



Title	非線形特異摂動系の出カトラッキング制御
Author(s)	山下, 裕; Yamashita, Y; 岸, 直輝 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 167, 157-167
Issue Date	1994-01-14
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42403
Type	departmental bulletin paper
File Information	167_157-168.pdf



非線形特異摂動系の出力トラッキング制御

山下 裕¹ 岸 直輝² 島 公脩¹

(平成5年8月31日受理)

Output tracking control for nonlinear singularly perturbed systems

Y. YAMASHITA¹, N. KISHI², and M. SHIMA¹

(Received August 31, 1993)

Abstract

In this paper, output tracking control problem for nonlinear singularly perturbed systems is concerned. A singularly perturbed system consists of both *fast* and *slow* dynamics. If the fast dynamics — *bounded layer system* — is stable, states of the system converge to a *invariant manifold* rapidly. By means of the invariant manifold, *reduced order system* can be derived. First of all, a feedback law for the fast dynamics is designed, that attains stabilization and state-linearization of the bounded layer system. Then Jacobian matrix of the bounded layer system is constant, and the 0th order approximation of the invariant manifold is described by linear function of secondary-input. Secondly, a feedback law which that output of the reduced order system follows a reference input is obtained. Stability of closed system is guaranteed by Tikhonov's theorem for sufficiently small perturbation. The feedback laws for the fast dynamics and the slow dynamics are synthesized nonlinearly, while Kokotovic's method uses linear combination. The nonlinearity makes the fast dynamics linearizable.

1. 緒 言

本論文では、非線形特異摂動系において、特異摂動理論を用いた系の低次元化を行い、低次元化された系に対して外部入力に追従させる制御則の新たな構成法を提案する。特異摂動系とは、速い挙動を示す状態と遅い挙動を示す状態の2つを含む動的システムで、本論文ではその系に対し外部から入力 u が供給され、 u に状態フィードバックを用いることで、遅い状態の関数で表される出力を制御することを目的とする。

特異摂動理論そのものは、入力を含まない自律系に対して研究されてきたが、入力を含む制御系に対しても、線形系を中心に、その応用が図られてきた。非線形制御系に対する応用は、Kokotovicらの一連の研究が知られている。Kokotovicらは速い状態を制御する状態フィードバック u_f と遅い状態を制御する状態フィードバック u_s を考え、この2つの制御則の単純な和を用いて系を漸近

1)精密工学科 自動制御工学講座

2)横河電機㈱

安定化する方法を示した^{1,2)}。 u_f と u_s の設計法は様々な方法が提案されているが、どれも一長一短で決定的なものはない。

また、非線形特異摂動系に対するほとんどの研究が、漸近安定化を目的としており、トラッキング問題を扱ったものは少ない。わずかにロボットマニピュレータに対しての研究が知られている。

そこで、本論文では、 u_s と u_f の単純な和ではなく u_s に関して非線形となるような合成法を用いることで、設計アルゴリズムから試行錯誤的な部分を取り除き、見通しが良い設計法を提案し、漸近安定化ではなく出力のトラッキング問題に応用する。

2. 問題設定

ここで扱う制御対象は、非線形特異摂動制御系、

$$\dot{x} = f(x, z, u, \epsilon) \quad (1)$$

$$\epsilon \dot{z} = g(x, z, u, \epsilon) \quad (2)$$

$$x = h(x, \epsilon) \quad (3)$$

である。ここで、 ϵ は非常に小さい正の定数、 \cdot は時間 t による微分であり、系の状態は $(x, z) \in M \times N = \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ である。また、 $u \in \mathfrak{R}$ は系への入力、 $y \in \mathfrak{R}$ は系への出力であり、 $f: M \times N \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \rightarrow TM$, $g: M \times N \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \rightarrow TN$, $h: M \times N \rightarrow \mathfrak{R}$ は解析的な写像とする。ここでは、簡単のため1入力1出力系を考えるが、多入力多出力系の場合も本質的には大差はない。この系に対して、次の仮定をおく。

仮定1 全ての x, y, u に対し、

$$\text{rank} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial u} \end{array} \right]_{\epsilon=0} = m \quad (4)$$

がなりたつ。 □

状態変数 x, z はそれぞれ“遅い状態”と“速い状態”を表す。このことを時間軸変換、

$$\tau = \frac{t}{\epsilon} \quad (5)$$

を用いて説明する。 ϵ は微小な値なので τ は大きな値となる。従って、 t 秒間の(普通の)系の挙動も、時間軸変換によって $\tau \ll t$ も掛かってしまうように見える。つまり、系(1)の挙動は τ の世界では非常に遅く見える。また、この時間軸変換のもとでは、(1), (2)式は、

$$x' = \epsilon f(x, z, u, \epsilon) \quad (6)$$

$$z' = g(x, z, u, \epsilon) \quad (7)$$

と表現される。ただし、 $'$ は τ による微分を表す。この τ で表現された(7)式は、 t の世界では非常に速く動くように見える。したがって、 x は遅いモードを表現し、 z は速いモードを表現していることになる。なお、速いモードを表す状態変数は座標変換、

$$(x, z) \mapsto (x, \Phi(x, z)), \quad \text{rank} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = m \quad (8)$$

を用いることで、別の座標に取り直すことができるが、遅いモードは固定されている。

このように速いモードと遅いモードを同時に含む制御対象としては、例えば、狭義の制御対象(1)式に、速いアクチュエータ(2)式を組み合わせた場合があげられる。その他、特異摂動系ではない制御対象を、座標変換や、ハイゲインのプリフィードバックを用いて(1), (2)式の形に変換することもある³⁾。

本論文では、この非線形特異摂動制御系に対し、ある目標関数 $r(t)$ に出力 y を追従させる近似トラッキング問題を考察する。ここでは特に、目標関数 $r(t)$ が自律的な外部システム、

$$\dot{w} = \gamma(w) \quad (9)$$

$$r = \delta(w) \quad (10)$$

によって生成される場合を考える。 $w \in L = \mathfrak{R}^n$ は外部システムの状態量、 $r \in \mathfrak{R}$ は(1), (2), (3)式が追従すべき目標信号であり、 $\gamma: L \rightarrow TL$ 、 $\delta: L \rightarrow \mathfrak{R}$ は解析的写像である。

3. 準備

入力 u を含まない特異摂動系、

$$\dot{x} = f(x, z, \epsilon) \quad (11)$$

$$\epsilon \dot{z} = g(x, z, \epsilon) \quad (12)$$

については、すでに相当の数の研究がなされている。本章では、それらのなかから、本研究に関係のある事柄をまとめて示し、次の章への準備とする。

3.1 低次元化システムと境界層システム

前章に述べたように z の挙動は x の挙動に対して速く動く。その様子を、 $\epsilon \rightarrow 0$ として考えてみる。形式的に、(12)式に $\epsilon = 0$ を代入すると、

$$0 = g(x, z, 0) \quad (13)$$

となる。もし、仮定1と同様に、

$$\text{rank} \frac{\partial g}{\partial z} = m \quad (14)$$

がなりたつならば、(13)式を z について解いて、

$$z = \phi_0(x) \quad (15)$$

が得られる。これを $\epsilon = 0$ とした(11)式に代入すると、

$$\dot{x} = f(x, \phi_0(x), 0) \quad (16)$$

となる。これは、(11), (12)式の低次元化システム (reduced order system) である。

この低次元化システムにおける、 z の初期値 z_0 は、

$$z_0 = z(0) = \phi_0(x_0) = \phi_0(x(0)) \quad (17)$$

に制限されている。しかし、 z_0 が $z = \phi_0(x)$ によって表現される多様体上に無い場合も当然あるはずであり、低次元化システムで無視された m 個の状態がどう動くかに関する考察が必要である。

そこで、(11), (12)式を τ 領域で表現し、 $\epsilon \rightarrow 0$ とした式、

$$x' = 0 \quad (18)$$

$$z' = g(x, z, 0) \quad (19)$$

を考える。速い時間 τ においては、(18)式に示すように x は初期値 x_0 のまま一定の値を取り続ける (ようにみえる)。よって、 z の挙動は(19)式によって特徴づけられる。この(19)式を境界層システム (bounded layer system) と呼ぶ。(13)式より、 $z = \phi_0(x_0)$ は境界層システムの平衡点になっている。もし、

1. (19)式において $z = \phi_0(x_0)$ が漸近安定な平衡点。
2. 初期値 z_0 がその安定領域に入っている。

ならば、 z の挙動を t 領域でみると、一瞬のうちに z_0 から $\phi_0(x_0)$ に動くことになる。 t 領域での x の動きにしたがって z も $\phi_0(x(t))$ のように動く。

3.2 不変多様体

これまでの議論は、 $\epsilon \rightarrow 0$ とした場合に関するものであったが、 ϵ が 0 ではない小さな正の値を持つときには、 $z = \phi_0(x)$ 上を動くことは期待できない。 $\epsilon = 0$ のときと同様に次の仮定を置く。

仮定 2 特異摂動系(11), (12)において、

$$\operatorname{Re} \lambda_i \left\{ \frac{\partial g}{\partial z} \right\} \Big|_{z=\phi_0(x)} \Big|_{\epsilon=0} \leq -c < 0, \quad \forall x \in x(t), \quad \forall i \leq m \quad (20)$$

がなりたつ。ここで、 λ_i は行列の固有値、 Re は複素数の実部をあらわす。これは、早い挙動の局所安定性および(14)式が原点近傍でなりたつことを保証するための条件である。□

仮定 3 特異摂動系(12)の初期値 z_0 が、境界層システム(19)の漸近安定領域に含まれている。□
すると、次の Tikhonov の定理がなりたつ。

定理 1 (Tikhonov の定理) 仮定 2 と 3 がみたされるなら、 $t \geq 0$ での特異摂動系(11), (12)の挙動は、

$$x(t) = \bar{x}(t) + O(\epsilon) \quad (21)$$

$$z(t) = \bar{z}(t) + \bar{z}(\tau) \Big|_{\tau=t/\epsilon} - \bar{z}(0) + O(\epsilon) \quad (22)$$

のように表すことができる。 $\bar{x}(t)$ は $\epsilon = 0$ のときの低次元化システム(16)の挙動、 $\bar{z}(t)$ は $\bar{z}(t) = \phi_0(\bar{x}(t))$ であり、 $\bar{z}(\tau)$ は境界層システム(19)の挙動である。

さらに、ある時刻 $t_1 > 0$ より以降の $z(t)$ は、

$$z(t) = \bar{z}(t) + O(\epsilon) \quad (23)$$

となる。□

これは、 ϵ が十分小さければ、 (x, z) は $\phi_0(x)$ に近いある多様体

$$z = \phi(x, \epsilon) \quad (24)$$

に漸近するように動くことを意味している (Fig.1)。系の初期値を $(x, z) = (x, \phi(x, \epsilon))$ となるようにとると、その後の (x, z) も $z = \phi(x, \epsilon)$ 上を動く。よって、(24)式は不変多様体の 1 つであり、不変多様体条件

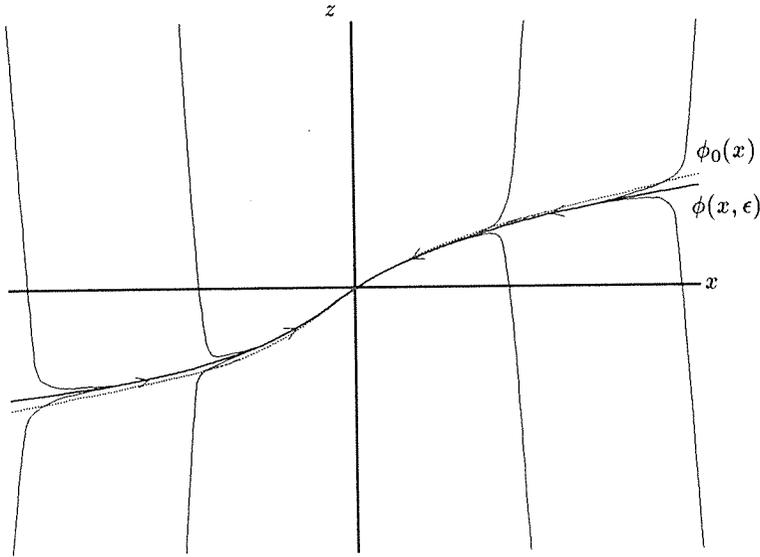


Fig. 1 Invariant manifold $\phi(x, \epsilon)$ and its approximated manifold $\phi_0(x)$

$$g(x, \phi(x, \epsilon), \epsilon) = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x, \phi(x, \phi(x, \epsilon), \epsilon), \epsilon) \tag{25}$$

満たす。また、

$$\phi(x, \epsilon) \rightarrow \phi_0(x), \quad \epsilon \rightarrow 0 \tag{26}$$

となる。 $\phi(x, \epsilon)$ の一意性は、拡張系、

$$x' = \epsilon f(x, z, \epsilon) \tag{27}$$

$$z' = g(x, z, \epsilon) \tag{28}$$

$$\epsilon' = 0 \tag{29}$$

の中心多様体が一意であるかどうかによって決定される。

4. トラッキング問題

本章では、(1), (2), (3)式を(9), (10)式に追従させる複合制御 (composite control) について考察する。複合制御とは、速い状態を制御するための状態フィードバック $u_f(\cdot)$ と遅い状態を制御するための状態フィードバック $u_s(\cdot)$ を組み合わせて制御する方法である。従来、複合制御はトラッキング問題ではなく漸近安定化問題に用いられ、 u_f と u_s の組み合わせかたも、

$$u = u_f(\cdot) + u_s(\cdot) \tag{30}$$

と単に線形の和で表現されていた。ここでは、

$$u = u_f(x, z, u_s(x, w)) \tag{31}$$

の形、あるいは、 ϵ が設計者にとって既知である場合は、

$$u = u_f(x, z, u_s(x, w, \epsilon), \epsilon) \tag{32}$$

の形のフィードバック則を提案する。

(30)式の u_f と u_s の設計手順として、いろいろな方法が提案されている。たとえば Kokotovic¹⁾ らの方法では、まず低次元化システムに関するリアプノフ関数が存在するように u_s を決め、次に境界層システムのリアプノフ関数が存在しかつ準定常状態では零となるような u_f を設計する。そして最後に、ゆっくりとした時変系に対するリアプノフ関数が存在すること（相互条件）を確認する。この方法は十分条件であり、リアプノフ関数が存在してもそれを求めることは困難である。しかも、系の漸近特性のみ着目しており、その他の制御には向かない。

Sharkey²⁾ による方法はまったく異なり、速い挙動を制御するフィードバック u_f から先に決定する。速い状態の安定性を満たし不変多様体が存在するような u_f を決め、 u_s によって不変多様体の形を要求された設計多様体に近づける。最後に、速い状態の安定性を確認する。この方法は幾何学的アプローチによる方法で、今回目的とするトラッキング問題に応用しやすい。しかし、計算の精度は ϵ に依存し、フィードバックに ϵ を許すのであれば精度を上げることができるが、その計算は複雑となる。

Su⁴⁾ による方法は、これら2つをあわせたような方法であり精度は良いが、元々の制御対象に対する制限がきつい。

ここでは、Sharkey²⁾ の漸近安定化問題に関する方法をもとに、(31)、(32)式の形に u_f と u_s の合成法を一般化し、トラッキング問題に拡張する。

4.1 速い状態の制御則

まず、速い状態 z を有界に保つフィードバック則 u_f を設計する。外部システムの状態量 w および目標軌道 r も、 x と同様に、 z に比べれば遅く動くのであるから、 x 、 w 、 r は、境界層システムでは定数とみなせる。

境界層システムに対するフィードバックをまず考えるので、次の仮定が必要である。

仮定 4 境界層システム(19)は強可到達 (strong accessible) である。□

さて、(31)式を(19)式に代入すると、

$$z' = g(x, z, u_f(x, z, u_s(x, w)), 0) \quad (33)$$

となる。(右辺) = 0 について解いた式、

$$z = \bar{\phi}(x, w, u_s(x, w)) = \phi_0(x, w) \quad (34)$$

が、 $\epsilon \rightarrow 0$ のときの不変多様体となる。速い状態のフィードバック則 u_f は、 $z = \phi_0(x, w)$ における(33)式の z に関する Jacobi 行列の固有値の実部が負になるように選ぶ。すなわち、

$$\operatorname{Re} \lambda_i \left\{ \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial u} \bigg|_{u=u_f(\cdot)} \frac{\partial u_f}{\partial z} \right\} \bigg|_{z=\bar{\phi}(x, w, u_s(x, w))} \bigg|_{\epsilon=0} \leq c < 0, \quad \forall x \in x(t), \quad \forall i \leq m \quad (35)$$

となるように選ぶこととする。ところで、(35)式の Jacobi 行列は、(34)式によって決定される z の値における値であるが、この時点ではまだ $u_s(x, w)$ は未定であることに注意しなくてはならない。よって、とりあえず、不変多様体 ϕ_0 の形を仮定して設計を進め、最後にもう一度(35)式を確かめる必要がある。

しかし、本論文の方法では、(31)式のように u_s を非線形に選ぶことができるので、 x 、 u_s によらずに Jacobi 行列を選ぶことが可能な場合がある。たとえば、 x を定数 x_0 とみなした境界層システム

の状態線形化ができる場合である。すでに状態線形化が可能であるための条件は明確に得られている⁵⁾。すなわち、すべての x_0 に対し、境界層システムが強可到達で、かつ、

$$F(z) = (g(x_0, z, 0)^T, 0)^T \quad (36)$$

$$G = (0, \dots, 0, 1)^T \quad (37)$$

とおいたとき、次の条件が満たされる場合である。

仮定 5 $m+1$ 次元ベクトル場によって張られるディストリビューション、

$$\Delta = \text{span}(G, [F, G], [F, [F, G]], \dots, \underbrace{[F, [F, \dots, [F, G] \dots]}_{m\text{-times}}]) \quad (38)$$

が次元一定で対合的(involutive)である。ただし、 $[\cdot, \cdot]$ はリ一括弧積を意味している。□

この線形化可能条件は、 $m=1$ であるか、あるいは、 $m=2$ かつ g が u に関して線形であるならば必ず満たされる。この条件が満たされれば、座標変換、

$$\eta = \Phi(x, z) \in R^m, \quad \text{rank} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = m \quad (39)$$

が存在し、境界層システムを、

$$\eta' = A_f \eta + b_f u_s(x, w) \quad (40)$$

と線形化するフィードバック、

$$u = u_f(x, z, u_s) \quad (41)$$

が存在する。また、 A_f の固有値は自由に選ぶことができるので、すべての固有値の実部を負に選ぶこととする。これで、仮定2, 3が満たされ、十分小さな ϵ に対して、速い挙動の安定性は保証される。このとき、 $\epsilon \rightarrow 0$ としたときの不変多様体は、

$$z = \phi_0(x, w) = \bar{\phi}(x, u_s(x, w)) = \Phi^{-1}(-A_f^{-1} b_f u_s(x, w), x) \quad (42)$$

となる。

4.2 遅い状態の制御則

本節では、制御対象の出力 $y(t)$ を目標信号 $r(t)$ に追従させることを目的とする。

ここで、出力の追従誤差 $e(t)$ を、

$$e(t) = y(t) - r(t) \quad (43)$$

と定義する。すると、みかけ上の制御対象は、(1)式に(42)式を代入した低次元化システム、

$$\dot{x} = \tilde{f}(x, u_s) = f(x, \bar{\phi}(x, u_s), u_f(x, \bar{\phi}(x, u_s), u_s), 0) \quad (44)$$

$$\dot{w} = \gamma(w) \quad (45)$$

$$e = h(x, 0) - \delta(w) \quad (46)$$

となる。この低次元化されたシステムに対して $e(t)$ を0とする $u_s(x, w)$ を設計することが本節の目的である。

まず、低次元化システムの相対次数(relative order)を、

$$\rho = \min_{k > 0} \left\{ \frac{\partial L_{\tilde{f}^k(x, u_s)}(h(x, 0))}{\partial u_s} \neq 0 \right\} \quad (47)$$

と定義する。 L_f はリ－微分作用素である。系の解析性より、相対次数 ρ はほとんどいたるところで一定の値を持つが、今回は、取り得るすべての x, u_s において ρ は一定と仮定する。また、 ρ が無限大になるときは低次元化システムが出力可制御ではないことを意味しているので、 ρ は有限の値 ($\leq n$) をとるものとする。

ここで、座標変換、

$$(x, w) \mapsto (\Psi(x, w), w) \quad (48)$$

を、

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, w) &= e = h(x, 0) - \delta(w) \\ \Psi_2(x, w) &= L_{\tilde{f}}(h(x, 0)) - L_{\gamma} \delta \\ \Psi_3(x, w) &= L_{\tilde{f}}^2(h(x, 0)) - L_{\gamma}^2 \delta \\ &\vdots \\ \Psi_{\rho}(x, w) &= L_{\tilde{f}}^{\rho-1}(h(x, 0)) - L_{\gamma}^{\rho-1} \delta \\ \text{rank } \frac{\partial \Psi(x, w)}{\partial x} &= n \end{aligned} \quad (49)$$

となるように選ぶ。新しい状態変数を $\xi = \Psi(x)$ とすると、低次元化システムでの ξ の挙動は、

$$\begin{aligned} y &= \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{\rho-1} &= \xi_{\rho} \\ \dot{\xi}_{\rho} &= L_{\tilde{f}^{\rho}(x, u_s)}(h(x, 0)) - L_{\gamma}^{\rho} \delta \\ \dot{\xi}_{\rho+1} &= \beta_1(\xi, w, u_s) \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_n &= \beta_{n-\rho}(\xi, w, u_s) \end{aligned} \quad (51)$$

となる。したがって、

$$L_{\tilde{f}^{\rho}(x, u_s)}(h(x, 0)) - L_{\gamma}^{\rho} \delta(w) = -\alpha_0 \xi_1 - \cdots - \alpha_{\rho-1} \xi_{\rho} \quad (52)$$

となるように選べば、

$$\frac{d^{\rho} e}{dt^{\rho}} + \alpha_{\rho-1} \frac{d^{\rho-1} e}{dt^{\rho-1}} + \cdots + \alpha_1 \frac{de}{dt} + \alpha_0 e = 0 \quad (53)$$

となるので、特性多項式、

$$s^{\rho} + \alpha_{\rho-1} s^{\rho-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 \quad (54)$$

が Hurwitz 多項式となるように $\alpha_0, \dots, \alpha_{\rho-1}$ を選べば、低次元化システムの出力 e は 0 に漸近する。したがって、遅い状態に関するフィードバック u_s は、(52)式に $\xi = \Psi(x, w)$ を代入し u_s につい

て解いた式,

$$u_s = u_s(x, w) \quad (55)$$

によって得られる。相対次数の定義より, (52)式を u_s について解くことは常に可能である。

追従誤差の動特性を表現する(53)式は ρ 次であり, 低次元化システムの閉ループ系においては, $n - \rho$ 次の動特性が出力 y からは見えない (不可観測) ことに注意すべきである。このキャンセルされたダイナミクスは,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{\rho+1} &= \beta_1(\xi, w, u_s(\Psi^{-1}(0, \dots, 0, \xi^{\rho+1}, \dots, \xi^n, w), w)) \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_n &= \beta_{n-\rho}(\xi, w, u_s(\Psi^{-1}(0, \dots, 0, \xi^{\rho+1}, \dots, \xi^n, w), w)) \end{aligned} \quad (56)$$

によって表現される。すなわち, 低次元化システムのゼロダイナミクスが, (50)式および(9)式で与えられる。内部安定性の観点から, 次の仮定をおく。

仮定 6 低次元化システムのゼロダイナミクス(56), (9)の挙動は有界である。□

以上により, (41), (55)式を組み合わせた, (31)式を制御則として用いると, Tikhonov の定理より, ϵ のオーダーの精度で y が r に追従する。

制御則に w が含まれているが, 実際に必要となるのは, $r, dr/dt, d^2r/dt^2, \dots, d^\rho r/dt^\rho$ であり, 目標値関数とその ρ 回までの微分がわかれば w は必要ない。

5. 例 題

例題として, 以下のような系を考える。

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2^2 + (x_2^2 + 1)z + x_2 u \end{pmatrix} \quad (57)$$

$$\epsilon \dot{z} = x_1 x_2 + z + (1 + x_1^2) u \quad (58)$$

$$y = x_1 \quad (59)$$

また, 追従すべき関数を $r(t)$ とし, 有限次の外部システムで生成され得る関数のクラスに含まれていると仮定する。

通常の特異摂動を考えない非線形系の追従制御則を求めると,

$$u = \frac{-x_2^2 - (x_2^2 + 1)z - \alpha_0(x_1 - r) - \alpha_1(x_2 - \dot{r})}{x_2}, \quad \alpha_0, \alpha_1 > 0 \quad (60)$$

となる。この制御則の分母に x_2 があり, $x_2 = 0$ で入力が発散してしまう。これは, 相対次数が $x_2 = 0$ で変化する系だからである。

この制御対象に対し本論文の方法を適用する。まず, u_f を,

$$u_f = \frac{-x_1 x_2 - (a+1)z + u_s}{1 + x_1^2}, \quad a > 0 \quad (61)$$

とすると,

$$\epsilon \dot{z} = -az + u_s \quad (62)$$

となり, $\bar{\phi}_0$ は,

$$z = \bar{\phi}_0(x) = \frac{u_s}{a} \quad (63)$$

となる。 u_f を x の挙動を表す式に代入し、低次元化システム、

$$\dot{x} = \left(x_2^3 + \frac{-x_1 x_2^2 - x_2(a+1)z}{1+x_1^2} + \left\{ \frac{x_2^2+1}{a} + \frac{x_2}{1+x_1^2} \right\} u_s \right) \quad (64)$$

を得る。 $a < 2$ とすることにより u_s を、

$$u_s = - \left\{ \frac{x_2^2+1}{a} + \frac{x_2}{1+x_1^2} \right\}^{-1} \left\{ x_2^3 + \frac{-x_1 x_2^2 - x_2(a+1)z}{1+x_1^2} + \alpha_0(x_1 - r) + \alpha_1(x_2 - \dot{r}) \right\} \quad (65)$$

と決定すれば、低次元化システムの追従誤差 $e = y - r$ は、

$$\ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_0 e = 0 \quad (66)$$

に従う。よって、 α_0, α_1 を正とすれば、十分小さな ϵ に対し ϵ の 1 次のオーダーの誤差で追従する。

また、本文では触れなかったが、1 型のサーボを構成するためには、

$$u_s = - \left\{ \frac{x_2^2+1}{a} + \frac{x_2}{1+x_1^2} \right\}^{-1} \left\{ x_2^3 + \frac{-x_1 x_2^2 - x_2(a+1)z}{1+x_1^2} + \alpha_{-1} \int e dt + \alpha_0(x_1 - r) + \alpha_1(x_2 - \dot{r}) \right\} \quad (67)$$

とすればよい。すると、低次元化システムに対する出力の誤差は、

$$\ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_0 e + \alpha_{-1} \int e dt = 0 \quad (68)$$

となり、

$$s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_0 s + \alpha_{-1} \quad (69)$$

が Hurwitz 多項式であれば、十分小さな ϵ に対し ϵ の 1 次のオーダーの誤差で追従する 1 型のサーボ系が実現される。

6. 結 論

本論文では、非線形特異摂動系に対し、特異摂動理論を用いた系の低次元化を行い、低次元化された系に対して外部入力に追従させる制御則の新たな構成法を提案した。速い状態を制御するフィードバックと遅い状態を制御するフィードバックを合成する際に、 u_s と u_f の単純な和ではなく、 u_s に関して非線形となるような合成法を用いることで、文献 2 の設計アルゴリズムから試行錯誤的な部分を取り除いた。さらに、外部システムを考えることで、漸近安定化以外の出力のトラッキング問題に特異摂動理論を応用できることを示した。

系の低次元化を行うことの利点としては、

- 次元を減らすことで、問題を簡単にすることができる。
- 例題に示したように、相対次数がある点の近傍で一定ではない場合にも、近似トラッキングが可能である。

- 元の系のゼロダイナミクスが不安定でも、低次元化システムのゼロダイナミクスが不安定とは限らないので、非線形非最少位相系にも適用することができる。

などが挙げられる。

追従の精度は ϵ の 1 次のオーダーであったが、不変多様体条件をうまく使うことで、次数を上げることができる可能性がある。これに関しては、また稿を改めて報告したい。

参考文献

- 1) P. V. Kokotovic, H. K. Khalil and J. O'Reilly: Singular Perturbation Methods in Control, *Analysis and Design*, (1986), Academic Press, London
- 2) P. M. Sharkey and J. O'Reilly: Composite control of non-linear singularly perturbed systems: a geometric approach, *Int. J. Control*, **48**, (1988), 6, pp. 2491-2506
- 3) R. Marino and P. V. Kokotovic: A Geometric approach to nonlinear singularly perturbed control system, *Automatica*, **24**, (1988), 1, pp. 31-41
- 4) J.-P. Su and J.-G. Hsieh: Composite feedback control for a class of non-linear singularly perturbed systems with gas actuators, *Int. J. Control*, **52**, (1990) 3, pp. 571-579
- 5) A. J. van der Schaft: Linearization and input-output decoupling for general nonlinear systems, *System Control Lett.*, **5**, (1984), 1, pp. 27-33
- 6) A. Isidori: *Nonlinear Control Systems: An Introduction*, 2nd. ed., (1989), Springer-Verlag
- 7) P. M. Sharkey: Composite control of non-linear singularly perturbed systems: meeting a design object, *Int. J. Control*, **50**, (1989), 6, pp. 2173-2186
- 8) K. Khorasani and P. V. Kokotovic: Feedback linearization of flexible manipulator near its rigid body manifold, *System Control Lett.*, **6**, (1985), 3, pp. 187-192