北海道大学工学部研究報告
第167号（平成6年）

Bulletin of the Faculty of Engineering
Hokkaido University, No. 167 (1994)

非線形系の近似モデル追従制御

横道　政裕[1]　　上田　忠一[2]
石動　義久[1]　　島　　公脩[1]

（平成5年8月31日受理）

Approximate model following control for nonlinear systems

M. YOKOMICHI[1] T. UEDA[2] Y. ISURUGI[1] and M. SHIMA[1]

(Received August 31, 1993)

Abstract

In this paper, an approximate model following control of SISO nonlinear systems which are fail to have relative order is considered. For such systems, the model following control law proposed by Isurugi and Shina. can not be used. Thus the authors apply the approximate input-output linearization approach which is studied by Hauser *et. al.* to model following control problem. If the plant satisfies some conditions, it is possible that the output of the plant follows that of the model with small error.

1．はじめに

非線形常微分方程式によって記述される制御系の構造解析や制御則の設計に関して，微分幾何学的アプローチと呼ばれる手法は1960年代後半より研究が行われ，Controlled invariance や相対次数(relative order)，zero dynamics 等の概念を用いて無干渉化や，線形化等に対する成果が得られている。特にアフィン非線形制御系と呼ばれるクラスの制御系でいくつかの正則性を持つ系に対しては相対次数が定義可能であり，適当な非線形座標変換（微分幾何学的には微分同相写像である）を施すことによってある種の標準形(normal form)に変換可能であり，その標準形を用いることによって，制御系の構造解析や制御則の導出が容易になる。

また，非線形系に対して制御則を導出する別の方法として状態方程式の線形近似式を求め，得られた線形系に対して線形制御理論を用いた制御則を用いるものがある。状態空間上の十分狭い領域上でしか制御目的が達成できないという難点はあるが，得られる制御則も線形であることから，制御則の構造が複雑ではないという利点がある。

また，最近の研究によって非線形系の近似にはもう一つの利点があることが知られてきている。それは特異点の問題である。

1入出力系の場合，相対次数は制御対象の出力関数を適当な回数時間微分することによって得られる，ある（局所的に）非零関数の存在によって定義される。しかしながら得られた関数が，

1　精密工学科　自動制御工学講座（情報工学科協力講座）
2　オムロン㈱（精密工学専攻　修士課程　平成5年卒業）

恒等的には零ではないが，注目する動作点において零になる場合も存在する。本論文ではその様な系を特異点(singular point)を持つ系と呼ぶ。その様な系に対して微分幾何学的アプローチを用いて制御則を構成しようとすると，上記の関数を分母にすることになり，系の状態が特異点上にあると分母が零になってしまう。

例えば，梁を回転させてその上の球の運動を制御する場合，梁の回転軸が特異点となることは文献[2]によって示されている。そのような特異点をもつ系の制御に関する研究は，これまでには出力トラッキング制御に対してなされている。Hirschorn らは，特異性の次数(degree of singularity)という概念を提案し，特異点近傍での入力の連続性に関する研究を行っている。それに対して Hauser らは，制御対象の状態方程式，そして出力をうまく近似し，その近似系に対して制御則を設計することによって，追従誤差をある範囲に抑えることが可能であることを示した。また，この制御問題は近似トラッキング制御と呼ばれる。

本論文では，この手法を特異点を持つ系のモデル追従制御問題に適用することを試みる。モデル追従制御とは，制御対象に求める動特性を別の制御系である規範モデルとして表現し，制御対象の出力をモデルのそれに追従させることを目的とした制御問題であり，さらに出力誤差の挙動にはモデルの入力が影響を与えないことも要求される。制御対象，モデルともに相対次数が定義可能な場合には石動らによってその可解条件が得られている。本論文では近似トラッキングが可能な制御対象は，局所有界なモデルに対してもその追従誤差をある範囲に抑えることが可能であることを示す。

2．問題設定

本稿では特に指定のない場合，次式の常微分方程式系で表現される 1 入力 1 出力非線形制御系を対象とする。

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{1}$$

$$y = h(x) \tag{2}$$

ここで制御対象の状態xは，$\Re^n$の，動作点$x=0$を含むある開近傍 V 上の点であると仮定する。ただし$f(0)=0, h(0)=0$であるとする。また，$u\in\Re, y\in\Re$であり，各写像はC^∞級であると仮定する。さらに追従させたい規範モデルとして，以下の式のような非線形制御系が与えられているものとする。

$$\dot{x}_M = f_M(x_M) + g_M(x_M)u_M \tag{3}$$

$$y_M = h_M(x_M) \tag{4}$$

ここで$x_M\in V_M\subset\Re^{n_M}$で，$u_M\in\Re, y_M\in\Re$であるとする。また，各写像は$C^\infty$級であるものと仮定する。

さらに，規範モデルと制御対象との出力誤差はそれぞれの差を用いる。つまり

$$e(t) := h(x(t)) - h_M(x_M(t)) \tag{5}$$

である。

このとき，静的状態フィードバックを用いた**非線形モデル追従制御問題**(NMFCP)は以下のように定義される。

定義 2.1 制御対象(1)とモデル(3)が与えられ，それぞれの動作点x_{p0}，x_{M0}が与えられたとき，以下の条件を満足する動作点の近傍 U, U_M と，その上で定義されたフィードバック $u=\psi(x_p, x_M, u_M)$ が存在するとき，この制御対象とモデルに対して NMFCP は可解であると呼ばれる。

(A1)：モデルの入力に対して，出力誤差は不変である。つまり任意の二つの許容入力 $u_{M1}(t), u_{M2}(t)$に対して

$$e(t; x_p(0), x(0), u_{M1}(t)) = e(t; x_p(0), x(0), u_{M2}(t)), \ \forall t \geq 0$$

が成立する。

(A2)：誤差は零に漸近的に収束する。つまり

$$\forall (x_p(0), x_M(0)) \in U \times U_M ; \lim_{t\to\infty} e(t) = 0$$

が成立する。

□

石動，島による局所モデル追従制御問題の可解条件を説明する前に，非線形制御系の微分幾何学的解析における重要な概念である**相対次数**(relative order)の定義をしておく。

定義 2.2 1入力1出力非線形制御系(1), (2)に対して，

$$\begin{cases} L_g L_f^{k-1} h(x) = 0, & k=1, \ldots, \rho-1 \\ L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0, \end{cases}$$

となるような自然数 ρ が U 上で定義されるとき，この系は相対次数 ρ を持つと呼ばれる。 □

この相対次数は，系の出力を何回時間微分すると入力が陽に現れるかを表す量であり，線形系におけるもの（伝達関数の次数差として定義される）を非線形系に拡張したものと考えることもできる。

制御対象とモデルの両方に相対次数を定義可能である場合，局所非線形モデル追従制御問題の可解条件は以下のようになる。

定理 2.1 [3]制御対象，モデル，そして誤差(1), (2), (3), (4), (5)に対して，制御対象の相対次数 ρ，モデルの相対次数 ν がそれぞれ定義されているものとする。このとき局所非線形モデル追従制御が可能であるための必要十分条件は，

$$\rho \leq \nu \tag{6}$$

である。このとき制御則は

$$u(x, x_M, u_M) = \frac{-L_f^\rho h(x) + L_{fM+gM\,uM}^\rho h_M(x_M, u_M) + v}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} \tag{7}$$
$$v = \phi(e, e^{(1)}, \cdots, e^{(\rho)})$$

として与えられる。ここで ϕ は線形系 $e^{(\rho)} = v$ を漸近安定化するフィードバック則であり，通常は線形フィードバックが用いられる。 □

この定理の内容は，制御対象とモデルを標準形(normal form)に変換することによって容易に理解される。非線形制御系(1), (2)に対して相対次数 ρ が定義されていると，動作点 $x=0$ の近傍においてある局所座標系 $(z^1, \cdots, z^\rho, \xi)$ が存在し，系は以下のように表現される。

$$z^1 := h(x)$$
$$\dot{z}^1 = z^2 \tag{8}$$
$$\vdots \tag{9}$$
$$\dot{z}^\rho = \alpha(z, \xi) + \beta(z, \xi) u$$
$$\dot{\xi} = \eta_0(\xi) + \eta_1(z, \xi) \tag{10}$$

上式において

$$z := (z^1, \ldots, z^\rho)$$

であり $z^i := L_f^{i-1} h(x)$ である。ただし $L_f h(x)$ は関数 $h(x)$ の接ベクトル場 $_f(x)$ に沿った Lie 微分であり，

$$L_f h(x) := \sum_{i-1}^{n} f^i(x) \frac{\partial h}{\partial x^i}(x)$$

によって局所的に定義される。また，ξ は制御系の内部の状態量であり，n$-\rho$ 次元である。さらに $\eta_1(0, \xi) = 0$ と仮定すると，ダイナミクス $\dot{\xi} = \eta_0(\xi)$ は出力が恒等的に零であるときの系の内部の挙動を支配するものとなる。これはゼロダイナミクス(zero dynamics)と呼ばれる。モデル(3), (4)に対しても同様に標準形を構成することが可能であり，さらに直積空間 $V \times V_M$ 上の座標変換

$$(z^1, \ldots, z^\rho, \xi, x_M) \rightarrow (e^1, \ldots, e^\rho, \xi, x_M)$$

を施すことによって，定理の条件の下での制御対象とモデルとの合成系は次式のように記述される。

$$e^1 := h(x) - h_M(x_M) \tag{11}$$
$$\dot{e}^1 = z^2 - L_{f_M} h_M =: e^2$$
$$\vdots \tag{12}$$
$$\dot{e}^\rho = \alpha(e + z_M, \xi) + \beta(e + z_M, \xi) u - L_{f_M + g_M u_M} h_M$$
$$\dot{\xi} = \eta_0(\xi) + \eta_1(e + z_M, \xi)$$
$$\dot{x}_M = f_M(x_M) + g_M(x_M) u_M \tag{13}$$

ただし e, z_M は z と同様にして定義されるものである。そこで $e^{(i)} = e^{i+1}$ であることを考慮し，定理における制御則(7)を用いると閉ループ系は

$$\dot{e} = \phi(e)$$
$$\dot{\xi} = \eta_0(\xi) + \eta_1(e + z_M, \xi)$$
$$\dot{x}_M = f_M(x_M) + g_M(x_M) u_M$$

のようになり，誤差はモデルの入力の影響を受けることなく零に収束することがわかる。

この定理の結果を拡張することを考えた場合，いくつかの問題点があるが，その中には特異点の問題がある。定理2.1における制御則(7)は，相対次数の存在性に大きく依存する。しかしながら

実際には何らかの特異性のために相対次数を定義することが不可能な制御対象も存在する。そのような系に対しては，どのような制御が可能であるのか。特に関数 $\beta(z, \xi)$ が原点近傍で恒等的には零にならないけれども $\beta(0,0)=0$ となる場合がある。このとき制御則(7)を用いることは不可能となる。しかしこのような特異点を持つ系のモデル追従制御問題に対して，Hauser 等が同様な制御対象に対する漸近トラッキング問題に対して用いた手法が有効であることを次節以降で示す。

3．ロバスト相対次数と近似トラッキング

本節では，Hauser 等による，前節で定義した相対次数の概念を拡張したロバスト相対次数の概念を紹介し，それを用いた非線形近似トラッキング制御について，その概略を紹介する。

3．1 ロバスト相対次数

制御対象(1), (2)を考える。ここで，動作点$x=0 \in V \subset \Re^n$の近傍において相対次数が定義されない状況として以下の場合が考えられる。

出力を何度時間微分しても入力が陽に現れない場合：この場合，自然数 $k \leq n$ で，以下の性質を持つものが存在する。

$$
\begin{aligned}
L_g L_f^p h(x) &\equiv 0, \quad \forall 0 \leq p \leq p-1. \\
d(L_f^k h)(x) &\in \mathrm{span}\,\{dh, \cdots, d(L_f^{p-1}h)\}(x)
\end{aligned}
$$

この場合は入力によって出力を制御する事は不可能である。以降はこの場合は考えないことにする。

$L_g L_f^{\rho-1} h(0)=0$ の場合：つまり関数 $L_g L_f^{\rho-1} h(x)$ は恒等的に零にはならないが，動作点において零になってしまう場合である。このときは前節の議論から制御則として(7)を用いる事は出来ないことがわかる。

このような特異点の存在する系であっても，ある適当な座標系をとって線形近似をすると，その近似系が相対次数を持つこともある。

例３．１以下のような制御系を考える。

$$
\begin{aligned}
y &= x_1 + (x_2)^2 =: h(x) \\
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= (x_1)^3 - 3x_2 + u
\end{aligned}
$$

この系において

$$
f(x) := (x_2, (x_1)^3 - 3x_2)^T, \quad g(x) := (0, 1)^T
$$

である。相対次数を実際に計算してみると

$$
L_g h(x) = 2x_2
$$

であるので恒等的に零ではないが，x_1軸（原点を含む）上で零になることがわかる。そこでこの系を，原点近傍で，$\boldsymbol{x} := (x_1, x_2)$ 座標系を用いて線形近似を行うと，以下の系が得られる。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}x+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u$$
$$y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}x$$

実際に計算をしてみると，この線形近似系の相対次数は2であることがわかる。 □

では文献[2]に従ってロバスト相対次数の定義を行う。

定義 3.1 [2] 1入出力非線形制御系(1), (2)が，動作点$x=0$においてロバスト相対次数γを持つとは，以下の関係を満足する滑らかな関数$\phi_i(x), i=1, \cdots, \gamma$が存在することを意味する。

$$\begin{aligned} h(x) &= \phi_1(x)+\Psi_0(x,u) \\ L_{f+gu}\phi_i(x) &= \phi_{i+1}(x)\Psi_i(x,u), \quad i=1, \ \cdots, \ \gamma-1 \\ L_{f+gu}\phi_\gamma &= a(x)+b(x)u+\Psi_\gamma(x,u) \end{aligned} \tag{14}$$

ここで$\gamma+1$個の関数$\Psi_i(x,u), i=0, \ \cdots, \ \gamma$は，$O(x,u)^2$であり，$b(0)\neq 0$である。 □

ロバスト相対次数γが定義可能な系において，$\Psi_0, \cdots, \Psi_\gamma$のオーダーのうち最も小さいものを$\tau$とすると，この系は$\tau$**次(近似)入出力線形化可能な系**であると呼ばれる。さらに$\gamma=n$の場合は，τ次状態線形化可能な系と呼ばれる。

ロバスト相対次数は，もし定義可能であるのなら一意に定まり，その導出方法に関しては文献[2]において以下の結果が得られている。

命題 3.1 [2] 非線形制御系(1), (2)に対して，ロバスト相対次数と，線形近似系の相対次数の両方が定義可能であれば，それらは等しい。 □

注意 3.1 ロバスト相対次数という用語における「ロバスト」は，以下の性質による。状態方程式に不確定な部分を持つ制御系

$$\dot{x}=f(x)+g(x)u+\Delta F(x,u) \tag{15}$$
$$y=h(x)+\Delta H(x) \tag{16}$$

を考える。ここで接ベクトル場$\Delta F(x,u)$，関数$\Delta H(x)$がそれぞれ不確定な部分を表し，既知ではないとする。このとき，ノミナルな制御対象

$$\dot{x}=f(x)+g(x)u$$
$$y=h(x)$$

がロバスト相対次数γのもとでτ次入出力線形化可能であれば，不確定な部分が$O(x,u)^\tau$である場合は，不確定な部分を含んだ系のロバスト相対次数は不変である。 □

ロバスト相対次数を定義可能な系において，直感的には高次の項のオーダーτが大きければ大きいほど，その項を無視した系と元の系とのずれは小さくなると考えられる。しかしながら与えられた制御系の数式モデルから最大のτをアルゴリズム的に求めることは容易ではない。また，

高次の項 Ψ は一意には得られずその選択にかなりの自由度が存在する。そこで非零の Ψ の数を極力少なくするように $\phi(x)$ を選択することになる。

3.2 近似トラッキング制御

制御対象(1), (2)に対してロバスト相対次数 γ が定義可能である場合，動作点$x=0\in\Re^n$の近傍における適当な座標変換によって，この系は次式のような近似標準形に変換される。

$$\begin{aligned} \xi_1 &:= \phi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= \phi_2 + \Psi_1(x,u) =: \xi_2 + \Psi_1 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{\gamma-1} &= \phi_\gamma + \Psi_\gamma(x,u) =: \xi_\gamma + \Psi_{r-1} \\ \dot{\xi}_\gamma &= a(\xi,\theta) + b(\xi,\theta)u + \Psi_r(x,u) \\ \dot{\theta} &= q(\xi,\theta) \\ y &= \xi_1 + \Psi_0(x,u) \end{aligned} \tag{17}$$

上式において，$\theta\in\Re^{n-\gamma}$である。さらにダイナミクス $\dot{\theta}=q(0,\theta)$ は，この系の近似系のゼロダイナミクスであり，以降は**近似ゼロダイナミクス**と呼ぶことにする。

では制御対象の出力をある信号に追従させるトラッキング制御を考える。追従させる信号は外部系

$$\dot{w}=s(w),\ w(0)=w_0 \tag{18}$$

の出力 $k(w)$ として表現されるものを考え，追従誤差はそれらの差を用いる。ただし各写像は C^∞ 級であると仮定する。このとき制御対象(1), (2)に対して相対次数が定義される場合は局所的に誤差を零に収束させることは可能であり，さらに $s(w(t))$ とその ρ 階までの時間微分が有界であってゼロダイナミクスが指数漸近安定である場合は，全系の局所有界性が保証される。それに対してロバスト相対次数が定義可能な系に対しては以下の結果が得られている。

命題 3.2 [2] 制御対象(1)(2)はロバスト相対次数 γ を持ち，さらに動作点の近傍 U_ϵ, $\epsilon>0$ で，性質

- $\forall\ \delta<\epsilon\,;\,U_\delta\subset U_\epsilon$.
- $\sup\ \{\delta : B_\delta\subset U_\epsilon\}=\epsilon$. ただし B_δ は原点を中心とする半径 δ の（超）球面。
- U_ϵ 上で近似ゼロダイナミクスは指数漸近安定で，ベクトル場 $q(\xi,\theta)$ は Lipschitz 連続である。
- 適当な正数 σ と各関数 $\Psi_i(x,u)$ に対して ϵ の単調増加関数 $K_i(\epsilon)$ で，$(0,0)\in\Re^n\times\Re$ の近傍 $U_\epsilon\times B_\sigma$ 上で

$$|\Psi_i(x,u)|\le\epsilon K_i(\epsilon)\,[\,|x|+|u|\,] \tag{19}$$

となるものが存在する。

をもつものが存在すると仮定する。このとき十分小さい ϵ と，十分小さい $k(w(t))$ とその γ 階までの時間微分に対して，制御対象の状態は局所有界であり，追従誤差を $O(\epsilon)$ にすることが可能である。 □

上記の命題によって，相対次数が定義不可能な系に対しても，ロバスト相対次数が定義可能で

あれば誤差をある程度までおさえることが可能である。そこで次節ではこの結果をモデル追従制御問題に適用することを考える。

4．近似モデル追従制御

本節では制御対象(1)，(2)，モデル(3)，(4)，そして追従誤差(5)を考える。ただしモデルは相対次数 ν を持つものとする。このとき，以下の定理が得られる。

定理 4.1 制御対象(1)，(2)は，ロバスト相対次数 γ のもとで近似標準形(17)に変換可能であり，モデルは局所 BIBS であるものとする。さらに命題3.2と同様な性質を持つ動作点の近傍 U_ϵ が存在すると仮定する。このとき，

$$\gamma \leq \nu \tag{20}$$

ならば，制御則として

$$\begin{aligned} u &= \frac{-a(\xi,\theta) + L^{\gamma}_{fM+gM\ uM} h_M(x_M) + v}{b(\xi,\theta)} \\ v &= \alpha_\gamma(\xi_\gamma - L^{\gamma-1}_{fM}\ h_M(x_M)) + \cdots + \alpha_1(\xi_1 - L_{fM}\, h_M(x_M)) \end{aligned} \tag{21}$$

を用いることによって，十分に小さい ϵ に対して，誤差を $O(\epsilon)$ とし，制御対象の状態を局所有界にすることが可能である。ただし $\gamma + \alpha_\gamma s^{\gamma-1} + \cdots + \alpha_1$ は Hurwitz 多項式である。　□

この定理の証明は基本的には命題3.2と同様である。

証明：近似追従誤差を

$$[e^1_a, \cdots, e^r_a] := [\xi_1 - h_M, \cdots, \xi_r - L_{gM} L^{r-1}_{fM}\ h_M]$$

と定義する。このとき制御則(21)のもとで制御対象は次式のようになる。

$$\dot{e}_a = Ae_a + \Psi(x, u(x, x_M, u_M)) \tag{22}$$

$$\dot{\theta} = q(\xi, \theta) \tag{23}$$

ここで行列 A の固有値の実部は全て負である。この系において制御則 u は u_M について線形であり，Ψ は u についてたかだか１次の項しか含まないことを考慮すると $x_M=0$，$u_M=0$ を代入した系は局所指数漸近安定となる。よってこの系は十分小さな u_M, x_M に対して局所 BIBS となるので e, ξ (当然 x) は局所有界となる。さらに入力 u も有界となる。このときの ϵ_1, x の上限を M, L とする。真の出力誤差を $e^1_T = h(x) - h_M(x_M)$ とすると，

$$\begin{aligned} |e^1_T| &= |e^1_a + \Psi_1(x,u)| \\ &\leq |e^1_a| + |\Psi_1(x,u)| \\ &\leq M + \epsilon K(\epsilon)[|x| + |u|] \end{aligned}$$

であるので $O(\epsilon)$ である。　**証明終り**

注意 4.1 上記の閉ループ系はモデルの入力の影響を，$\gamma=\nu$ の場合には直接，$\gamma<\nu$ の場合には間接的に受けてしまう。そのため厳密な意味でのモデル追従制御の定義は満足されないが，この閉ループ系はモデルの入力に対して局所 BIBS であるため，初期誤差が十分に小さい範囲において

はその影響も小さくなる。 □

5. おわりに

本論文では，相対次数が定義不可能な1入出力非線形制御系に対する近似モデル追従制御問題を考えた。得られた結果は，近似トラッキング問題の自然な拡張であることがわかる。文献[5]においてはモデル追従制御と出力レギュレーション問題との関係が指摘されている。出力レギュレーション問題に対しては制御対象の指数漸近安定化可能性と誤差ゼロ多様体の存在がその可解条件となっており，誤差ゼロ多様体の近似に基づく近似解法も研究されている[1,6]。その結果と，今回得られた近似モデル追従制御問題との関係を明らかにすることは今後の課題であり，また多入出力系への拡張も必要であろう。

参考論文

1) A. Isidori: Nonlinear control systems, second edition ; Springer-Verlag (1989)
2) J. Hauser, S. Sastry and P. Kokotovic : Nonlinear control via approximate input-output linerization : the ball and beam example ; IEEE Transactions on automatic control, Vol. 37, no. 3 392-398 (1992)
3) 石動，島：Invarianceの理論とその応用-VIII. モデル追従制御；システムと制御，vol. 29, No. 5, 259-267 (1985)
4) R. M. Hirschorn, J. H. Davis: global output tracking for nonlinear systems; SIAM J. control and optimization, Vol. 26, No. 6 1321-1330 (1988)
5) 上田：非線形almostモデル追従制御；平成4年度北海道大学大学院工学研究科精密工学専攻修士論文(1993)
6) 上田，島：非線形出力レギュレーションの近似について；第15回DSTシンポジウム予稿集，253-256(1992)