北海道大学工学部研究報告
第167号（平成6年）

Bulletin of the Faculty of Engineering
Hokkaido University, No. 167 (1994)

ハイブリッドファジィ算法の一般化について

河口万由香　伊達　惇

（平成5年8月31日受理）

A Generalization of Hybrid Fuzzy Arithmetic

Mayuka F. KAWAGUCHI and Tsutomu DA-TE

(Received August 31, 1993)

Abstract

Our study focuses on a hybrid fuzzy arithmetic involving nonstandard operations on fuzzy numbers. Nonstandard operations with effect of reducing fuzziness were introduced by Sanchez as a procedure to solve fuzzy arithmetic equations. Moreover, he proposed a hybrid fuzzy arithmetic in which ordinary operations on fuzzy numbers (i. e. sup-min convolution) are combined with nonstandard operations based on the implication operator associated with min operator. On the other hand, Dubois & Prade generalized a fuzzy arithmetic by replacing min operator to t-norm T which is a family of functions including min operator. A merit of this method (i. e. sup-T convolution) is that it is possible to regulate the increase of fuzziness according to choice of t-norms.

The authors extend a hybrid fuzzy arithmetic according to the generalization of fuzzy arithmetic by Dubois & Prade. In other words, we present a generalized hybrid fuzzy arithmetic which consists of ordinary operations based on a t-norm and nonstandard ones based on the implication operator associated with the t-norm. As the main result of this work, all properties of the hybrid fuzzy arithmetic corresponding to min operator are shown to hold, also in the case of a family of lower semicontinuous t-norms.

1．はじめに

ファジィ数とその演算に関する理論すなわちファジィ算法論は，Zadeh[20] によって提案された拡張原理に基づいて構築されている。1981年に Dubois & Prade[5] は，ファジィ直積の概念をそれまでの論理積に基づく定義から t-ノルム（論理積を含む関数族）に基づく定義へと一般化し，同時に一般化ファジィ算法を提案した。従来のファジィ算法においては，演算の繰り返しによってファジィネスが過度に増大するという問題点があったが，一般化算法では，t-ノルムの選択によってファジィネスの増大傾向を抑えることが可能であり，応用上の利点が期待される。

拡張原理によるファジィ数の演算は，t-ノルムの種類に関わらずに，逆元が一般的には存在しない単位的可換半群を成している。従って，ファジィ数の四則演算に関して，実数の場合のアナロ

情報工学科　知能情報工学講座

ジーによって形式的に形成した方程式（以下，ファジィ算法方程式と呼ぶ）を，通常の代数方程式と同じような方法で解くということはできない。

ファジィ算法方程式は，ファジィ関係方程式[16]の特殊な場合とみなすことができ，このような観点から，Sanchez[17]は，従来のファジィ算法に対応するファジィ算法方程式の解法として，α-オペレータを用いた方法を提案した。その後 Gottwald[9]，Di Nola et al.[2]によって，一般化ファジィ算法に対応できるように，α-オペレータを一般化した ϕ-オペレータを用いた方法が確立されてきた。Dubois & Prade[6,7]は，集合の Minkowski 演算をファジィ数の場合に拡張し，ϕ-オペレータを用いた解法と同じ結果に到達している。また，著者ら[10,11]は，これらの解法を計算機向きに離散化した近似解法を提案している。

さらに，Sanchez[18]は従来のファジィ算法の場合に関して，ファジィ算法方程式の解法を nonstandard 演算として定式化し，その新しい演算をこれまでのファジィ数演算と混在させた算法（ハイブリッドファジィ算法）を考案した。

本論文では，Sanchez の nonstandard 演算を，一般化ファジィ算法の場合に対応させて準逆演算として再定義し，ハイブリッド算法の性質については，下半連続な t-ノルムを用いた場合に限定して論じる。

2．t-ノルムと ϕ-オペレータ

本節では，単位閉区間[0, 1]上の二変数関数の族である，t-ノルムと ϕ-オペレータを導入する。t-ノルムは，ファジィ集合論では主に積集合演算として取り扱われるが，ファジィ算法においては，ファジィ集合の直積を求める演算として重要な役割を果たす。また，ϕ-オペレータは，t-ノルムに対応して導かれる関数で，ファジィ論理における含意規則として機能する。ファジィ論理は無限多値論理の一種であり，従来の多値論理の拡張の一つとしてとらえられるものであるから，ϕ-オペレータは多値論理における含意規則の拡張となっている。以下，$a, b, c \in [0,1]$，および $\wedge$ は min 演算を，$\vee$ は max 演算を表すものとして議論を進める。

［定義 1］ t-ノルム $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ は次の 4 条件を満たす実関数として定義される[19]。

(T1) 境界条件：$T(1,a)=a,\ T(0,a)=0$；

(T2) 単調性：$a \leqq b \rightarrow T(a,c) \leqq T(b,c)$；

(T3) 可換性：$T(a,b)=T(b,a)$；

(T4) 結合性：$T(a,T(b,c))=T(T(a,b),c)$。 （定義終）

論理積 min は最も代表的な t-ノルムであり，任意の t-ノルムに対して，$T(a,b) \leqq \min(a,b)$ が成り立つ。種々の t-ノルムが考案されており，それぞれの性質が詳細に研究されている[15]。

［定義 2］ オペレータ $\phi: [0,1]^2 \to [0,1]$ は，t-ノルム T に対応する t-相対擬補元として次式で定義される[2,9,13,14]。

$$a\,\phi\,b \equiv \sup\{x \mid T(a,x) \leqq b\} \tag{2.1}$$

（定義終）

$a\,\phi\,b$ は，第 1 変数 a に関しては減少関数，第 2 変数 b に関しては増加関数である。

［定義 3］　t-ノルム $T(a,b)$ および ϕ-オペレータ $a\ \phi\ b$ が変数 a,b について上半連続（下半連続）であるとき，T および ϕ は上半連続（下半連続）であるという(1,3,4)。　（定義終）

［補題 1］　a を閉区間 $[0,1]$ の任意の要素，$\{b_i\}_{i\in I}$ を $[0,1]$ の要素からなる任意の族とし，$c=\sup_i b_i$ とおくと，$[0,1]$ において下半連続な t-ノルム T に対して，次式が成り立つ(12)。

$$\sup_i T(a,b_i)=T(a,\ \sup_i b_i) \tag{2.2}$$

［補題 2］　下半連続な t-ノルム T とそれに対応する ϕ について，次式が成り立つ(3,4,13,14)。

$$a\ \phi\ b\in\{x\mid T(a,x)\leqq b\} \tag{2.3}$$

［補題 3］　変数xに関して左連続な t-ノルム $T(a,x)$ に対して，変数xに関して右連続な ϕ-オペレータ $a\ \phi\ x$ が一意に対応する(14)。

［補題 4］　下半連続な t-ノルム T に対して，上半連続な ϕ-オペレータが一意に対応する。

（証明）　t-ノルム T が下半連続であるならば，即ち T は左連続であるから，［補題 3］より，対応する ϕ-オペレータ $a\phi b$ は b に関して右連続，即ち上半連続である。次に $\varepsilon>0$ に対して，$(a-\varepsilon)\ \phi b$ の極限を考えると，t-ノルムの下半連続性より $\lim_{\varepsilon\to 0} T(a-\varepsilon,b)=T(a,b)$ であるから，次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}(a-\varepsilon)\ \phi b &=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\{x\mid T(a-\varepsilon,x)\leqq b\}\\ &=\sup\{x\mid \lim_{\varepsilon\to 0} T(a-\varepsilon,x)\leqq b\}\\ &=\sup\{x\mid T(a,x)\leqq b\}\\ &=a\phi b\end{aligned} \tag{2.4}$$

これより，$a\phi b$ は a に関して左連続である。$a\phi b$ は a に関して減少関数であるから，$a\phi b$ は上半連続であることが示された。　（証明終）

［補題 5］　t-ノルム T を下半連続と仮定すると，次の性質が成り立つ。ただし，a,b,c,d は $[0,1]$ 上の任意の値，$(b_i)_{i\in I}$ は $[0,1]$ の要素からなる任意の族とする。

(L1)　$T(a,a\phi b)\leqq b$

(L2)　$a\phi T(a,b)\geqq b$

(L3)　$b\leqq c\rightarrow a\phi b\leqq a\phi c$

(L4)　$b\leqq c\rightarrow b\phi a\geqq c\phi a$

(L5)　$a\phi(b\vee c)=(a\phi b)\vee(a\phi c)$

(L6)　$a\phi(b\wedge c)=(a\phi b)\wedge(a\phi c)$

(L5')　$a\phi(\sup_i b_i)\geqq\sup_i(a\phi b_i)$

(L6')　$a\phi(\inf_i b_i)=\inf_i(a\phi b_i)$

(L7)　$(b\vee c)\phi a=(b\phi a)\wedge(c\phi a)$

(L8)　$(b\wedge c)\phi a=(b\phi a)\vee(c\phi a)$

(L7')　$(\sup_i b_i)\phi a=\inf_i(b_i\phi a)$

(L8')　$(\inf_i b_i)\phi a\geqq\sup_i(b_i\phi a)$

(L9)　$T(a\phi b,c)\leqq a\phi T(b,c)$

(L10)　$c\phi(b\phi a)=b\phi(c\phi a)=T(b,c)\phi a$

（証明）

(L1)　T は下半連続であるから式(2.3)が適用できる。従って，式(2.1)より $T(a, a\phi b) \leqq b$ となる。

(L2)　式(2.1)より $a\phi T(a,b)=\sup\{x \mid T(a,x) \leqq T(a,b)\}$ となる。$b \in \{x \mid T(a,x) \leqq T(a,b)\}$であるから $a\phi T(a,b) \geqq b$ となる。

(L3)　t-ノルムの単調性(T2)より $b \leqq c$ ならば，$\{x \mid T(a,x) \leqq b\} \subseteq \{x \mid T(a,x) \leqq c\}$が成り立つ。式(2.1)より，$a\phi b=\sup\{x \mid T(a,x) \leqq b\} \leqq \sup\{x \mid T(a,x) \leqq c\}=a\phi c$。

(L4)　t-ノルムの単調性(T2)より $b \leqq c$ ならば，$\{x \mid T(b,x) \leqq a\} \supseteq \{x \mid T(c,x) \leqq a\}$が成り立つ。式(2.1)より，$b\phi a=\sup\{x \mid T(b,x) \leqq a\} \geqq \sup\{x \mid T(c,x) \leqq a\}=c\phi a$。

(L5)，(L6)　(L3)より明らか。

(L5')，(L6')　［補題3］より $a\phi b$ は b に関して右連続である。ここで，$c=\sup_i b_i$ とおき，任意の $i \in I$ に対して $b_i \neq c$ であり，かつ $b=c$ において $a\phi b$ が左連続ではないと仮定すると，$\sup_i(a\phi b_i)=\lim_{b \to c-0}(a\phi b)<a\phi c=a\phi(\sup_i b_i)$ が成り立つ。また，上述の他の場合には $\lim_{b \to c-0}(a\phi b)=a\phi c$ である。ゆえに，(L5')が成り立つ。次に $c=\inf_i b_i$ とすると，$\inf_i(a\phi b_i)=\lim_{b \to c+0}(a\phi b)=a\phi c=a\phi(\inf_i b_i)$ となる。従って，(L6')が成立する。

(L7)，(L8)　(L4)より明らか。

(L7')，(L8')　［補題4］より $b\phi a$ は b に関して左連続である。ここで，$c=\sup_i b_i$ とおくと，$\inf_i\,(b_i\phi a)=\lim_{b \to c-0}(b\phi a)=c\phi a=(\sup_i b_i)\phi a$ となる。従って，(L7')が成立する。
次に $c=\inf_i b_i$ とおき，任意の $i \in I$ に対して $b_i \neq c$ であり，かつ $b=c$ において $b\phi a$ が右連続ではないと仮定すると，$\sup_i(b_i\phi a)=\lim_{b \to c+0}(b\phi a)<c\phi a=(\inf_i b_i)\phi a$ が成り立つ。また，上述の他の場合には $\lim_{b \to c+0}(b\phi a)=c\phi a$ である。ゆえに，(L8') が成り立つ。

(L9)　［定義2］および［補題1］より次の2式が得られる。

$$T(a\phi b, c)=T(\sup\{x \mid T(a,x) \leqq b\},\ c)=\sup\{T(x,c) \mid T(a,x) \leqq b\} \tag{2.5}$$

$$a\phi T(b,c)=\sup\{x \mid T(a,x) \leqq T(b,c)\} \tag{2.6}$$

t-ノルムの単調性(T2)および結合性(T4)より，$T(a,x) \leqq b$ ならば $T(T(a,x),c)=T(a,\ T(x,c)) \leqq T(b,c)$であるから，次の関係式が求められる。

$$\begin{aligned}\{T(x,c) \mid T(a,x) \leqq b\} &\subseteq \{T(x,c) \mid T(a,T(x,c)) \leqq T(b,c)\}\\ &= \{x \mid T(a,x) \leqq T(b,c)\}\end{aligned} \tag{2.7}$$

式(2.5)～(2.7)より(L9)が示される。

(L10)　［定義2］より次の2式が得られる。

$$c\phi(b\phi a)=\sup\{x \mid T(c,x) \leqq b\phi a\} \tag{2.8}$$

$$T(b,c)\phi a=\sup\{x \mid T(T(b,c),x) \leqq a\} \tag{2.9}$$

t-ノルムの単調性(T2)，結合性(T4)および(L1)より，$T(c,x) \leqq b\phi a$ならば$T(T(b,c),x)=T(b,T(c,x)) \leqq T(b,b\phi a) \leqq a$ であるから，次の包含関係が求められる。

$$\{x \mid T(c,x) \leqq b\phi a\} \subseteq \{x \mid T(T(b,c),x) \leqq a \tag{2.10}$$

また，(L3)より，$T(T(b,c),x) \leqq a$ ならば $b\phi T(T(b,c),x) \leqq b\phi a$ となり，(T4)，(L2)より，$b\phi T(T(b,c),x)=b\phi T(b,T(c,x)) \geqq T(c,x)$であるから，次の包含関係が求められる。

$$\{x \mid T(c,x) \leqq b\phi a\} \supseteq \{x \mid T(T(b,c),x) \leqq a\} \tag{2.11}$$

式(2.8)～(2.11)より(L10)が示される。　(証明終)

［補題6］　$(b_i)_{i \in I}$，$(c_i)_{i \in I}$ および$(b_{ij})_{i,j \in I}$ を$[0,1]$の要素からなる任意の族とすると以下の式

が成り立つ。

(L11) $\sup_i (b_i \wedge c_i) \leqq (\sup_i b_i) \wedge (\sup_i c_i)$ (L13) $\sup_j \inf_i b_{ij} \leqq \inf_i \sup_j b_{ij}$

(L12) $(\inf_i b_i) \vee (\inf_i c_i) \leqq \inf_i (b_i \vee c_i)$ (証明略)

3．拡張原理に基づくファジィ数演算とその準逆演算

ファジィ数 (fuzzy number) は，広義には，単に実数軸 $\boldsymbol{R}$ 上のファジィ部分集合として定義され，この場合にはファジィ量 (fuzzy quantity) とも呼ばれるが，通常は，実数の自然な拡張となるように，正規性[20]：$\sup_x \mu_A(x)=1$，凸性，メンバシップ関数の区分的連続性あるいは上半連続性，α-レベル集合あるいは台集合の有界性などの条件を付けることが多い。ここで，$\mu_A : \boldsymbol{R} \to [0,1]$ はファジィ数 A のメンバシップ関数である。以下，本論文では，特に断わらない限り広義のファジィ数について取り扱うこととする。

［定義４］ （ファジィ数演算）

ファジィ数 A, B の二項演算 $A * B$ は，対応する実数の二項演算 $z=x*y$ を拡張して，次の sup-T 畳み込みによって定義される[5,20]。

$$\mu_{A*B}(z)=\sup_{z=x*y} T(\mu_A(x),\ \mu_B(y)) \tag{3.1}$$

（定義終）

$\mu_{-B}(y)=\mu_B(-y)$，$\mu_{1/B}(y)=\mu_B(1/y)$ なる性質を用いると $A-B$，A/B はそれぞれファジィ加算＋とファジィ乗算×から導出できるので，以後，＊として＋と×のみを考慮し，単に加算，乗算と呼ぶこととする。

次に，加算＋および乗算×に対応して，それぞれ，次の準減算⊖および準除算⊘を導入する。これらは，T が論理積である場合について，Sanchez[17,18] が ‘nonstandard subtraction’ および ‘nonstandard division’ と命名した演算を，t-ノルムの場合に一般化したものである。本論文では，両者を併せた ‘nonstandard operations’ を意訳して‘準逆演算’と呼ぶことにする。

［定義５］ （ファジィ準逆演算）

ファジィ準減算およびファジィ準除算は，それぞれ，式(3.2)，(3.3)に示す inf-ϕ 畳み込みによって，定義される[2,9,17,18]。

$$\mu_{C\ominus A}(y)=\inf_{z=x+y} \mu_A(x)\,\phi\,\mu_C(z) \tag{3.2}$$

$$\mu_{C\oslash A}(y)=\inf_{z=x\times y} \mu_A(x)\,\phi\,\mu_C(z) \tag{3.3}$$

（定義終）

［定義５］による演算は，逆元を持たないファジィ数の加算（もしくは乗算）に対する ‘逆演算に準ずる’ 演算である。Dubois & Prade[6] はこの理由によって当初は ‘inverse operations’ と称していた。しかし，ファジィ集合論の立場からのアプローチ[7] や後述するハイブリッド算法においては，この演算は単なる加算（乗算）の逆演算としての側面の他に，ファジィ数に関する減算（除算）の一種としての側面も備えている。これは，実数の四則演算において，減算（除算）は，

加算（乗算）の逆演算であると同時に，それ自体が算術としての機能を備えているということと対応している。ここで定義された準減算（準除算）は，演算結果のファジィネスを，ファジィ減算（除算）の結果のそれより小さくする性質があり，また，明らかに実数の減算（除算）の一般化になっている。つまり，演算の対象をファジィ数から実数に限定するとファジィ減算（除算）と準減算（準除算）は共に実数の減算（除算）に一致する。準逆演算として準減算と準除算のみを考えるのは，次の二つの理由による。すなわち，ファジィ減算（除算）は実数の場合と同様に，負号（逆数の操作）とファジィ加算（乗算）を組み合わせることによって実現できること，および，可換な演算である＋（×）に対しては実数の四則演算との対応を考慮した⊖（⊘）のような簡便な記号が導入できるが，非可換な減算－（除算÷）に対しては同様の記号法を適用できないこと，である。

以下に，確認の意味で，次節で用いるファジィ集合論での包含関係，共通集合および和集合の定義を示す。

$$A \subseteq B \longleftrightarrow \mu_A(x) \leqq \mu_B(x)\ ;\ \forall x \in \boldsymbol{R} \tag{3.4}$$
$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \tag{3.5}$$
$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \tag{3.6}$$

4．下半連続な t-ノルムに基づくハイブリッド算法の諸性質

前節で述べた準減算および準除算は，それぞれ加算および乗算の単位元の欠如を補うべく機能する。両者を組み合わせた算法は，ハイブリッド算法（hybrid fuzzy arithmetic）と呼ばれ，t-ノルムが論理積である場合の性質が調査されている(18)。本節では，論理積を下半連続な t-ノルムに拡張した場合のハイブリッド算法を考え，特に，加算＋と準減算⊖が混在したハイブリッド算法の性質を列挙し，証明する。乗算×と準除算⊘に関しても同様の性質が成り立つ。

［定理１］　下半連続な t-ノルムに限定した場合の，ファジィ数の加算＋と準減算⊖について，以下の関係が成り立つ。ただし，－はファジィ減算もしくはファジィ数としての負号を表す。

(HFA1)　$B \subseteq C \to A+B \subseteq A+C$

(HFA2)　$B \subseteq C \to A \ominus B \supseteq A \ominus C$

(HFA3)　$B \subseteq C \to B \ominus A \subseteq C \ominus A$

(HFA4)　$A+(C \ominus A) \subseteq C$

(HFA5)　$B \subseteq (A+B) \ominus A$

(HFA6)　$A+B \subseteq C \longleftrightarrow B \subseteq C \ominus A$

(HFA7)　$A+B=C$
$\to A+(C \ominus A)=C, B \subseteq C \ominus A$

(HFA8)　$A+((A+B)\ominus A)=A+B$

(HFA9)　$A \ominus 0 = A$

(HFA10)　$A+(A \ominus A)=A$

(HFA11)　$0 \subseteq A \ominus A$

(HFA12)　A が正規$\to C \ominus A \subseteq C-A$,
$0 \subseteq A \ominus A \subseteq A-A$

(HFA13)　B が正規$\to A \ominus (-B) \subseteq A+B$

(HFA14)　$A+(C \ominus A) \subseteq (A+C) \ominus A$

(HFA15)　$(A \ominus C)+B \subseteq (A+B) \ominus C$

(HFA16)　$(A \ominus B) \ominus C = (A \ominus C) \ominus B$
$= A \ominus (B+C)$

(HFA17)　$A+(B \cup C)=(A+B)\cup(A+C)$

(HFA18)　$A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C)$

(HFA19)　$(B \cap C) \ominus A = (B \ominus A) \cap (C \ominus A)$

(HFA20)　$A+(B \cap C) \subseteq (A+B) \cap (A+C)$

(HFA21)　$A \ominus (B \cap C) \supseteq (A \ominus B) \cup (A \ominus C)$

(HFA22)　$(B \cup C) \ominus A \supseteq (B \ominus A) \cup (C \ominus A)$

（証明）

(HFA1)　$\mu_{A+B}(z)$

$$\begin{aligned}&= \sup_{z=x+y} T(\mu_A(x),\ \mu_B(y))\\ &\leqq \sup_{z=x+y} T(\mu_A(x),\ \mu_C(y)) && (\because\ \mu_B(y) \leqq \mu_C(y)\ \text{and}\ (\mathrm{T2}))\\ &= \mu_{A+C}(z)\end{aligned}$$

(HFA2)　$\mu_{A \ominus B}(z)$

$$\begin{aligned}&= \inf_{z=x-y} \mu_B(y)\phi\mu_A(x)\\ &\geqq \inf_{z=x-y} \mu_C(y)\phi\mu_A(x) && (\because\ \mu_B(y) \leqq \mu_C(y)\ \text{and}\ (\mathrm{L4}))\\ &= \mu_{A\ominus C}(z)\end{aligned}$$

(HFA3)　$\mu_B(y) \leqq \mu_C(y)$ と(L3)より(HFA2)と同様に $\mu_{B\ominus A}(z) \leqq \mu_{C\ominus A}(z)$ が得られる。

(HEA4)　$\mu_{A+(C\ominus A)}(z)$

$$\begin{aligned}&= \sup_{z=x+y} T(\mu_A(x),\ (\inf_{y=z'-x'} \mu_A(x')\,\phi\,\mu_C(z')))\\ &\leqq \sup_{z=x+y} T(\mu_A(x),\ (\mu_A(x)\,\phi\,\mu_C(z)))\\ &\leqq \sup_{z=x+y} \mu_C(z) && (\because\ (\mathrm{L1}))\\ &= \mu_C(z)\end{aligned}$$

(HFA5)　(L2)を用いて(HFA4)と同様に $\mu_{(A+B)\ominus A}(y) \geqq \mu_B(y)$ が得られる。

(HFA6)　$A+B \subseteq C$ と仮定すると，(HFA3)より $(A+B)\ominus A \subseteq C\ominus A$ となる。これと(HFA5)より $B \subseteq C\ominus A$ が成り立つことが示される。次に，$B \subseteq C\ominus A$ と仮定すると，(HFA1)より $A+B \subseteq A+C\ominus A$ となる。これと(HFA4)より $A+B \subseteq C$ が成り立つことが示される。従って，(HFA6)が証明された。

(HFA7)　$A+B=C$ と仮定する。この仮定を(HFA5)に代入すると $B \subseteq C\ominus A$ が得られる。両辺に A を（ファジィ数加算として）足し，(HFA4)を考慮すると，$C=A+B \subseteq A+(C\ominus A) \subseteq C$ となる。従って，$A+B=C$ ならば，$A+(C\ominus A)=C$ かつ $B \subseteq C\ominus A$ であることが証明された。

(HFA8)　$C=A+B$ を(HFA7)に代入すると直ちに(HFA8)が得られる。

(HFA9)　(HFA4)と(HFA5)に $A=0$ を代入すると，それぞれ $C\ominus 0 \subseteq C$, $B \subseteq B\ominus 0$ となる。従って，$A\ominus 0=A$ が証明された。

(HFA10), (HFA11)　(HFA7)において $B=0$ とおくと，$A=C$ となり，$A+(A\ominus A)=A$ および $0 \subseteq A\ominus A$ が得られる。

(HFA12)　A が正規であるならば次式が成り立つ。

$$A-A=A+(-A)\subseteq 0 \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}A+(C\ominus A)-A &= (C\ominus A)+A-A && (\because\ \text{ファジィ加算の可換性}^{(12)})\\ &\subseteq (C\ominus A)-0 && (\because\ \text{式}(3.7)\text{および}(\mathrm{HFA1}))\\ &= C\ominus A\end{aligned} \tag{3.8}$$

(HFA4)の両辺に加算として $-A$ を足すと，$A+(C\ominus A)-A \subseteq C-A$ が得られる。これと式(3.8)より $C\ominus A \subseteq C-A$ となる。さらに，この式において $C=A$ として(HFA11)を考慮すると $0 \subseteq A\ominus A \subseteq A-A$ が得られる。以上で，(HFA12)が証明された。

(HFA13)　B が正規であると仮定する。(HFA12)において $A=-B$ を代入すると，$A\ominus(-B)\subseteq A-(-B)=A+B$ が得られる。

(HFA14)　(HFA4)と(HFA5)より，ただちに，$A+(C\ominus A)\subseteq C\subseteq(A+C)\ominus A$ が得られる。

(HFA15)　$\mu_{(A\ominus C)+B}(t)$

$$
\begin{aligned}
&=\sup_{t=s+y} T(\{\inf_{s=x-z}\mu_C(z)\ \phi\ \mu_A(x)\},\ \mu_B(y))\\
&\leqq \sup_{t=s+y}\inf_{s=x-z} T(\{\mu_C(z)\ \phi\ \mu_A(x)\},\ \mu_B(y))\\
&\leqq \sup_{t=s+y}\inf_{s=x-z} \mu_C(z)\ \phi\ T(\mu_A(x),\ \mu_B(y)) && (\because\ (\mathrm{L9}))\\
&\leqq \inf_{t=s'-z}\sup_{s'=x+y} \mu_C(z)\ \phi\ T(\mu_A(x),\ \mu_B(y)) && (\because\ (\mathrm{L13}))\\
&\leqq \inf_{t=s'-z} \mu_C(z)\ \phi\ \{\sup_{s'=x+y} T(\mu_A(x),\ \mu_B(y))\} && (\because\ (\mathrm{L5'}))\\
&=\mu_{(A+B)\ominus C}(t)
\end{aligned}
$$

(HFA16)　$\mu_{(A\ominus C)\ominus B}(t)$

$$
\begin{aligned}
&=\inf_{t=s-y}\mu_B(y)\ \phi\ \{\inf_{s=x-z}\mu_C(z)\ \phi\ \mu_A(x)\}\\
&=\inf_{t=s-y}\inf_{s=x-z}\mu_B(y)\ \phi\ \{\mu_C(z)\ \phi\ \mu_A(x)\} && (\because\ (\mathrm{L6'}))\\
&=\inf_{t=x-s'}\inf_{s'=y+z}\{T(\mu_B(y),\ \mu_C(z))\ \phi\ \mu_A(x)\} && (\because\ (\mathrm{L10}))\\
&=\inf_{t=x-s'}\{\sup_{s'=y+z} T(\mu_B(y),\ \mu_C(z))\}\ \phi\ \mu_A(x) && (\because\ (\mathrm{L7'}))\\
&=\mu_{A\ominus(B+C)}(t)
\end{aligned}
$$

よって，$A\ominus(B+C)=(A\ominus C)\ominus B$ が示された。さらにファジィ加算の可換性[12]より B と C は交換可能であり，(HFA16)が証明されたこととなる。

(HFA17)　$\mu_{A+(B\cup C)}(z)$

$$
\begin{aligned}
&=\sup_{z=x+y} T(\mu_A(x),\ \{\mu_B(y)\vee\mu_C(y)\})\\
&=\sup_{z=x+y} T(\mu_A(x),\ \mu_B(y))\vee T(\mu_A(x),\ \mu_C(y))\\
&=\{\sup_{z=x+y} T(\mu_A(x),\ \mu_B(y))\}\vee\{\sup_{z=x+y} T(\mu_A(x),\ \mu_C(y))\}\\
&=\mu_{(A+B)\cup(A+C)}(z)
\end{aligned}
$$

(HFA18)　$\mu_{A\ominus(B\cup C)}(z)$

$$
\begin{aligned}
&=\inf_{z=x-y}\{\mu_B(y)\vee\mu_C(y)\}\ \phi\ \mu_A(x)\\
&=\inf_{z=x-y}\{\mu_B(y)\ \phi\ \mu_A(x)\}\wedge\{\mu_C(y)\ \phi\ \mu_A(x)\} && (\because\ (\mathrm{L7}))\\
&=\{\inf_{z=x-y}\mu_B(y)\ \phi\ \mu_A(x)\}\wedge\{\inf_{z=x-y}\mu_C(y)\ \phi\ \mu_A(x)\}\\
&=\mu_{(A\ominus B)\cap(A\ominus C)}(z)
\end{aligned}
$$

(HFA19)　(L6)を用いて(HFA18)と同様に $\mu_{(B\cap C)\ominus A}(z)=\mu_{(B\ominus A)\cap(C\ominus A)}(z)$ が得られる。

(HFA20)　(L11)を用いて(HFA17)と同様に $\mu_{A+(B\cap C)}(z)\leqq\mu_{(A+B)\cap(A+C)}(z)$ が得られる。

(HFA21)　(L8)と(L12)を用いて(HFA18)と同様に $\mu_{A\ominus(B\cap C)}(z)\geqq\mu_{(A\ominus B)\cup(A\ominus C)}(z)$ が得られる。

(HFA22)　(L5)と(L12)を用いて(HFA18)と同様に $\mu_{(B\cup C)\ominus A}(z)\geqq\mu_{(B\ominus A)\cup(C\ominus A)}(z)$ が得られる。

(証明終)

5.むすび

本論文で扱ったハイブリッド算法は，実数の四則演算に関して4つの要素{+，×，負号，逆数}によって完結する算術を，{⊖，⊘}を加えることによりファジィ数の四則演算に拡張する試みであるといえる。結果として，min 演算による場合のハイブリッド算法の性質[18]が，下半連続な t-ノルムに拡張した場合にも，すべて踏襲されていることが判明した。さらに，t-ノルムを連続なものに限定したり，ファジィ数の正規性や上半連続性などの条件を付加することにより，さらに算術として有効な性質が発見される可能性もあると考えられる。

参考文献

(1) L. Bour, G. Hirsch & M. Lamotte: Dĕtermination d'un opérateur de maximalisation pour la rĕsolution d'ĕquation de relation floue, BUSEFAL, **25**(1986)95-106.
(2) A. Di Nola, W. Pedrycz & S. Sessa: Processing of fuzzy numbers by fuzzy relation equations, Kybernetes, **15**(1986)43-47.
(3) A. Di Nola, W. Pedrycz & S. Sessa: Fuzzy relation equations under LSC and USC t-norms and thier boolean solutions, Stochastica **XI-2**, **3**(1987)151-183.
(4) A. Di Nola, S. Sessa, W. Pedrycz & E. Sanchez: Fuzzy Relation Equations and their Applications to Knowledge Engineering, Kluwer Academic Publishers(1989).
(5) D. Dubois & H. Prade: Additions of interactive fuzzy numbers, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-26**(1981)926-936.
(6) D. Dubois & H. Prade: Inverse operations for fuzzy numbers, in: Fuzzy Information, Knowledge Representation on Decision Analysis, E. Sanchez(ed.), Pergamon Press (1984)399-404.
(7) D. Dubois & H. Prade: Fuzzy-set-theoretic differences and inclusions and their use in the analysis of fuzzy equations, Control and Cybernetics, **13**(1984)129-146.
(8) D. Dubois & H. Prade: Fuzzy numbers: an overview, in: Analysis of Fuzzy Information, J. C. Bezdek(ed.), CRC Press, Vol. **I**(1987)3-39.
(9) S. Gottwald: Characterization of the solvability of fuzzy equations, Elektronische Informationsverarbeitung Kybernetik, **22**(1986)67-91.
(10) 河口万由香，伊達惇：離散表現方式によるファジィ算法方程式の近似解法，北海道大学工学部研究報告，**163**(1993)25-33.
(11) M. F. Kawaguchi & T. Da-te: A calculation method for solving fuzzy arithmetic equations with triangular norms, Proc. of 2nd IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems(FUZZ-IEEE '93), San Francisco(1993)470-476.
(12) 河口万由香，伊達惇：t-ノルムに基づくファジィ算法に関する諸性質，日本ファジィ学会誌，**5**(1993)，掲載予定.
(13) 宮腰政明，新保勝：Tーノルムを用いたファジィ関係の合成とそのファジィ推論への応用，電子通信学会論文誌，**J67-D**(1984)391-398.
(14) M. Miyakoshi & M. Shimbo: Solutions of composite fuzzy relational equations with triangular norms, Fuzzy Sets and Systems, **16**(1985)53-63.
(15) M. Mizumoto: Pictorial representations of fuzzy connectives, part I: cases of t-norms, t-conorms and averaging operators, Fuzzy Sets and Systems, **31**(1989)217-242.
(16) E. Sanchez: Resolution of composite fuzzy relation equations, Information and Control, **30**(1976)38-48.
(17) E. Sanchez: Solution of fuzzy equations with extended operations, Fuzzy Sets and Systems, **12**(1984)237-248.
(18) E. Sanchez: Non standard fuzzy arithmetic, in: Advances in Fuzzy Systems: Applications and Theory, P. Z. Wang(eds.), World Scientific Pub. Co., to appear.
(19) B. Schweizer & A. Sklar: Associative functions and statistical triangle inequalities, Publ. Math.,

Debrecen, 8(1961)169-186.
(20) L. A. Zadeh : The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning, part I, Information Sciences, 8(1975)199-249.