北海道大学工学部研究報告
第167号（平成6年）

Bulletin of the Faculty of Engineering
Hokkaido University, No. 167 (1994)

層状の再帰性発見によるプログラムの推論

石野　明　山本　章博
（平成5年8月31日受理）

Inference of Programs by Stratifying Recursion

Akira ISHINO and Akihiro YAMAMOTO
(Received August 31, 1993)

Abstract

This paper describes a procedure which learns functions represented by a class of Scheme programs, called stratified recursive programs. It accepts examples as inputs and outputs stratified recursive programs as conjectures. It is a data-driven procedure and does not use any enumeration. It is based on the method 'THESYS' that was shown by Summers, but includes the power of generating intermediate new functions by computing differences of program fragments.

1．はじめに

本稿では，Scheme関数の例からの推論を議論する。その手法はSummers[8,9]の手法THESYSに基づいているが，THESYSでは推論できない再帰的な中間関数を用いる関数の推論を行なうことができる。その関数は，層状再帰プログラムというクラスのプログラムによって表現される。THESYSに基づく推論方式としてはLing[5]によって示されたPRIME IIが知られている。しかし，PRIME IIの手法では中間関数をただひとつ含む関数を推論することしかできない。本稿の手法では中間関数の個数に制限がない。

本稿では最初に層状再帰プログラムを定義し，その性質を示す。次に，その性質に基づいて例の与え方を示す。推論手続きは例をひとつずつ受けとり，それまでの例を説明する仮説を生成する。個々の例は，典型的でなければならない。また，例は線形列かつ鎖であるように順に与えなければならない。すると推論手続きは，個々の例を説明するフラグメントと，それまで与えられた例の列を分離する条件式の列を構成し，フラグメントの列と条件式の列の階差を求めることで，層状の再帰的構造を発見し，層状再帰プログラムの構成を行なう。

2．準　　備

本稿では，関数の表現方法として，Schemeに似た言語を用いる。これを**basic Scheme**と呼ぶ。以下にbasic Schemeを定義する。

電気工学科　応用制御工学講座

定義．A，F，V を互いに素な空でない可算集合とし，それぞれの要素を**定数**，**関数記号**，**変数**という。補助記号として，.(dot)，[,]，；，←，→，ω，χ，λ を用いる。A は ()，#t，#f を含む。F は，**初期関数**と呼ばれる特別な関数記号 car，cdr，cons，atom ? を含む。関数記号 f に対して $arity(f)$ で表される自然数が定まっている。

定義．S を集合とする。S に含まれない記号.(dot)を用いて，$D(S)$ を次のように再帰的に定義する。

1．$\alpha \in S$ ならば $\alpha \in D(S)$．
2．α，$\beta \in D(S)$ ならば $(\alpha . \beta) \in D(S)$．

定義．$S = D(A)$ の要素を **S 式**という。

定義．**式**を次のように再帰的に定義する。

1．S 式と変数は式である。
2．関数記号 f （$arity(f) = n$） と式 E_1，…，E_n に対して，$f[E_1 ; \cdots ; E_n]$ は式である。
3．式 P_1，…，P_n および F_1，…，F_n に対して，$[P_1 \rightarrow F_1 ; \cdots ; P_n \rightarrow F_n]$ は式である。

式 E を構成していく過程で作られる式を E の**部分式**という。変数 x_1，…，x_n だけを含む式を $E[x_1 ; \cdots ; x_n]$ と表し，混乱が生じなければ $E[\vec{x}]$ とも表す。式 E の部分式 E' を式 G で置き換えた式を $E[G \Leftarrow E']$ と表す。

定義．初期関数でない関数記号 f （$arity(f) = n$） と式 $E[x_1 ; \cdots ; x_n]$ との組 $\langle f, E[\vec{x}] \rangle$ を関数 $f[\vec{x}]$ の**定義**といい，$f[\vec{x}] \leftarrow E[\vec{x}]$ と表す。$E[\vec{x}]$ を $f[\vec{x}]$ の**本体**という。

定義．関数の定義の有限集合 P で以下の 2 条件を満たすものを**プログラム**という。

1．$f \leftarrow E \in P$ かつ $f \leftarrow F \in P$ ならば $E = F$.
2．f が P のある関数の定義の本体に出現するならば $f \leftarrow E \in P$.

式 E に対して $E \Rightarrow E'$ となる式 E' を求めることを，式を**評価する**という。関数 car，cdr，cons および式の評価⇒は Scheme と同様にして，最左一値呼出しで行なわれる[7]。関数 atom ?$[\alpha]$ （$\alpha \in S$）は，$\alpha \in A$ のとき#t，それ以外のときは#f と評価する。$[P_1 \rightarrow F_1 ; \cdots ; P_n \rightarrow F_n]$ の評価は文献[6]による。**関係**$\Rightarrow^*$を関係⇒の反射的推移閉包とする。$E \Rightarrow^* \alpha$ $(\alpha \in S)$ となる α が存在するとき，α を式 E の**値**という。

定義．car，cdr，()および変数だけからなる式を**分解式**という。分解式全体の集合を T と表す。

定義．U を次のように再帰的に定義する。

1．$E = ()$ ならば，$E \in U$ である。
2．$E \in T$ ならば，$E \in U$ である。
3．E_1，$E_2 \in U$ ならば，$\mathrm{cons}[E_1 ; E_2] \in U$ である。

U の要素を**フラグメント**という。

定義．条件式とは，

$$\begin{array}{l} \mathrm{or}[\quad \mathrm{and}[\mathrm{atom}?[E_{11}]\,;\cdots;\,\mathrm{atom}?[E_{1n_1}]]\,; \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \\ \qquad \mathrm{and}[\mathrm{atom}?[E_{m1}]\,;\cdots;\,\mathrm{atom}?[E_{mn_m}]]\quad]^{*} \end{array}$$

の形をした式である。ここで，$E_{ij}\in T$ である。

3．層状再帰プログラム

3.1 式の差と階差

定義．式 $F[\vec{x}]$，$G[\vec{x}]$ に対して，F のある部分式 $E[\vec{x}]$ が G によって次のように表現できるとする。

$$E[\vec{x}]=G[B_1[\vec{x}]\,;\cdots;\,B_n[\vec{x}]]$$

ここで，$\mathbf{B}=\langle B_1[\vec{x}],\ \cdots,\ B_n[\vec{x}]\rangle$ は適当な式の列である。このとき，F の部分式 E を特別な定数 φ で置き換えた式 $H=[\varphi\Leftarrow E]$を，F と G の差という。$\mathbf{B}$ を剰余といい，$\mathrm{rem}(F,G,H)$ と表す。F と G の差全体の集合を $F-G$ と表す。なお F と G の差が存在しないときは $F-G=\phi$ とする。2つの式の差はたかだか有限個である。

例1．次の2つの式 F，G が与えられたとき，

$$F[x\,;\,y]=\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]]\,;\,y]],$$
$$G[x\,;\,y]=\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,y].$$

F の部分式 $\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]]\,;\,y]$ と G を比較すると，

$$G[\mathrm{cdr}[x]\,;\,y]=\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]]\,;\,y]$$

が成り立つ。したがって

$$\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,\varphi]\in F-G \qquad (\mathit{rem}(F,G,\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,\varphi])=\langle\mathrm{cdr}[x],y\rangle).$$

また集合 $F-G$ は，

$$F-G=\{\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,\varphi],\ \varphi\}$$

であり，$\mathit{rem}(F,G,\varphi)=\langle x,\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]]\,;\,y]\rangle$ である。

定義．$\mathbf{F}=F_1,\cdots,F_n$ を式の列とする。$\mathbf{F}$ の間隔 $m\,(m\geq 1)$ の0階の階差 $\Delta^0\mathbf{F}$ を $\mathbf{F}$ 自身とおく。$\mathbf{F}$ の $k-1$ 階の階差 $\Delta^{k-1}\mathbf{F}=\Delta^{k-1}F_1,\cdots,\Delta^{k-1}F_{n-(k-1)m}$ が存在するとき，

$$\Delta^k F_i\in(\Delta^{k-1}F_{i+m}-\Delta^{k-1}F_i)\text{ かつ }\mathrm{rem}(\Delta^{k-1}F_{i+m},\Delta^{k-1}F_i,\Delta^k F_i)=\mathbf{B}$$

となる条件を満たす $\Delta^k\mathbf{F}=\Delta^k F_1,\cdots,\Delta^k F_{n-km}\,(k\geq 1)$を，$\mathbf{F}$ の間隔 m の k 階の階差といい，$\mathbf{B}$ を剰余という。

---

* $\mathrm{or}[\vec{x}]$ は $[x_1\rightarrow\#\mathrm{t}\,;\cdots;\,x_n\rightarrow\#\mathrm{t}]$，$\mathrm{and}[\vec{x}]$ は $[x_1\rightarrow[x_2\rightarrow[\cdots[x_n\rightarrow\#\mathrm{t}]\cdots]]]$ のそれぞれの略記である。

定義．階差 $\Delta^k\mathbf{F}=\Delta^kF_1,\cdots,\Delta^kF_{n-km}(k\geq 1)$ は，$\Delta^kF_1=\cdots=\Delta^kF_{n-km}$ のとき，**一定である**という。
例 2．式の列 $\mathbf{F}=F_1,F_2,F_3$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} F_1[x] &= (), \\ F_2[x] &= \mathrm{cons}[\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,()]\,;\,()], \\ F_3[x] &= \mathrm{cons}[\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,()]\,; \\ &\qquad \mathrm{cons}[\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]]\,;\,()]\,;\,()]]. \end{aligned}$$

このとき，$\mathbf{F}$ の間隔 1 の 1 階の階差 $\Delta^1\mathbf{F}=\Delta^1F_1,\Delta^1F_2$ は，

$$\begin{aligned} \Delta^1F_1 &= \mathrm{cons}[\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,()]\,;\,\varphi], \\ \Delta^1F_2 &= \mathrm{cons}[\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,()]\,;\,\varphi]. \end{aligned}$$

$\Delta^1\mathbf{F}$ の剰余は $\langle\mathrm{cdr}[x]\rangle$ である。

3.2 層状の再帰的構造と層状再帰プログラム

定義．$\mathbf{F}$ をフラグメントの列とする。$\mathbf{F}$ が間隔 m，剰余 $\mathbf{B}$ で**層状の再帰的構造**を持つとは，ある $h(h>0)$ に対して，間隔 m，剰余 $\mathbf{B}$ で，次の条件を満たす $\mathbf{F}$ の 0 階から h 階までの階差 $\mathbf{F}$，$\Delta^1\mathbf{F}$，$\Delta^2\mathbf{F}$，$\cdots$，$\Delta^h\mathbf{F}$ が存在することである。

1．$j=0$，$\cdots$，$h-1$ に対して，$\Delta^j\mathbf{F}$ は一定ではない。
2．$\Delta^h\mathbf{F}$ が一定である。

命題 1．フラグメントの列 $\mathbf{F}$ に対して，間隔 m，剰余 $\mathbf{B}$ で $\mathbf{F}$ は層状の再帰的構造を持つとする。

$$\begin{aligned} D^jF_i[\vec{x},y] &= (\Delta^jF_i[\vec{x}])[y\Leftarrow\varphi] \quad (j=0,\cdots,h-1,i=1,\cdots,n-jm) \\ A[\vec{x}:y] &= (\Delta^hF_i[\vec{x}])[y\Leftarrow\varphi] \quad (i=1,\cdots,n-hm) \end{aligned}$$

とすると，次の等式が成り立つ。

$$F_i[\vec{x}]=D^1F_{i-m}[\vec{x}\,;\,F_{i-m}[\mathbf{B}[\vec{x}]]] \qquad (i=m+1,\cdots,n)$$

ただし，

$$\begin{aligned} D^jF_i[\vec{x}\,;\,y] &= D^{j+1}F_{i-m}[\vec{x}\,;\,D^jF_{i-m}[\mathbf{B}[\vec{x}]\,;\,y\,]] \qquad (i=m+1,\cdots,n-jm) \\ D^{h-1}F_i[\vec{x}\,;\,y] &= A[\vec{x}\,;\,D^{h-1}F_{i-m}[\mathbf{B}[\vec{x}]\,;\,y]] \qquad (i=m+1,\cdots,n-(h-1)m) \end{aligned}$$

定義．条件式の列 $\mathbf{P}$ に対して，$\mathbf{P}$ が間隔 m，剰余 $\mathbf{B}$ の**再帰的構造**を持つとは，任意の i に対して，

$$\Delta^1P_i=\varphi$$

である間隔 m，剰余 $\mathbf{B}$ で，$\mathbf{P}$ の 1 階の階差 $\Delta^1\mathbf{P}$ が存在することである。

命題 2．条件式の列 $\mathbf{P}$ に対して，間隔 m，剰余 $\mathbf{B}$ で $\mathbf{P}$ が再帰的構造を持つとする。このとき次の等式が成り立つ。

$$P_i[\vec{x}]=P_{i-m}[\mathbf{B}[\vec{x}]] \qquad (i=m+1,\cdots,n-1).$$

定義．フラグメントの列 $\mathbf{F}$ と条件式の列 $\mathbf{P}$ に対して，$\mathbf{F}$ が間隔 m，剰余 $\mathbf{B}$ で層状の再帰的構造を

持ち，$\mathbf{P}$ が同じ間隔 m，剰余 $\mathbf{B}$ で再帰的構造を持つとき，組$\langle\mathbf{F},\mathbf{P}\rangle$は**層状の再帰的構造**を持つといい，以下の式からなるプログラムを組 $\langle\mathbf{F},\mathbf{P}\rangle$ に対する**層状再帰プログラム**という。ここで，$D^jF_i[\vec{x};y]$，$A[\vec{x};y]$ は命題1で用いた式とする。

$$
\begin{aligned}
f[\vec{x}] \leftarrow [\ & P_1[\vec{x}] \to F_1[\vec{x}];\\
&\vdots\\
& P_m[\vec{x}] \to F_m[\vec{x}];\\
& \#\mathrm{t} \to d^1f[\vec{x};f[\mathbf{B}[\vec{x}]]]\ ],\\
d^1f[\vec{x};y] \leftarrow [\ & P_2[\vec{x}] \to D^1F_1[\vec{x};y];\\
&\vdots\\
& P_{m+1}[\vec{x}] \to D^1F_m[\vec{x};y];\\
& \#\mathrm{t} \to d^2f[\vec{x};d^1f[\mathbf{B}[\vec{x}];y]]\ ],\\
&\vdots\\
d^{h-1}f[\vec{x};y] \leftarrow [\ & P_{1+h}[\vec{x}] \to D^{h-1}F_1[\vec{x};y];\\
&\vdots\\
& P_{m+h}[\vec{x}] \to D^{h-1}F_m[\vec{x};y];\\
& \#\mathrm{t} \to A[\vec{x};d^{h-1}f[\mathbf{B}[\vec{x}];y]]\ ].
\end{aligned}
$$

例3．フラグメントの列 $\mathbf{F}$：

$$
\begin{aligned}
F_1[x] &= (),\\
F_2[x] &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[x];()],\\
F_3[x] &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[x];\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]];\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]];()]]],\\
F_4[x] &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[x];\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]];\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[\mathrm{cdr}[x]]];\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]];\cdots]]]]
\end{aligned}
$$

に対して，間隔1，剰余 $\langle\mathrm{cdr}[x]\rangle$ で1階の階差 $\Delta^1\mathbf{F}$ は

$$
\begin{aligned}
\Delta^1F_1 &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[x];\varphi],\\
\Delta^1F_2 &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[x];\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]];\varphi]],\\
\Delta^1F_3 &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[x];\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]];\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[\mathrm{cdr}[x]]];\varphi]]].
\end{aligned}
$$

さらに，同じ間隔1，剰余 $\langle\mathrm{cdr}[x]\rangle$ で2階の階差 $\Delta^2\mathbf{F}$ は

$$\Delta^2F_1 = \Delta^2F_2 = \mathrm{cons}[\mathrm{car}[x];\varphi].$$

これより $\mathbf{F}$ は間隔1，剰余 $\langle\mathrm{cdr}[x]\rangle$ で層状の再帰的構造をもつことがわかる。
また条件式の列 $\mathbf{P}$：

$$
\begin{aligned}
P_1[x] &= \mathrm{atom?}[x],\\
P_2[x] &= \mathrm{atom?}[\mathrm{cdr}[x]],\\
P_3[x] &= \mathrm{atom?}[\mathrm{cdr}[\mathrm{cdr}[x]]]
\end{aligned}
$$

に対して，間隔1，剰余 $\langle\mathrm{cdr}[x]\rangle$ で1階の階差 $\Delta^1\mathbf{P}$ は

$$\Delta^1P_1 = \Delta^1P_2 = \varphi$$

これより，$\mathbf{P}$ は再帰的構造を持つことが分かる。このとき，$\langle\mathbf{F},\mathbf{P}\rangle$は層状の再帰的構造を持ち，

次の式からなる層状再帰プログラムが構成される。

$$
\begin{aligned}
f[x] &\leftarrow [\ \mathrm{atom?}[x] \rightarrow ()\ ; \\
&\qquad \#\mathrm{t} \qquad \rightarrow d^1 f[x\ ;\ f[\mathrm{cdr}[x]]]\ ], \\
d^1 f[x\ ;\ y] &\leftarrow [\ \mathrm{atom?}[\mathrm{cdr}[x]] \rightarrow \mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\ ;\ y]\ ; \\
&\qquad \#\mathrm{t} \qquad \rightarrow \mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\ ;\ d^1 f[\mathrm{cdr}[x]\ ;\ y]]\ ].
\end{aligned}
$$

4．例の提示の方法

定義．$\Sigma = D(\{w\})$の要素を**構造**という。

定義．Σ上の関係$\leq$を以下の１，２で定義する。

１．任意の$s \in \Sigma$に対して$\omega \leq s$である。

２．$s \leq u$かつ$t \leq v\ (s, t, u, v \in \Sigma)$のとき，$(s.t) \leq (u.v)$である。

関係$\leq$は順序関係であり，Σはこの順序集合を用いて束となる。

定義．$s, t \in \Sigma$とする。**差**$s - t \in D(\{\omega, \chi\})$を以下のように再帰的に定義する。

１．$s = t$のとき，$s - t = \{\chi\}$

２．$s \neq t$のとき，

（a）$s = \omega$のとき，$s - t = \phi$

（b）$s = (u.v)$のとき（$u, v \in \Sigma$），

$$s - t = \{(a.v) \mid a \in u - t\} \cup \{(u.b) \mid b \in v - t\}$$

定義．構造の列$s_1, \cdots, s_n$（$n \geq 1$）は，

$$\bigcap_{k=1}^{n-1} (s_{k+1} - s_k) \neq \phi$$

が成り立つならば，**線形列**であるという。

例４．$s = ((\omega . \omega) . ((\omega . \omega) . ((\omega . \omega) . \omega))), t = (\omega . \omega)$とする。このとき，

$$s - t = \left\{ \begin{array}{l} (\chi . ((\omega . \omega) . ((\omega . \omega) . \omega))), \\ ((\omega . \omega) . (\chi . ((\omega . \omega) . \omega))), \\ ((\omega . \omega) . ((\omega . \omega) . (\chi . \omega))) \end{array} \right\}$$

である。また，$t - s = \phi$である。

例５．構造の列$\mathbf{s} = s_1, \cdots, s_4$

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \omega, \\
s_2 &= ((\omega . \omega) . \omega), \\
s_3 &= ((\omega . \omega) . ((\omega . \omega) . \omega)), \\
s_4 &= ((\omega . \omega) . (((\omega . \omega) . ((\omega . \omega) . \omega)))
\end{aligned}
$$

に対して，

$$(s_2-s_1)\cap(s_3-s_2)\cap(s_4-s_3)$$
$$=\{((\omega.\omega).\chi)\}\cap\{((\omega.\omega).\chi)\}\cap\{((\omega.\omega).\chi)\}$$
$$=\{((\omega.\omega).\chi)\}\neq\phi$$

となる。したがって，構造の列 s は線形列である。

定義．$\alpha\in S$ に対して，その**構造** $\sigma(\alpha)$ とは，α 中のすべての定数を ω で置き換えたものである。

定義．構造の上の順序関係$\leq$を用いて，S 式の上の関係$\leq$を，$\sigma(\alpha)\leq\sigma(\beta)$ ならば $\alpha\leq\beta$ と定義する。S 式の上の関係$\leq$は前順序関係(反射的推移的関係)である。

定義．S 式の列 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ は，対応する構造の列 $\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n)$ が線形列であるならば，**線形列**であるという。

定義．関数 $f:S^n\rightarrow S$ に対して，$\vec{\alpha}$，β を $\beta=f(\vec{\alpha})$ となる S 式とする。このとき，$\vec{\alpha}$を**入力**，β を**出力**という。入出力の組 $\langle\vec{\alpha},\beta\rangle$ を関数 f の**例**という。

定義．例 $\langle\vec{\alpha},\beta\rangle$ は，入力$\vec{\alpha}$中の()を除く各定数が$\vec{\alpha}$中にただ一度だけしか出現しないとき**典型的**であるという。

補題 1．f を層状の再帰的プログラムによって表現される関数，$e=\langle\vec{\alpha},\beta\rangle$ を f の典型的な例とする。$\vec{\alpha}'$ を$\vec{\alpha}$に出現する定数 $c_1,\cdots,c_m$ をそれぞれ定数 $d_1,\cdots,d_m$ で置き換えたものとする。このとき，$f(\vec{\alpha}')$の値は β 中の $c_1,\cdots,c_m$ を $d_1,\cdots,d_m$ で置き換えた S 式となる。

定義．例の列は，各入力 S 式の列$\vec{\alpha}^1,\cdots,\vec{\alpha}^k$が$\leq$に関して鎖であるとき**鎖**であるといい，$\vec{\alpha}^1,\cdots,\vec{\alpha}^k$が線形構造をもつとき**線形構造**を持つという。

関数 f を f の例から推論するとき，各時点 k で典型的な例 e_k を与える。k までに与えられた例の列 $e_1,\cdots,e_k$ は$\leq$に関する鎖であり，かつ，線形列となる必要がある。

例 6．次の例の列 e$=e_1,\cdots,e_4$ は上で述べた条件を満足する。

e_1 = ⟨()，()，()⟩,
e_2 = ⟨(a)，()，(a)⟩,
e_3 = ⟨(x y)，(z)，(x y z)⟩,
e_4 = ⟨(a b c)，(d)，(a b c d)⟩

5．層状再帰プログラムの導出方法

推論手続きの概略を示す。各時点 k で典型的な例 e_k を受けとると，それまでに与えられた例の列 e$=e_1,\cdots,e_k$ に対して，以下の手順で推測を出力する。

Step 1. 各例 e_i に対するフラグメント F_i を求める。

Step 2. 例の列 **e** を分離する条件式 **P** を求める。

Step 3. ⟨**F**, **P**⟩が層状の再帰的構造を持つかどうかを調べ，もし持てば，⟨**F**, **P**⟩に対する層状再帰プログラムを推測として出力する。

5.1 フラグメントの導出

定義．例 $e=\langle\vec{\alpha},\beta\rangle$ に対して，式 $F[\vec{x}]$ が $F[\vec{\alpha}]\Rightarrow^*\beta$ となるとき，F は例 e を**説明する**という。例の列 $\mathbf{e}=e_1,\cdots,e_k$ に対して，式 F はすべての例 e_i を説明するとき，例の列 **e** を**説明する**という。

定義．S 式 α 中の定数 c に対して，$E_c[\alpha]\Rightarrow^*c$ となる $E_c[x]\in T$ を c のxを用いた**識別子**という。α のxを用いた**識別子集合**を $I(\alpha,x)=\{\langle c,E_c[x]\rangle\mid c$ は α の中の定数$\}$と定義する。例 $e=\langle\vec{\alpha},\beta\rangle$ に対して，e の**識別子集合**を $I_e=I(\alpha_1,x_1)\cup\cdots\cup I(\alpha_n,x_n)$ と定義する。

補題 2．例が典型的であるとき，$\langle a,E[x]\rangle,\langle a,E'[x]\rangle\in I$ ならば，$E[x]=E'[x]$が成り立つ。

層状再帰プログラムの例 $e=\langle\vec{\alpha},\beta\rangle$ に対して，補題 1 より β 中の定数は$\vec{\alpha}$中に現れることに注意すると，補題 2 と合わせて次の定義が可能となる。

定義．典型的な例 $e=\langle\vec{\alpha},\beta\rangle$ に対して，e の識別子集合を I_e とする。このとき，e のフラグメント $F_e[\vec{x}]$ を次のように再帰的に定義する。

1．$\beta=()$のとき，$F_e[\vec{x}]=()$.

2．$\beta\in S$ かつ $\beta\neq()$のとき，$\langle\beta,E[x]\rangle\in I_e$ ならば $F_e[\vec{x}]=E[x]$.

3．$\beta=(\beta_1.\beta_2)\notin S$ のとき，$\langle\vec{\alpha},\beta_i\rangle$ を説明するフラグメントを F_i ($i=1$, 2) とするとき，$F_e[\vec{x}]=\mathrm{cons}[F_1[\vec{x}]\,;F_2[\vec{x}]]$.

補題．上で定義される例 e のフラグメント F_e は，e を説明する。

定理 1．典型的な例 e に対して e を説明するフラグメントをただ一つ求めることができる。

例 7．例 $e=\langle(\mathrm{a\ b}),(\mathrm{c}),(\mathrm{a\ b\ c})\rangle$ の識別子集合 I_e は，$I_e=I(\alpha_1,x_1)\cup I(\alpha_2,x_2)$ である。ここで，

$$I(\alpha_1,x_1)=\left\{\begin{array}{c}\langle a,\mathrm{car}[x_1]\rangle,\\ \langle b,\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x_1]]\rangle,\\ \langle(),\mathrm{cdr}[\mathrm{cdr}[x_1]]\rangle\end{array}\right\},$$

$$I(\alpha_2,x_2)=\left\{\begin{array}{c}\langle c,\mathrm{car}[x_2]\rangle,\\ \langle(),\mathrm{cdr}[x_2]\rangle\end{array}\right\}.$$

このとき，次のフラグメントが求まる。

$$F=\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x_1]\,;\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x_1]]\,;\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x_2]\,;()]]]$$

5.2 条件式の構成

定義. 例の列 $\mathbf{e}=\langle\vec{\alpha}^1,\beta^1\rangle,\cdots,\langle\vec{\alpha}^k,\beta^k\rangle$ に対して，条件式の列 $P_1,\cdots,P_k$ は,

$$\forall i\,\forall j\,(1\leq j<i)\,[P_j[\vec{\alpha}^i]\ \not\Rightarrow^*\ \#\mathrm{t})\wedge(P_i[\vec{\alpha}^i]\ \Rightarrow^*\ \#\mathrm{t})]$$

となる条件を満たすとき e を**分離する**という。

補題4. $\mathbf{e}=e_1,\cdots,e_k$ を例の列とする。各 e_i を説明するフラグメントを F_i とする。$P_1,\cdots,P_k$ は $\mathbf{e}$ を分離する条件式の列とする。このとき，次のプログラム P において，関数 $f[\vec{x}]$ は $\mathbf{e}$ を説明する。

$$P=\left\{\begin{array}{rl} f[\vec{x}]\ \leftarrow\ [P_1[\vec{x}] & \to F_1[\vec{x}] \\ P_2[\vec{x}] & \to F_2[\vec{x}] \\ & \vdots \\ P_k[\vec{x}] & \to F_k[\vec{x}]] \end{array}\right\}$$

定義. 例の列 $e_1,\cdots,e_k$ は$\leq$に関して鎖であるとする。各例 e_i に対する識別子集合を $I_{ei}=\{\langle a_1^i,f_1^i\rangle,\cdots,\langle a_{m_i}^i,f_{m_i}^i\rangle\}$ とする。$\{g_1,\cdots,g_l\}=\{f_1^i,\cdots,f_{m_i}^i\}-\{f_1^{i+1},\cdots,f_{m_{i+1}}^{i+1}\}$ とおくとき，条件式

$$P_j[\vec{x}]=\mathrm{or}[\mathrm{atom}?[g_1]\,;\cdots;\,\mathrm{atom}?[g_l]]$$

を**構造近似条件式**という。

補題 5. 例の列 $\mathbf{e}=\langle\vec{\alpha}^1,\beta^1\rangle,\cdots,\langle\vec{\alpha}^k,\beta^k\rangle$ は$\leq$に関して鎖であるとする。$P_1,\cdots,P_k$ を $\mathbf{e}$ の構造近似条件式とする。このとき，任意のS式の列$\vec{a}$に対して，$P_i[\vec{a}]\Rightarrow^*\#\mathrm{t}$ であるとは，$\sigma(\vec{a})\geq\sigma(\vec{\alpha}^i)$ かつ $\sigma(\vec{a})<\sigma(\vec{\alpha}^{i+1})$ と同値である。

系1. 例の列 $\mathbf{e}=e_1,\cdots,e_k$ は$\leq$に関して鎖であるとする。$\mathbf{P}=P_1,\cdots,P_k$ を $\mathbf{e}$ の構造近似条件式とすると，$\mathbf{P}$ は $\mathbf{e}$ を分離する。

定理2. 例の列 $\mathbf{e}=e_1,\cdots,e_k$ は$\leq$に関して鎖であるとする。$\mathbf{e}$ を分離する構造近似条件式の列 $\mathbf{P}$ は一意に定まる。

例8. 例の列 e_1, e_2, e_3

$$\begin{aligned} e_1 &= \langle(),\ (\mathrm{a}),\ (\mathrm{a})\rangle \\ e_2 &= \langle(\mathrm{a}),\ (\mathrm{b}),\ (\mathrm{a\ b})\rangle \\ e_3 &= \langle(\mathrm{x\ y}),\ (\mathrm{z}),\ (\mathrm{x\ y\ z})\rangle \end{aligned}$$

に対する構造近似条件式の列は,

$$\begin{aligned} P_1[x_1] &= \mathrm{or}[\mathrm{atom}?[x_1]] \\ P_2[x_1] &= \mathrm{or}[\mathrm{atom}?[\mathrm{cdr}[x_1]]]. \end{aligned}$$

5.3 層状の再帰性の発見

定理1，定理2より $\langle\mathbf{F},\mathbf{P}\rangle$ の存在が保証されるので，推論手続きはStep 3を実行することが

可能である。このとき，推論手続きは $\langle \mathbf{F}, \mathbf{P} \rangle$ の階差を求めることで，$\langle \mathbf{F}, \mathbf{P} \rangle$ の層状の再帰的構造を発見する。

例 9．例の列 $\mathbf{e} = \langle (), () \rangle, \langle (\mathrm{a}), (\mathrm{a}) \rangle, \langle (\mathrm{a\,b}), (\mathrm{a\,b\,b}) \rangle, \langle (\mathrm{a\,b\,c}), (\mathrm{a\,b\,c\,b\,c\,c}) \rangle$ が与えられたとき，例 3 で示されたフラグメントの列 $\mathbf{F}$ と条件式の列 $\mathbf{P}$ が5.1節と5.2節から求まる。このとき，例 3 で示されている層状の再帰的構造を，$\mathbf{F}$ と $\mathbf{P}$ についてそれぞれ階差を求めることで得ることができる。そして，推論アルゴリズムは $\langle \mathbf{F}, \mathbf{P} \rangle$ に対する層状再帰プログラムを出力する。

6．層状の再帰性の拡張

6.1　等しくない剰余に対する拡張

これまで，$\mathbf{F}$ の階差 $\Delta^1\mathbf{F}, \Delta^2\mathbf{F}, \cdots, \Delta^h\mathbf{F}$ の剰余 $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \cdots, \mathbf{B}_h$ と，条件式の 1 階の階差 $\Delta^1\mathbf{P}$ の剰余 $\mathbf{B}_\mathrm{p}$ が，すべて等しいことが必要としていた。ここでは，この条件を弱くできることを示す。

定義．$\mathbf{F}$ をフラグメントの列とする。$\mathbf{F}$ が間隔 m，剰余 $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \cdots, \mathbf{B}_h$ で**層状の再帰的構造**を持つとは，ある $h(h>0)$ に対して，間隔 m（$m>0$）で，次の条件を満たす $\mathbf{F}$ の 0 階から h 階までの階差 $\mathbf{F}, \Delta^1\mathbf{F}, \Delta^2\mathbf{F}, \cdots, \Delta^h\mathbf{F}$ が存在することである。ただし，1 階から h 階までの階差の剰余を $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \cdots, \mathbf{B}_h$ とする。

1．$j=0, \cdots, h-1$ に対して，$\Delta^j\mathbf{F}$ は一定ではない。
2．$\Delta^h\mathbf{F}$ が一定である。

命題 3．$\mathbf{F}$ をフラグメントの列とする。間隔 m，剰余 $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \cdots, \mathbf{B}_h$ で $\mathbf{F}$ は層状の再帰的構造を持つとする。

$$\begin{aligned} D^jF_i[\vec{x}\,;y] &= (\Delta^jF_i[\vec{x}])[y \Leftarrow \varphi] \qquad (j=0, \cdots, h-1, i=1, \cdots, n-jm) \\ A[\vec{x}\,;y] &= (\Delta^hF_i[\vec{x}])[y \Leftarrow \varphi] \qquad (i=1, \cdots, n-hm) \end{aligned}$$

とすると，次の等式が成り立つ。

$$F_i[\vec{x}] = D^1F_{i-m}[\vec{x}\,;F_{i-m}[\mathbf{B}_1[\vec{x}]]] \qquad (i=m+1, \cdots, n)$$

ただし，

$$\begin{aligned} D^jF_i[\vec{x}\,;y] &= D^{j+1}F_{i-m}[\vec{x}\,;D^jF_{i-m}[\mathbf{B}_{j+1}[\vec{x}]\,;y]] \qquad (i=m+1, \cdots, n-jm) \\ D^{h-1}F_i[\vec{x}\,;y] &= A[\vec{x}\,;D^{h-1}F_{i-m}[\mathbf{B}_h[\vec{x}]\,;y]] \qquad (i=m+1, \cdots, n-(h-1)m) \end{aligned}$$

定義．$\mathbf{F}$ をフラグメントの列，$\mathbf{P}$ を条件式の列とする。$\mathbf{F}$ が間隔 m，剰余 $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \cdots, \mathbf{B}_h$ で層状の再帰的構造を持ち，$\mathbf{P}$ が間隔 m，剰余 $\mathbf{B}_\mathrm{p}$ で再帰的構造を持つとき，組 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{P} \rangle$ は**層状の再帰的構造**を持つといい，以下の式からなるプログラムを組 $\langle \mathbf{F}, \mathbf{P} \rangle$ に対する**層状再帰プログラム**という。ここで，$D^jF_i[\vec{x}\,;y]$，$A[\vec{x}\,;y]$ は命題 3 で用いた式とする。

$$\begin{aligned} g[\vec{x}] &\leftarrow f[\vec{x}\,;\vec{x}] \\ f[\vec{x}\,;y] &\leftarrow [\ P_1[y] \to F_1[\vec{x}]\,; \\ &\qquad \vdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad P_m[y] \to F_m[\vec{x}]\,;\\
&\qquad\qquad \#\mathrm{t} \to d^1f[\vec{x}\,;y\,;f[\mathbf{B}_1[\vec{x}]\,;\mathbf{B}_\mathrm{p}[y]]]\ ],\\
d^1f[\vec{x}\,;y\,;z] &\leftarrow [\ P_2[y] \to D^1F_1[\vec{x}\,;z]\,;\\
&\qquad\qquad \vdots\\
&\qquad\qquad P_{m+1}[y] \to D^1F_m[\vec{x}\,;z]\,;\\
&\qquad\qquad \#\mathrm{t} \to d^2f[\vec{x}\,;y\,;d^1f[\mathbf{B}_2[\vec{x}]\,;\mathbf{B}_\mathrm{p}[y]\,;z]]\ ],\\
&\vdots\\
d^{h-1}f[\vec{x}\,;y\,;z] &\leftarrow [\ P_{1+h}[y] \to D^{h-1}F_1[\vec{x}\,;z]\,;\\
&\qquad\qquad \vdots\\
&\qquad\qquad P_{m+h}[y] \to D^{h-1}F_m[\vec{x}\,;z]\,;\\
&\qquad\qquad \#\mathrm{t} \to A[\vec{x}\,;d^{h-1}f[\mathbf{B}_h[\vec{x}]\,;\mathbf{B}_\mathrm{p}[y]\,;z]]\ ].
\end{aligned}
$$

例10．reverse として知られる関数の推論を行なう。reverse の例として e=⟨(), ()⟩, ⟨(a), (a)⟩, ⟨(a b), (a b b)⟩, ⟨(a b c), (c b a)⟩ を与える。このとき，フラグメントの列 **F** は

$$
\begin{aligned}
F_1[x] &= (),\\
F_2[x] &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;()],\\
F_3[x] &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]]\,;\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;()]],\\
F_4[x] &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[\mathrm{cdr}[x]]]\,;\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]]\,;\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;()]]].
\end{aligned}
$$

条件式の列 **P** は例3と同じである。間隔1，剰余 $\langle x\rangle$ で **F** の1階の階差 $\Delta^1\mathbf{F}$ は,

$$
\begin{aligned}
\Delta^1F_1 &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\varphi],\\
\Delta^1F_2 &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]]\,;\varphi],\\
\Delta^1F_3 &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[\mathrm{cdr}[x]]]\,;\varphi].
\end{aligned}
$$

さらに，間隔1，剰余 $\langle \mathrm{cdr}[x]\rangle$ で2階の階差 $\Delta^2\mathbf{F}$ は

$$\Delta^2F_1 = \Delta^2F_2 = \varphi$$

となる。これより **F** は間隔1，剰余 $\langle x\rangle$, $\langle \mathrm{cdr}[x]\rangle$ の層状の再帰的構造をもつことがわかる。このとき，⟨**F**, **P**⟩は層状の再帰的構造を持ち，次の式からなる層状再帰プログラムが構成される。

$$
\begin{aligned}
g[x] &\leftarrow f[x\,;x],\\
f[x\,;y] &\leftarrow [\ \mathrm{atom?}[y] \to ()\,;\\
&\qquad \#\mathrm{t} \qquad\quad \to d^1f[x\,;y\,;f[x\,;\mathrm{cdr}[y]]]\ \ ],\\
d^1f[x\,;y\,;z] &\leftarrow [\ \mathrm{atom?}[\mathrm{cdr}[y]] \to \mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;z]\,;\\
&\qquad \#\mathrm{t} \qquad\qquad\quad \to d^1f[\mathrm{cdr}[x]\,;\mathrm{cdr}[y]\,;z]\ \ ].
\end{aligned}
$$

6.2 変数付加による拡張

もうひとつの拡張として，Summers によって示された変数付加(variable addition)の手法をそのまま本手法に用いることができる。フラグメント **F** のある i 階の階差 $\Delta^i\mathbf{F}$ において，その階差のすべての式 $\Delta^i\mathbf{F}_1, \Delta^i\mathbf{F}_2, \cdots, \Delta^i\mathbf{F}_k$ の共通の部分式 E を新たな変数に置き換えることで層状の再帰

的構造を発見できるとき，それに対する層状再帰的プログラムを定義することができる。

例11．次の例

$$e = \langle (a), (a)\rangle, \langle (a\ b), (b\ a)\rangle, \langle (a\ b\ c), (c\ a\ b\ a)\rangle, \langle (a\ b\ c\ d), (d\ a\ c\ \ a\ b\ a)\rangle,$$

を説明する関数の推論を行なう。このとき，フラグメントの列 $\mathbf{F}$ は

$$\begin{aligned}
F_1[x] &= (), \\
F_2[x] &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]]\,;\,\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,()]], \\
F_3[x] &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[\mathrm{cdr}[x]]]\,;\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]]\,;\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;()]]]], \\
F_4[x] &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[\mathrm{cds}[\mathrm{cdr}[x]]]]\,;\,\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[\mathrm{cdr}[x]]]\,; \\
&\qquad \mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,\mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]]\,;\,\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,()]]]]]]].
\end{aligned}$$

間隔 1，剰余 $\langle x\rangle$ で $\mathbf{F}$ の 1 階の階差 $\Delta^1\mathbf{F}$ は,

$$\begin{aligned}
\Delta^1 F_1[x] &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]]\,;\,\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,\varphi]], \\
\Delta^1 F_2[x] &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[\mathrm{cdr}[x]]]\,;\,\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,\varphi]], \\
\Delta^1 F_3[x] &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[\mathrm{cdr}[\mathrm{cdr}[x]]]]\,;\,\mathrm{cons}[\mathrm{car}[x]\,;\,\varphi]].
\end{aligned}$$

しかし，この 1 階の階差に対する 2 階の階差は存在しない。そこで，$\Delta^1\mathbf{F}_1$，$\Delta^1\mathbf{F}_2$，$\Delta^1\mathbf{F}_3$ の共通の部分式 car$[x]$ を新たな変数 w で置き換えると，次の新たな階差 $\Delta^1\mathbf{G}$ を得る。

$$\begin{aligned}
\Delta^1 G_1[x\,;w] &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]]\,;\,\mathrm{cons}[w\,;\,\varphi]], \\
\Delta^1 G_2[x\,;w] &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[\mathrm{cdr}[x]]]\,;\,\mathrm{cons}[w\,;\,\varphi]], \\
\Delta^1 G_3[x\,;w] &= \mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[\mathrm{cdr}[\mathrm{cdr}[x]]]]\,;\,\mathrm{cons}[w\,;\,\varphi]].
\end{aligned}$$

階差 $\Delta^1\mathbf{G}$ に対して，間隔 1，剰余 $\langle \mathrm{cdr}[x],\ w\rangle$ で 2 階の階差 $\Delta^2\mathbf{F}$

$$\Delta^2 F_1 = \Delta^2 F_2 = \varphi.$$

を求めることができる。これより $\mathbf{F}$ は剰余$\langle x\rangle$，$\langle \mathrm{cdr}[x],\ w\rangle$，間隔 1 の層状の再帰的構造をもつことがわかる。条件式の列 $\mathbf{P}$ とその 1 階の階差は，これまでと同様にして求めることができる。このとき，$\langle \mathbf{F}, \mathbf{P}\rangle$は層状の再帰的構造を持ち，次の式からなる層状再帰プログラムが構成される。

$$\begin{aligned}
f[x] &\leftarrow g[x\,;\,x], \\
g[x\,;\,y] &\leftarrow [\ \mathrm{atom?}[\mathrm{cdr}[y]] \rightarrow ()\,; \\
&\qquad \#\mathrm{t} \rightarrow d^1 f[x\,;\,y\,;\,g[x\,;\,\mathrm{cdr}[y]]\,;\,\mathrm{car}[x]]\ \ ], \\
d^1 f[x\,;\,y\,;\,z\,;\,w] &\leftarrow [\ \mathrm{atom?}[\mathrm{cdr}[\mathrm{cdr}[y]]] \rightarrow \mathrm{cons}[\mathrm{car}[\mathrm{cdr}[x]]\,;\,\mathrm{cons}[w\,;\,z]]\,; \\
&\qquad \#\mathrm{t} \rightarrow d^1 f[\mathrm{cdr}[x]\,;\,\mathrm{cdr}[y]\,;\,z\,;\,w]\ \ ].
\end{aligned}$$

7．おわりに

本稿で示した手法は，Summers の THESYS[8] を自然に拡張したものであり，THESYS と同様に枚挙を用いないという意味で構成的な手法である。THESYS による推論は，1 階の層状の再帰的構造の発見による推論である。本稿での拡張は，2 階以上の層状の再帰的構造を発見することによって行なわれる。その拡張にも関わらず，2 階以上の階差はもし存在するならば一意に求ま

るため，依然として探索空間は小さなものにおさえられる。

本稿と同様に高階の階差を用いた THESYS の拡張として犬塚らの研究[1]がある。その手法は本稿と階差の定義に違いがある。その階差は，本稿の階差の定義で定数 φ を用いたのに対して，新たな変数を用いるものである。これはちょうど，変数付加を含む本稿の手法に含まれる。しかし，変数付加を含まない本稿の手法で多くの関数を推論することが可能である。犬塚らの手法は，2階以上の階差が一意に定まらないことがあり，探索空間の増大につながる。

今後の課題としては，本稿で与えた推論手法を形式的な帰納推論の枠組で捉えるとすれば，どのような成功基準を根拠にしているかを示す必要がある。Summers は THESYS が出力する再帰プログラムの正当性を basic synthesis 定理で示した[8]。本稿の THESYS を拡張した手法においても同様に stratified synthesis 定理を示すことができる。しかし，それらの定理は，推論の対象となっている関数をフラグメントと条件式で表現したとき，“偶然”再帰的な構造をそれらが持ち，その再帰性を反映した再帰的プログラムを構成できることを示しているに過ぎない。また，層状の再帰的プログラムによって表現される関数とはどのような性質を持つかという問題がある。

参考文献

1) 犬塚信博，高橋健一，石井直宏：高階の差分を用いた入出力からの関数の合成，電子情報通信学会論文誌，D-II, Vol J72-D-II, No. 9, pp. 1484-1492 (1989)
2) 原口 誠, 有川 節夫：例によるプログラム合成，大須賀節雄，佐伯胖 供編「知識の獲得と学習」，オーム社 (1987)
3) Biermann, A. W.: The Inference of Regular LISP Programs from Examples, IEEE Transaction on System, Man and Cybernetics, SMC-8, 8, pp. 585-600 (1978)
4) Biermann, A. W. and Smith, D. R.: A Production Rule Mechanism for Generating LISP Code, IEEE Transaction on System, Man and Cybernetics, SMC-9, 5, pp. 260-276 (1979)
5) Ling, X. and Ungar, L.: Inventing Theoretical Terms in Inductive Learning of Functions, Methodologies for Intelligent Systems, 4, pp. 332-341, Zbigniew W. Ras, Editor, Elsevier Science Publishing Co., Inc, (1989)
6) McCarthy J. et. al.: LISP 1.5 Programmer's Manual, The MIT Press (1962)
7) Springer G. and Friedman D. P.: Scheme and The Art of Programming, The MIT Press (1975)
8) Summers, P. D.: Program Construction from Examples, IBM Res., RC-5637 (1975)
9) Summers, P. D.: A Methodology for LISP Program Construction from Examples, JACM 24, pp. 161-175 (1977)