarke and C. T. Morley: Steel-Concrete Composite Plates with Flexible Shear Connectors, Proc. Inst. Civ. Engrs, Vol. 53, Part 2, pp. 557-568, Dec., 1972.
  - 15) K. S. Pister and S. B. Dong: Elastic Bending of Layered Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 85(4), pp. 1-10, 1959.
  - 16) 佐藤浩一，渡辺 昇，井上稔康：不完全合成桁と合成板の解析理論の相似性について，土木学会北海道支部論文報告集，第45号，pp. 55-60，1989。
  - 17) 佐藤浩一，渡辺 昇，井上稔康：不完全合成板の解析理論の比較について，土木学会第44回年次学術講演会，pp. 288-289，1989。
  - 18) S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1970.
  - 19) Rudolph Szilard: Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
  - 20) 井上稔康，佐藤浩一，渡辺 昇：不完全合成板の解析について，構造工学論文集 Vol. 36 A，pp. 1245-1258，1990。
  - 21) S. P. Timoshenko and J. M. Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1961.
  - 22) Koichi SATO: Composite Plates of Concrete Slabs and Steel Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 117(12), pp. 2788-2803, 1991.
  - 23) Koichi SATO: Elastic Buckling of Incomplete Composite Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 118(1), pp. 1-19, 1992.
  - 24) 佐藤浩一：接着剤の弾性変形を考慮した等方性二層板の弾性座屈荷重について，構造工学論文集 Vol. 38 A，pp. 1309-1320，1992。
  - 25) 関谷 壮，浜田 実，角 誠之助編：平板構造強度設計便覧，朝倉書店，1982。
  - 26) 佐藤浩一：不完全合成板の簡易計算法について，土木学会第47回年次学術講演会講演概要集，pp. 332-333，1992。
  - 27) 山口惣也，浜田純夫，高海克彦：不完全合成板の有限要素解析，土木学会第47回年次学術講演会講演概要集，pp. 330-331，1992。
  - 28) 中井 博，杉山 功，広瀬鉄夫，山本晃久：トラス型ジベルを用いた合成床版の耐荷力試験，土木学

会第 45 回年次学術講演会講演概要集, pp. 576-577, 1990.

- 29) 佐藤浩一：等方性不完全二層板の座屈荷重について，北海道大学工学部研究報告，第 158 号，pp. 13-25, 1992.