北海道大学工学部研究報告
第167号（平成6年）

Bulletin of the Faculty of Engineering
Hokkaido University, No. 167 (1994)

ファジィ関係方程式の極小解の集合の性質

宮腰　政明　　今井　英幸　　伊達　　惇

（平成5年8月31日受理）

Properties of a Set of Minimal Solutions for a Fuzzy Relation Equation

Masaaki MIYAKOSHI Hideyuki IMAI and Tsutomu DA-TE

(Received August 31, 1993)

Abstract

A fuzzy relation equation (hereinafter abbreviated by f. r. e.) is closely related to fuzzy inference or fuzzy control and hence it is of applicational importance. Also, from the mathematical viewpoint, the set of all solutions of an f. r. e. is interested because of its algebraic structure.

Especially, for a finite f. r. e., defined on finite index sets, we may recapitulate the following remarkable results: (i) the existence condition of a solution for a finite f. r. e., (ii) the existence condition of minimal solutions for a finite f. r. e., and (iii) the set of all solutions is completely determined by the greatest solution and the minimal ones.

On the contrary, if the cardinal numbers of the index sets are greater than or equal to the countable infinity, the minimal solution(s) may exist or may not. The condition under which the minimal solution(s) can exist for a general f. r. e. is not yet given.

In this paper, we present some properties of the set of the minimal solution(s) of a general f. r. e. using the attainability (unattainability) of a solution. These properties may give us some fundamentals for the existence condition of the minimal solution(s) for a general f. r. e.

1．まえがき

ファジィ集合論におけるファジィ関係とその合成はファジィ推論及びファジィ制御の中で，前提と推論規則の中に含まれるあいまいさを結論に反映させる一つの方法として用いられる。P′を入力空間上のファジィ集合，P→Qを入出力空間上のファジィ関係とするとき，この推論

$$\frac{P',\ P \to Q}{Q'} \text{ (modus ponens)}$$

の結論Q′は出力空間上のファジィ集合となり，ファジィ関係の合成○を用いて，次の様に解釈し，

$$P' \circ (P \to Q) = Q'$$

情報工学科　情報数理工学講座

と表わす。この式において，推論規則 $P \to Q$ と結論 Q' が既知のとき，どの様な前提 P' を用いればよいかを考察するとき，P' を未知変数とする方程式と上式をみなしうる。この方程式はファジィ関係の合成を用いており，ファジィ関係方程式[6]といわれている。

一般に，ファジィ関係方程式は次の様に定式化される。

任意の添字集合 $I=\{i\}$，$J=\{j\}$とある完備 Brouwer 束[6]上の値をとる係数行列 $A=(a_{ij})$，定数ベクトル $\mathbf{b}=(b_j)$（行列とベクトルの要素は無限個の場合もある）が与えられたとき，等式

$$\mathbf{x} \circ A=\mathbf{b} \tag{1}$$

または，要素毎に表わして，

$$\bigvee_{i \in I} (x_i \wedge a_{ij})=b_j \quad (j \in J)$$

はファジィ関係方程式といわれる。但し，$\mathbf{x}=(x_i)$で，$\circ$ は$\vee$-$\wedge$合成であり，$\vee$，$\wedge$は束における上限，下限を表わす。A，$\mathbf{b}$ が与えられたとき，式(1)を満足する $\mathbf{x}$ を方程式の解[6]といい，解全体の集合を$\mathfrak{X}$と表わす。

ファジィ関係方程式の解の存在条件，特に最大限による解の存在条件[6]及び解集合の構造[6]については多くの研究がある[1)3)-7)]。しかし，これらの研究は添字集合 I，J が有限集合に限定されたもので，最も特長的な性質が，I，J が有限集合ならば，ファジィ関係方程式は極小解[2]をもち，解集合は最大解と極小解達により完全に決定されるというものである[2]。ところが，一般に添字集合 I が可算無限以上の濃度をもつとき，極小解が存在する場合も，存在しない場合もある。また，極小解の存在条件さえ明らかではない。本研究では添字集合 I が可算無限以上の濃度をもつとき，方程式(1)が解をもつとき，極小解の集合の性質を考察する。一般に，ファジィ関係方程式の議論は完備 Brouwer 束上で行なわれるが，ここでは，それ自身完備 Brouwer 束でもある単位閉区間[0，1]上でファジィ関係方程式を考察する。従って式(1)中のすべての x_i，a_{ij}，b_j は単位閉区間[0, 1]中の数値である。また定数ベクトル $\mathbf{b}$ は恒等的に $\mathbf{o}$ ではないものとする。また，$\vee$，$\wedge$は各々，max，min となる。

2．準　　備

ここでは，準備のため若干の定義と既知の結果[1)-7)]について述べる。

［定義１］　(P, ≦) を半順序集合とし，$X \subseteq P$ とする。要素 $p \in X$ は

$$\neg(^{\exists} x \in X (x < p))$$

が真であるとき X の極小元であるという。これは，$((x \leqq p) \to (x=p)$ といい換えてもよい。

要素 $g \in X$ は，

$$(^{\forall} x \in X (x \leqq g))$$

が真であるとき，X の最大元であるという。

［定義２］　二つのベクトル $\mathbf{a}=(a_i)$，$\mathbf{c}=(c_i)$ に対し，

$$\mathbf{a} \leqq \mathbf{c} \Leftrightarrow a_i \leqq c_i \, (^{\forall} i \in I)$$

として，ベクトルの集合に半順序≦を定義する。

［定義３］[2)6)] $([0,\ 1]^I, \leqq)$ を定義２で定義された半順序≦をもつ添字集合 I 上のベクトルの全体

とし，$\mathfrak{X}\subseteqq[0,\ 1]^{I}$ を方程式(1)の解集合とする。$\mathfrak{X}$の極小元を方程式(1)の極小解といい，$\mathfrak{X}$の最大元を方程式(1)の最大解という。特に，方程式(1)の極小解すべての集合を$\mathfrak{X}_0$で表わす。

［定義3］[6]　任意の a，b$\in[0,\ 1]$に対し，

$$a\alpha b \triangleq \begin{cases} 1 & \text{if } a\leqq b \\ b & \text{otherwise} \end{cases}$$

とし，

$$A\alpha\mathbf{b}^{-1}\triangleq(\bigwedge_{j\in J}(a_{ij}\ \alpha\ b_j))$$

とする。このとき，$A\alpha\mathbf{b}^{-1}\in[0,\ 1]^{I}$ である[6]。

このセクションの最後に方程式(1)の解が存在するか否かの判定方法として **Sanchez**[6] によって得られた定理と添字集合 I，J が有限集合であるとき，解集合が極小解達と最大解によって完全に決定されることを示す定理を述べる。

［定理1］[6]　方程式(1)の解集合を$\mathfrak{X}$とするとき，

$$\mathfrak{X}\neq\emptyset \ \Leftrightarrow\ A\alpha\mathbf{b}^{-1}\in\mathfrak{X}$$

そして，そのとき，$A\alpha\mathbf{b}^{-1}$ は方程式(1)の最大解である。

［定理2］[2]　添字集合 I，J が有限で，方程式(1)が解をもつとき，すなわち$\mathfrak{X}\neq\emptyset$ならば$\mathfrak{X}_0\neq\emptyset$であり，そのとき，

$$\mathbf{x}\in\mathfrak{X}\longleftrightarrow(^{\exists}\mathbf{x}_1\in\mathfrak{X}_0)(\mathbf{x}_1\leqq\mathbf{x}\leqq A\alpha\mathbf{b}^{-1})$$

が成立する。

3．解の到達可能性

本研究では方程式(1)の極小解の集合の性質を考察するので，方程式(1)は解をもつと仮定し，すなわち，以後$\mathfrak{X}\neq\emptyset$とする。従って，定理1によって，

$$\mathbf{g}\circ A=\mathbf{b},\ \ \mathbf{g}\triangleq A\alpha\mathbf{b}^{-1}$$

かつ，

任意の $\mathbf{u}\in\mathfrak{X}$に対し，$\mathbf{u}\leqq\mathbf{g}$

が成立する。

さて，添字集合 I が有限集合のとき，任意の $\mathbf{u}=(u_i)\in\mathfrak{X}$に対し，

$$\bigvee_{i\in I}(u_i\wedge a_{ij})=b_j \qquad j\in J$$

となるので，

$$(^{\forall}j\in J)(^{\exists}i_j\in I)(u_{i_j}\wedge a_{i_j j}=b_j) \tag{2}$$

が成立する。しかし，添字集合 I が無限集合のとき，式(2)は例一にみられる様に成立しない場合もある。また，後で示すように例一は極小解をもたない方程式の例にもなっている。

［例1］　添字集合 I，J を各々，次の様にとる。

$I=\{x|$ 開区間$(0,\ 1)$の中の無理数 x の全体$\}$

$J=\{r|$ 区間$(0,\ 1)$の中の有理数 r の全体$\}$

u, A を次の様に定義する。

$$\mathbf{u}(x)\triangleq x\epsilon I,\quad A(x,\ r)\triangleq 1 \quad 0<x\leqq r$$
$$\triangleq 0 \quad r<x$$

このとき，

$$\bigvee_{x\epsilon I}(\mathbf{u}(x)\wedge A(x,\ r))=\bigvee_{0<x\leqq r} x=r$$

となるので，$\mathbf{b}(r)\triangleq r$ と定義すると，

$$\mathbf{u}\circ A=\mathbf{b}$$

が成立し，従って，A，**b** が上述の様に与えられた方程式(1)は，**u** を解としてもつ。

このとき，最大解 $\mathbf{g}=(\mathbf{g}(x))$ は

$$\mathbf{g}(x)=\bigwedge_{r\epsilon J}(A(x,\ r)\alpha\mathbf{b}(r))=\bigwedge_{0<x\leqq r} r=x$$

となる。

任意の解 $\mathbf{v}=(\mathbf{v}(x))\epsilon\mathfrak{X}$ は式(2)を満足しない。実際，**v** が式(2)を満たすと仮定すれば，

$$(^{\forall}r\epsilon J)(^{\exists}x_r\epsilon I)(\mathbf{v}(x_r)\wedge A(x_r,\ r)=\mathbf{b}(r)=r)$$

従って，任意の r について，ある $x_r\epsilon I$ が存在して，

$$\mathbf{v}(x_r)\wedge A(x_r,\ r)=r$$

となり，$0<r\leqq 1$であるから，$0\leqq x_r\leqq r$ でなければならない。すなわち，$A(x_r,\ r)=1$である。故に，$\mathbf{v}(x_r)\leqq\mathbf{g}(x_r)$となる。**g** は最大解であるので，任意の $x\epsilon I$ に対し，$\mathbf{v}(x)\leqq\mathbf{g}(x)$。従って，$\mathbf{v}(x_r)\leqq\mathbf{g}(x_r)$となる。一方，$\mathbf{v}(x_r)=r=\mathbf{g}(x_r)=x_r$ は不可能である。何故ならば r は有理数，x_r は無理数であるから。故に，$\mathbf{v}(x_r)<\mathbf{g}(x_r)$となる。これは $r<x_r$ を意味するが，このとき，$A(x_r,\ r)=0$となり，

$$\mathbf{v}(x_r)\wedge A(x_r,\ r)=0\neq r>0$$

となるので，$\mathbf{v}(x_r)<\mathbf{g}(x_r)$も不可能となり，矛盾が導出される。

以上の例にみる様に式(2)は，極小解の存在に関わる条件を与えると考えられる。ここでは，式(2)を到達可能性の定義として採用する。

［定義４］　$\mathfrak{X}\neq\emptyset$ とする。$\mathbf{u}=(u_i)$と書くとき，

$\mathbf{u}\epsilon\mathfrak{X}$が到達可能（attainable）である。　$\Leftrightarrow(^{\forall}j\epsilon J)(^{\exists}i_j\epsilon I)(u_{i_j}\wedge a_{i_j j}=b_j)$

$\mathbf{u}\epsilon\mathfrak{X}$が到達不能（unattainable）である。$\Leftrightarrow(^{\forall}j\epsilon J)(^{\forall}i\epsilon I)(u_i\wedge a_{ij}<b_j)$

便宜上，次の記号を導入する。

$\mathfrak{X}^{(+)}\triangleq\mathfrak{X}$の要素で，到達可能な要素の全体。

$\mathfrak{X}^{(-)}\triangleq\mathfrak{X}$の要素で，到達不能な要素の全体。

添字集合 I が有限ならば，方程式の解はすべて到達可能であるから，$\mathfrak{X}^{(+)}=\mathfrak{X}$，$\mathfrak{X}^{(-)}=\emptyset$である。一方，I が無限集合の場合，例１にみられる様に，$\mathfrak{X}^{(+)}=\emptyset$，$\mathfrak{X}^{(-)}=\mathfrak{X}$となる場合もある。

今，各 $j\epsilon J$ と $u=(u_i)\epsilon\mathfrak{X}$に対し，

$$\delta_u(j) \triangleq \{i_j \mid u_{i_j} \wedge a_{i_j j} = b_j\}$$

とするとき，定義4より，$\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^{(+)} \longleftrightarrow (^\forall j \in J)(\delta_u(j) \neq \emptyset)$ となるのは明らかである。

以下で到達可能（不能）に関する若干の性質を証明する。

［性質1］　(1) $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^{(+)}$，$\mathbf{v} \in \mathfrak{X}$ かつ $\mathbf{u} \leqq \mathbf{v}$ ならば，$\mathbf{v} \in \mathfrak{X}^{(+)}$。このとき $(^\forall j \in J)(\delta_u(j) \subseteqq \delta_v(j))$

(2) $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^{(-)}$，$\mathbf{v} \in \mathfrak{X}$ かつ $\mathbf{v} \leqq \mathbf{u}$ ならば，$\mathbf{v} \in \mathfrak{X}^{(-)}$。

（証明）(1)の証明：$\mathbf{u} = (u_i)$，$\mathbf{v} = (v_i)$ とする。仮定 $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^{(+)}$ より，任意の $j \in J$ とある $i_j \in I$ に対し，$u_{i_j} \wedge a_{i_j j} = b_j$ となる。一方，$\mathbf{u} \leqq \mathbf{v}$ より，$(u_i \leqq v_i)(^\forall i \in I)$ であるから，$b_j = u_{i_j} \wedge a_{i_j j} \leqq v_{i_j} \wedge a_{i_j j}$ となる。一方，$\mathbf{v} \in \mathfrak{X}$ であるので

$$v_{i_j} \wedge a_{i_j j} \leqq \bigvee_{i \in I}(v_i \wedge a_{ij}) = b_j$$

となり，$b_j = v_{i_j} \wedge a_{i_j j} \leqq b_j$，すなわち，$v_{i_j} \wedge a_{i_j j} = b_j$ を得る。(1)の後半の証明は前半の証明で得られた，$v_{i_j} \wedge a_{i_j j} = b_j$ より

$\delta_u(j) \ni i_j \rightarrow \delta_v(j) \ni i_j$ が得られる。

(2)の証明：仮定 $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^{(-)}$ より，

$$(^\forall j \in J)(^\forall i \in I) \quad (u_i \wedge a_{ij} \leqq b_j)$$

であるから，$\mathbf{v} \leqq \mathbf{u}$，すなわち，

$$(^\forall i \in I)(v_i \leqq u_i) \text{ より，} v_i \wedge a_{ij} \leqq u_i \wedge a_{ij} < b_j$$
$$(^\forall j \in J)(^\forall i \in I) \quad (v_i \wedge a_{ij} < b_j)$$

を得る。

（証明終）

この性質1より，次の性質2を得る。

［性質2］

$$\mathfrak{X}^{(+)} \neq \emptyset \longleftrightarrow \mathbf{g} \in \mathfrak{X}^{(+)}$$

また，$\mathfrak{X}^{(+)} \neq \emptyset$ ならば，

$$(^\forall j \in J)\Big(\bigcup_{u \in \mathfrak{X}^{(+)}} \delta_u(j) = \delta_g(j)\Big)$$

（証明）まず，前半の命題を証明する。(←) は自明である。

(→) の証明：$\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^{(+)}$ とする。一方，$\mathbf{g} \in \mathfrak{X}$ で，$\mathbf{u} \leqq \mathbf{g}$ であるから，性質1(1)より，$\mathbf{g} \in \mathfrak{X}^{(+)}$ を得る。

後半の命題は，仮定 $\mathfrak{X}^{(+)} \neq \emptyset$ より，$\mathbf{g} \in \mathfrak{X}^{(+)}$ であるから，任意の $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^{(+)}$ に対し，$\mathbf{u} \leqq \mathbf{g}$ であることと性質1の後半の命題より導かれる。（証明終）

さて，このセッションの最後の部分は，解の到達可能性の定義より，解集合の特別な部分集合を構成できることを示す。以後，特に断わらなければ $\mathfrak{X}^{(+)} \neq \emptyset$ と仮定する。

［定義5］　写像 $\delta : J \rightarrow \bigcup_{j \in J} \delta_g(j)$

であって，

$\rho(\mathrm{j})\in\delta_{\mathrm{g}}(\mathrm{j})$

となるものの全体を δ^{J} と表わす。

この定義より $\mathfrak{X}^{(+)}\neq\emptyset$ すなわち $\mathbf{g}\in\mathfrak{X}^{(+)}$ であるから，$\delta^{\mathrm{J}}\neq\emptyset$ となる。

［定義6］　写像 $\xi:\delta^{\mathrm{J}}\to[0,1]^{\mathrm{I}}$ を次の様に定義する。

$\rho\in\delta^{\mathrm{I}}$ に対し，$\xi(\rho)\triangleq(\xi(\rho)_{\mathrm{i}})$，写像 ρ の値域を $\mathrm{Im}\rho$ とするとき，

$\mathrm{i}\in\mathrm{Im}\rho$ ならば　$\xi(\rho)_{\mathrm{i}}\triangleq\vee\{\mathrm{b_j}|\mathrm{i}=\rho(\mathrm{j})\}$

$\mathrm{i}\notin\mathrm{Im}\rho$ ならば　$\xi(\rho)_{\mathrm{i}}\triangleq0$

このとき，次の性質が成立する。

［性質3］　$\mathfrak{X}^{(+)}\neq\emptyset$ とする。任意の $\rho\in\delta^{\mathrm{J}}$ に対し

（i）　$\xi(\rho)\leqq\mathbf{g}$

（ii）　$\xi(\rho)\in\mathfrak{X}$

（iii）　$\xi(\rho)\in\mathfrak{X}^{(+)}$

（証明）（i）の証明：$\mathrm{i}\in\mathrm{Im}\rho$ のとき，定義より $\xi(\rho)_{\mathrm{i}}=0\leqq\mathrm{g_i}$。一方，$\mathrm{i}\in\mathrm{Im}\rho$ のとき，定義より，$\xi(\rho)_{\mathrm{i}}=\vee\{\mathrm{b_k}|\mathrm{i}=\rho(\mathrm{k})\}$ である。$\delta_{\mathrm{g}}(\mathrm{k})$ なるすべての k に対して，$\mathrm{g_i}\wedge\mathrm{a_{ik}}=\mathrm{b_k}$ となるから，$\mathrm{g_i}\geqq\mathrm{b_k}$ となる。従って

$$\xi(\rho)_{\mathrm{i}}=\vee\{\mathrm{b_k}|\mathrm{i}=\rho(\mathrm{k})\}\leqq\mathrm{g_i}$$

となる。

（ii）の証明：今，証明した（i）より，$\xi(\rho)\leqq\mathbf{g}$ であり，$\circ$-合成は半順序≦を保存[6]するので，$\xi(\rho)\circ\mathrm{A}\leqq\mathbf{g}\circ\mathrm{A}=\mathbf{b}$ となる。従って，$\mathbf{b}\leqq\xi(\rho)\circ\mathrm{A}$ を示せばよい。任意の $\mathrm{j}\in\mathrm{J}$ を選んで固定する。このとき，

$$(\xi(\rho)\circ\mathrm{A})_{\mathrm{j}}=\bigvee_{\mathrm{i}}(\xi(\rho)_{\mathrm{i}}\wedge\mathrm{a_{ij}})=\bigvee_{\mathrm{i}\in\mathrm{Im}\rho}(\xi(\rho)_{\mathrm{i}}\wedge\mathrm{a_{ij}})$$
$$=\bigvee_{\mathrm{i}\in\mathrm{Im}\rho}((\vee\{\mathrm{b_k}|\mathrm{i}=\rho(\mathrm{k})\})\wedge\mathrm{a_{ij}})$$

$\rho(\mathrm{j})\in\mathrm{Im}\rho$ であるから，

$$\bigvee_{\mathrm{i}\in\mathrm{Im}\rho}((\vee\{\mathrm{b_k}|\mathrm{i}=\rho(\mathrm{k})\})\wedge\mathrm{a_{ij}})\geqq(\vee\{\mathrm{b_k}|\rho(\mathrm{j})=\rho(\mathrm{k})\})\wedge\mathrm{a}_{\rho(\mathrm{j})\mathrm{j}}\geqq\mathrm{b_j}\wedge\mathrm{a}_{\rho(\mathrm{j})\mathrm{j}}$$

$\rho\in\delta^{\mathrm{J}}$ であるので，$\rho(\mathrm{j})\in\delta(\mathrm{j})$ であるから，$\mathrm{g}_{\rho(\mathrm{j})}\wedge\mathrm{a}_{\rho(\mathrm{j})\mathrm{j}}=\mathrm{b_j}$ となる。従って，$\mathrm{a}_{\rho(\mathrm{j})\mathrm{j}}\geqq\mathrm{b_j}$ より，$\mathrm{b_j}\wedge\mathrm{a}_{\rho(\mathrm{j})\mathrm{j}}\geqq\mathrm{b_j}$ を得る。従って，任意の $\mathrm{j}\in\mathrm{J}$ に対し，次式を得る。

$$(\xi(\rho)\circ\mathrm{A})_{\mathrm{j}}\geqq\mathrm{b_j}$$

（iii）の証明：$\rho\in\delta^{\mathrm{J}}$ であるから，任意の $\mathrm{j}\in\mathrm{J}$ に対し，$\rho(\mathrm{j})\in\delta_{\mathrm{g}}(\mathrm{j})$ となる。（i），（ii）より，$\xi(\rho)\leqq\mathbf{g}$ であるから，$\xi(\rho)_{\rho(\mathrm{j})}\leqq\mathrm{g}_{\rho(\mathrm{j})}$ である。従って，

$$\xi(\rho)_{\rho(\mathrm{j})}\wedge\mathrm{a}_{\rho(\mathrm{j})\mathrm{j}}\leqq\mathrm{g}_{\rho(\mathrm{j})}\wedge\mathrm{a}_{\rho(\mathrm{j})\mathrm{j}}=\mathrm{b_j}$$

となる。また，$\mathrm{a}_{\rho(\mathrm{j})\mathrm{j}}\geqq\mathrm{b_j}$ である。一方，

$$\xi(\rho)_{\rho(\mathrm{j})}=\vee\{\mathrm{b_k}|\rho(\mathrm{j})=\rho(\mathrm{k})\}\geqq\mathrm{b_j}$$

となり，

$\xi(\rho)_{\rho(j)} \wedge a_{\rho(j)j} \geqq b_j$

を得る。これも前述の式より

$b_j \leqq \xi(\rho)_{\rho(j)} \wedge a_{\rho(j)j} \leqq b_j$，すなわち，$b_j = \xi(\rho)_{\rho(j)} \wedge a_{\rho(j)j}$

が導かれ，$\delta_{\xi(\rho)}(j) \ni \rho(j)$ を得る。

（証明終）

［性質 4］　$\mathfrak{X}^{(+)} \neq \emptyset$ とする。このとき，次式が成立する。

$\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^{(+)} \to (^{\exists}\rho \in \delta^{J})(\xi(\rho) \leqq \mathbf{u})$

（証明）$\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^{(+)}$ より，$\delta_u(j) \neq 0$ であり，$i_j \in \delta_u(j)$ とする。このとき，

$u_{i_j} \wedge a_{i_j} b_j$

一方，性質 2 より $i_j \in \delta_g(j)$ となり，$\rho \in \delta^J$ であって $\rho(j) = i_j$ なる ρ を構成できる。従って，この ρ に対し，

$i \in \mathrm{Im}\rho$ のとき，　$\xi(\rho)_i = 0 \leqq u_i$

$i = i_j \in \mathrm{Im}\rho$ のとき，$\xi(\rho)_i = \vee \{b_k \mid i = \rho(k)\}$

となる。また，$i = i_j = \rho(j) = p(k)$ なるすべての k に対し，

$u_j \wedge a_{ik} = b_k$

であるから，$u_i \geqq b_k$ となり

$\xi(\rho)_i = \vee \{b_k | i = \rho(k)\} \leqq u_i$

となる。故に，

$\xi(\rho) \leqq \mathbf{u}$

（証明終）

4．極小解の集合の性質

ここでは，解集合$\mathfrak{X}$が空でないとき，極小解の集合の性質を解の到達不能性を用いて考察する。次の命題は集合の性質に関して基本的な命題である。

［性質 5］　$\mathbf{u} \in \mathfrak{X}$ かつ $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^{(-)}$ とするとき，次の条件を満たす $\mathbf{v} \in [0, 1]^I$ が存在する。

(1)　$\mathbf{v} \in \mathfrak{X}$，(2) $\mathbf{v} < \mathbf{u}$，(3) $\mathbf{v} \in \mathfrak{X}^{(-)}$

（証明）さて，まえがきにも述べた様に $\mathbf{b} \doteqdot 0$ であるので，$\mathbf{u} = (u_i)$ のすべての要素は0ではない。また，$u_i \doteqdot 0$ なる要素は少くとも，可算無限個以上存在する。何故ならば，非零の u_i が有限個ならば，任意の $j \in J$ に対し，

$$\bigvee_{i \in I} (u_i \wedge a_{ij}) = \bigvee_{k=1}^{n} (u_{i_k} \wedge a_{i_k j}) = b_j$$

となり，$\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^{(+)}$ となるからである。

今，題意の条件を満たす $\mathbf{v} = (v_i)$ を次の様に構成する。

$u_i > 0$ なる要素 $u_{i_0} > 0$ を一つ選んで固定する。このとき，

$$v_i \triangleq u_i \qquad (i \neq i_o)$$
$$v_{i_o} \triangleq 0 < u_{i_o}$$

と $\mathbf{v}$ を構成する。$\mathbf{v}$ の構成方法より条件(2) $\mathbf{v} < \mathbf{u}$ は直ちに得る。
　一方，$\mathbf{u} \in \mathfrak{X}$ より

$$\mathbf{v} \circ A \leqq \mathbf{u} \circ A = \mathbf{b}$$

であるから，任意の $j \in J$ に対し，

$$\bigvee_{i \in I} (v_i \wedge a_{ij}) = \bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq i_o}} (u_i \wedge a_{ij}) \leqq \bigvee_{i \in I} (u_i \wedge a_{ij}) = b_j$$

となる。
もし，ある $k \in J$ に対し

$$b_k > \bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq i_o}} (u_i \wedge a_{ik}) \vee (u_{i_o} \wedge a_{i_o k})$$

ならば，再び，$\mathbf{u} \in \mathfrak{X}$ より

$$b_k = \bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq i_o}} (u_i \wedge a_{ik}) \vee (u_{i_o} \wedge a_{i_o k}) \vee (u_{i_o} \wedge a_{i_o k})$$

となり，

$$b_k = u_i \wedge a_{i_o k}$$

を得る。ところが，$\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^{(-)}$ であるから，これは矛盾である。従って，

$$\mathbf{v} \circ A = \mathbf{b}$$

すなわち，条件(1)を得る。
　最後に，仮定 $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^{(-)}$ と今，証明した(1) $\mathbf{v} \in \mathfrak{X}$ と(2) $\mathbf{v} < \mathbf{u}$ より，性質１の(2)より，

$$\mathbf{v} \in \mathfrak{X}^{(-)}$$

となるから，条件(3)を得る。
(証明終)
性質５は次の極小解の集合の存在範囲を与える。
［性質６］　方程式(１)の極小解の全体を $\mathfrak{X}_o$ とするとき，

$$\mathfrak{X}_o \subset \mathfrak{X} - \mathfrak{X}^{(-)}$$

(証明)　もし，$\mathfrak{X}_o = \oslash$ ならば，命題は真である。従って，$\mathfrak{X}_o \neq \oslash$ と仮定する。$\mathbf{u} \in \mathfrak{X}_o$ に対し，$\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^{(-)}$ とすると性質５より $\mathbf{v} \in \mathfrak{X}$ かつ $\mathbf{v} < \mathbf{u}$ なる $\mathbf{v}$ が存在する。これは，極小解の定義，すなわち，$\mathfrak{X}$ における極小元の定義に反する。従って $\mathbf{u} \notin \mathfrak{X}^{(-)}$ となり，命題が証明された。
(証明終)
性質６に対し，より強い命題として，次の性質が成立する。
［性質７］

$\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}^{(+)} \to \mathfrak{X}_0 \subset \xi(\delta^J)$

但し，$\xi(\delta^J) = \{\xi(\rho) \mid \rho \epsilon \delta^J\}$である。

（証明）$\mathfrak{X}_0 = \oslash$ならば，$\mathfrak{X}^{(+)} \fallingdotseq \oslash$，すなわち$\delta^J \fallingdotseq \oslash$のいかんに関わらず，命題は真である。

$\mathfrak{X} \fallingdotseq \oslash$とする。このとき，$\mathbf{u} \epsilon \mathfrak{X}_0$とする。仮定$\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}^{(+)}$より，$\mathbf{u} \epsilon \mathfrak{X}^{(+)}$となり，性質4より，$({}^{\exists}\rho_0 \epsilon \delta^J)$ $(\xi(\rho_0) \leqq \mathbf{u})$となる。今，$\mathbf{u} \epsilon \mathfrak{X}_0$，すなわち，$\mathbf{u}$は極小解であるので，性質3より，$\xi(\rho_0) \epsilon \mathfrak{X}$であるから，極小元の定義より，$\xi(\rho_0) = \mathbf{u}$となる。従って，$\mathfrak{X}_0 \subseteqq \xi(\delta^J)$となる。

（証明終）

最後に，$\mathfrak{X}^{(+)}$，$\mathfrak{X}^{(-)}$，$\mathfrak{X}_0$の状態を明らかにするため，次の二例を示す。まず，セクション3の例1において，$\mathbf{g} \epsilon \mathfrak{X}^{(-)}$であるので，任意の$\mathbf{u} \epsilon \mathfrak{X}$は$\mathbf{u} \leqq \mathbf{g}$であるから，性質1(2)より$\mathbf{u} \epsilon \mathfrak{X}^{(-)}$すなわち，$\mathfrak{X}^{(-)} = \mathfrak{X}$である。従って，性質6より$\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X} - \mathfrak{X}^{(-)} = \mathfrak{X} - \mathfrak{X} = \oslash$，つまり，$\mathfrak{X}_0 = 0$を得る。

次の例2は$\mathbf{g} \epsilon \mathfrak{X}^{(+)}$，$\mathfrak{X}^{(-)} = \oslash$，$\mathfrak{X}_0 \fallingdotseq \oslash$なる例である。

［例2］　二つの整数i，jに対し，記号$j|i$でiはjを割り切ることを表わす。割り切れない場合は記号$j \nmid i$と記す。今，二つの添字集合I，Jを次の様に定める。

$I \triangleq \{i | i \geqq 2$なる整数$\}$，$J \triangleq \{j | j \geqq 2$なる整数$\}$

このとき，$\mathbf{u} = (u_i)$と$A = (a_{ij})$を

$u_i \triangleq 1/i$

$a_{ij} \triangleq 1$　　$j|i$のとき，

$a_{ij} \triangleq 0$　　$j \nmid i$のとき，

と定める。任意の$j \epsilon J$に対し，

$$\bigvee_{2 \leq i} (u_i \wedge a_{ij}) = \bigvee_{\substack{2 \leq i \leq j \\ j|i}} (1/i) \wedge 1 = 1/\langle j \rangle$$

但し，記号$\langle j \rangle$は整数jの1以外の最小の約数を表わす。

今，$\mathbf{b} = (b_j)$に対し，$b_j = 1/\langle j \rangle$とすれば，$\mathbf{u} \circ A = \mathbf{b}$が成立し，この方程式は解をもつ。このとき，最大解$\mathbf{g} = A \alpha \mathbf{b}^{-1} = (g_i)$は

$g_i = 1/\langle i \rangle$

となる。また，$\mathbf{g} \epsilon \mathfrak{X}^{(+)}$であることが簡単に示せる。更に，$\mathbf{u}_0 = (u^{(0)}{}_i)$を

$u^{(0)}{}_i \triangleq 1/i$　　　iが素数のとき，

$u^{(0)}{}_i \triangleq 0$　　　iが素数でないとき

とすると$\mathbf{u}_0 \epsilon \mathfrak{X}$であり，かつ，$\mathbf{u}_0$は極小解であることが示せる。更に，任意の$\mathbf{v} = (v_i) \epsilon \mathfrak{X}$に対し，

$$\bigvee_{2 \leq i} (\mathbf{v}_i \wedge \mathbf{a}_{ij}) = \bigvee_{\substack{2 \leq i \leq j \\ j|i}} (\mathbf{v}_i \wedge 1) = 1/\langle j \rangle \quad ({}^{\forall} j \epsilon J)$$

となり，任意の$j \epsilon J$に対し，上の第二の等式は，有限個の値の最大値が$1/\langle j \rangle$になることを示しているから，$\mathbf{v} \epsilon \mathfrak{X}^{(+)}$となり，すなわち，$\mathfrak{X}^{(-)} = \oslash$となる。

5．あとがき

本研究においては，ファジィ関係方程式(1)に関して，添字集合Iが一般に無限集合となる場合において，極小解が存在するとき，極小解の集合のもつ性質を考察した。これらの性質は，極小解の存在のための条件を考察するための基礎となる点で重要である。性質6は極小解の存在のため

の十分条件を与えるものと考えられ，この性質を分析することにより，極小解の存在条件が明示されるものと思われる。また，本研究では単位閉区間[0, 1]をその値域として採用したが，値域は一般に完備 Brouwer 束でよいわけで，Sanchez が最大解の存在条件を明示した束論的環境の下で極小解の存在条件と極小解の特徴付けを行なうことが必要である。

参考文献

1) S. Gottwald, On the existence of solutions of systems of fuzzy equations, Fuzzy Sets and Systems **12**(1984) 301-302.
2) M. Higashi and G. J. Klir, Resolutions of finite fuzzy relation equations, ibid. **13**(1984) 65-82.
3) M. Miyakoshi and M. Shimbo, Lower solutions of systems of fuzzy equations, ibid. **19**(1986) 37-46.
4) M. Miyakoshi and M. Shimbo, Sets of solution-set-invariant coefficient matrices of simple fuzzy relation equations, ibid. **21**(1987) 59-83.
5) M. Miyakoshi and M. Shimbo, Sets of solution-set equivalent coefficient matrices of fuzzy relation equations, ibid. **35**(1990) 357-387.
6) E. Sanchez, *Resolution of composite fuzzy relation equations, Information and Control* **30**(1976) 38-48.
7) P. -Z. Wang, S. Sessa, A. di Nola and W. Pedrycz, How many lower solutions does a fuzzy relation equation have?, BUSEFAL **18**(1984) 67-74.