



Title	アングルプライ積層平板の振動特性
Author(s)	山田, 元; Yamada, Gen; 小林, 幸徳 他
Citation	北海道大學工学部研究報告, 173, 15-22
Issue Date	1995-05-31
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/42440">https://hdl.handle.net/2115/42440</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	173_15-22.pdf



## アングルプライ積層平板の振動特性

山田 元 小林 幸徳 木村 庄吾

(平成 6 年 12 月 27 日受理)

### Vibration Characteristics of Angle-Ply Laminated Plates

Gen YAMADA, Yukinori KOBAYASHI and Shogo KIMURA

(Received December 27, 1994)

#### Abstract

Vibration characteristics of angle-ply laminated plates are studied using the Ritz method. The effect of shear deformation is considered by applying the first order shear deformation theory, and shear correction factors are introduced accordingly. Strain and kinetic energies for the laminated plate are obtained and power series which satisfy the geometric boundary conditions are employed as admissible functions for the Ritz method. The frequency equation is derived from the stationary condition of the Lagrangian. Natural frequencies and mode shapes of vibration for simply-supported, symmetrically or antisymmetrically laminated square plates are calculated numerically. Convergence studies of eigenvalues are discussed and comparison of those with other authors' results show good agreement. Effects of fiber angles and thickness ratios of the layers on the vibration characteristics are investigated.

#### 1. ま え が き

複合材料は、高い比強度・比剛性により部材を軽量化できることや、用途に応じた特性を設計できるという優れた特徴を有するため、各分野で注目されており、構造物の要素として用いられる機会が更に増えることが予想される。成田の解説<sup>1)</sup>にもあるように、種々の積層理論が提唱され、振動問題に関しても多くの論文が発表されている。アングルプライ積層平板の振動特性を論じた研究もいくつかあるが<sup>2),3)</sup>、対称あるいは逆対称積層のいずれかに限って解析を行っており、両者の振動特性を系統的かつ詳細に報告した論文は少ない。そこで本論文では、最も一般的な複合材料である、FRPのアングルプライ積層板の自由振動を、一次せん断変形理論に基づきリッツ法を用いて解析し、その振動特性を明らかにする。そのために、板のひずみエネルギーと運動エネルギーを求め、変位を幾何学的境界条件を満足するべき関数で近似する。そしてラグランジュ関数の停留条件から振動数方程式を導出する。周辺が単純支持された対称および逆対称積層正方形板に関して数値計算を実施して固有振動数と振動モードを求め、繊維配向角や各層の厚さが振動特性に及ぼす影響を調べる。

## 2. 理論解析

$L$  層のFRPラミナより構成される積層平板を図1に示す。中央面から $k$ 番目の層の上面までの距離を $h_k$ とし、板の厚さを $h$ 、縦横の長さを $a$ 、 $b$ とする。また、 $k$ 番目の層に対し座標系 $(x, y, z)$ と繊維方向を1軸とする材料主軸123をとり、1軸と $x$ 軸とのなす角を $\theta_k$ とする。フックの法則を用いて各層の応力-ひずみ関係を表すと<sup>4)</sup>

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

となる。ここで、 $C_{11}=E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21})$ 、 $C_{22}=E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21})$ 、 $C_{44}=G_{23}$ 、 $C_{55}=G_{13}$ 、 $C_{66}=G_{12}$  ( $E_1$ 、 $E_2$ は縦弾性係数、 $G_{23}$ 、 $G_{13}$ 、 $G_{12}$ は横弾性係数、 $\nu_{12}$ 、 $\nu_{21}$ はポアソン比)である。式(1)を座標変換すると $x-y$ 座標系における応力-ひずみ関係式

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & Q_{26} \\ 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & 0 & 0 & Q_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

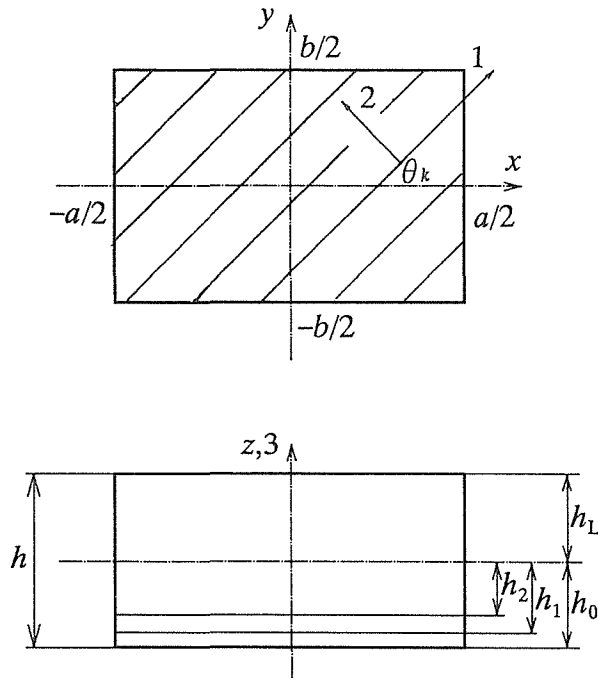


図1 積層平板の座標系

が求まる。ここで  $Q_{ij}$  は  $[C_{ij}]$  に角度  $\theta_k$  の変換行列を作用させて得られる剛性である。また、積層板の単位幅当たりの合応力、合せん断力、合モーメントはそれぞれ

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^L \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^L \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (4)$$

から求められる。

一次せん断変形理論によれば、板の  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向の変位  $u$ ,  $v$ ,  $w$  は、中央面の変位  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  と、 $y$  軸、 $x$  軸まわりの回転角  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  を用いて

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z \psi_x \\ v &= v_0 + z \psi_y \\ w &= w_0 \end{aligned} \quad (5)$$

と表される。上式をひずみ変位関係式に代入することにより、ひずみは

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left[ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

と表され、これより式(3), (4)は次のように表しうる。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ Q_{yz} \\ Q_{xz} \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial y \\ \partial w_0 / \partial y + \psi_y \\ \partial w_0 / \partial x + \psi_x \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \\ \partial \psi_x / \partial x \\ \partial \psi_y / \partial y \\ \partial \psi_x / \partial y + \partial \psi_y / \partial x \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式中の伸び剛性  $A_{ij}$ , 曲げ剛性  $D_{ij}$ , 曲げ-伸びカップリング剛性  $B_{ij}$  は、それぞれ

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^L Q_{ij}^{(k)} (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L Q_{ij}^{(k)} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (i, j = 1, 2, 6) \end{aligned}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^L Q_{ij}^{(k)} \{h_k^3 - h_{k-1}^3\} \quad (8)$$

$$A_{ij} = \kappa \sum_{k=1}^L Q_{ij}^{(k)} \{h_k - h_{k-1}\} \quad (i, j=4, 5)$$

で与えられる。また、 $\kappa$ はせん断修正係数であり、本論文では5/6を採用する。板の運動エネルギーとひずみエネルギーはそれぞれ

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dz dy dx \quad (9)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz}) dz dy dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left\{ N_x \frac{\partial u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial v_0}{\partial y} + Q_{yz} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \right) + Q_{xz} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \right) \right. \quad (10)$$

$$\left. + N_{xy} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + M_x \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + M_{xy} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right\} dx dy$$

で与えられる。ここで、 $\rho$ は積層板の密度である。以下の解析を簡単にするため、次の無次元量を導入する。

$$\xi = 2x/a, \quad \eta = 2y/b, \quad \Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho/(E_2 h^2)}$$

$$(\bar{U}_0, \bar{V}_0, \bar{W}_0) = (1/h)(u_0, v_0, w_0) \quad (11)$$

ここで、 $\omega$ は円振動数、 $\Omega$ は無次元振動数パラメータである。中央面の変位を次のように近似する。

$$\bar{U}_0(\xi, \eta, t) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J a_{ij} U_{xi}(\xi) U_{yj}(\eta) e^{j\omega t}$$

$$\bar{V}_0(\xi, \eta, t) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L b_{kl} V_{xk}(\xi) V_{yl}(\eta) e^{j\omega t}$$

$$\bar{W}_0(\xi, \eta, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N c_{mn} W_{xm}(\xi) W_{yn}(\eta) e^{j\omega t} \quad (12)$$

$$\Psi_x(\xi, \eta, t) = \sum_{o=0}^O \sum_{p=0}^P d_{op} \Psi_{xo}(\xi) \Psi_{yp}(\eta) e^{j\omega t}$$

$$\Psi_y(\xi, \eta, t) = \sum_{q=0}^Q \sum_{r=0}^R e_{qr} \Psi_{xq}(\xi) \Psi_{yr}(\eta) e^{j\omega t}$$

式中の $U_{xi}(\xi), U_{yj}(\eta) \cdots$ などは、幾何学的境界条件を満足する許容関数である。成田ら<sup>3)</sup>は、許容関数にべき級数を用いることによって、種々の境界条件を簡便に記述でき、しかも十分な精度の結果が得られることを明かにしている。本論文でもべき級数を用いて解析を行う。たとえば、四辺が単純支持された長方形板に対する許容関数は、幾何学的境界条件を満足するべき関数

$$U_{xi} = \xi^i, \quad U_{yj} = \eta^j (1 - \eta^2)$$

$$V_{xk} = \xi^k (1 - \xi^2), \quad V_{yl} = \eta^l$$

$$W_{xm} = \xi^m (1 - \xi^2), \quad W_{yn} = \eta^n (1 - \eta^2) \quad (13)$$

$$\Psi_{xo} = \xi^o, \quad \Psi_{yp} = \eta^p (1 - \eta^2)$$

$$\Psi_{xq} = \xi^q (1 - \xi^2), \quad \Psi_{yr} = \eta^r$$

で与えられる。

ラグランジュ関数 $L = U - T$ の停留条件

$$\frac{\partial L}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial L}{\partial b_{kl}} = \frac{\partial L}{\partial c_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial d_{op}} = \frac{\partial L}{\partial e_{qr}} = 0 \quad (14)$$

を用いることにより振動数方程式

$$[[K] - \Omega^2[M]] \begin{Bmatrix} a_{ij} \\ b_{kl} \\ c_{mn} \\ d_{op} \\ e_{qr} \end{Bmatrix} = 0 \quad (15)$$

が得られる。この式の固有値を求めることにより無次元振動数 $\Omega$ が得られる。紙面の都合上、マトリックス $[K]$ ,  $[M]$ の詳細は省略する。

### 3. 数値計算例と考察

以下に示す計算例では、全てのラミナが Graphite/Epoxy からなるものとし、材料定数として

$$E_1 = 40E_2, G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25$$

を用いることとする<sup>2)</sup>。また、板の形状は正方形とし、周辺は単純支持されているものとする。表 1 は 4 層逆対称積層正方形板 ( $45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$ ) について、式(12)中の級数の項数を増加したときの固有振動数の収束状況を示す。ここでは、各級数の項数はすべて等しいものとしている。表より、項数を 8 項とすると高次まではほぼ収束していることがわかる。したがって、以下の計算では 8 項を採用する。

周辺が単純支持された逆対称積層正方形板については、支配方程式を解析的に解くことが可能であり、Bert と Chen<sup>2)</sup>が求めた値を表 1 に示す。また、CPT はせん断変形を考慮しない古典板理論による結果である。 $\Omega_2$ は面内振動に対応する固有振動数であるため、文献(2)には示されていない。これより、本論文の値は Bert らの結果と良く一致していること、また、古典板理論では振動数をかなり過大に評価することがわかる。一次せん断理論による結果は、採用するせん断修正係数の値に依存しているが、この点に関しては文献(2)や(3)で考察されている。

図 2 は 3 層対称積層正方形板 ( $\theta/\theta/\theta$ )、図 3 は 4 層逆対称積層正方形板 ( $\theta/\theta/\theta/\theta$ ) において配向角 $\theta$ を変化させた場合の固有振動数を示す。いずれの場合も板全体の厚さは $h/a=0.1$ であり、各層の厚さは等しいとする。また $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ のとき、板はいずれの場合も直交異方性とな

表 1 ( $45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$ ;  $h/a=0.1$ )

$M$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
4	18.98	34.49	37.09	52.04	62.60
6	18.93	34.41	34.87	50.71	54.56
8	18.92	34.41	34.83	50.68	54.23
10	18.92	34.41	34.83	50.68	54.23
Bert <sup>(2)</sup>	18.46	—	34.87	50.52	54.27
CPT	23.53	—	53.74	94.11	98.87

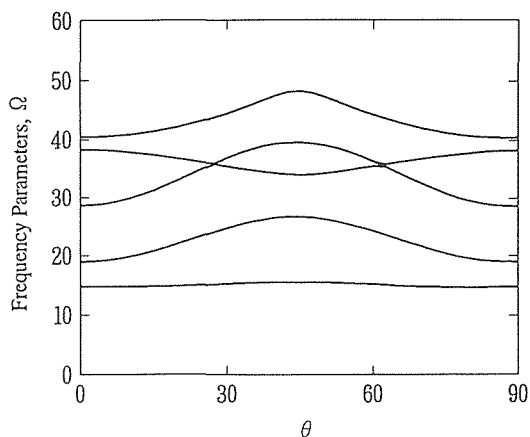


図2 対称積層平板の固有振動数パラメータ  
( $\theta/-\theta/\theta, h/a=0.1$ )

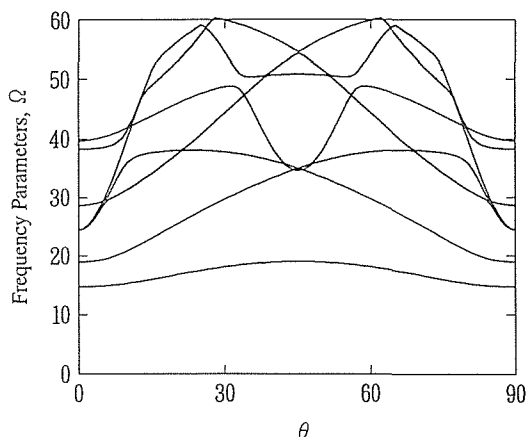


図3 逆対称積層平板の固有振動数パラメータ  
( $\theta/-\theta/\theta/-\theta, h/a=0.1$ )

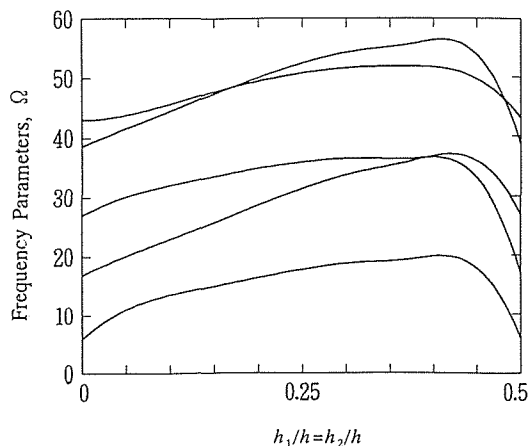


図4 対称積層平板の固有振動数パラメータ  
( $45^\circ/-45^\circ/45^\circ, h/a=0.1$ )

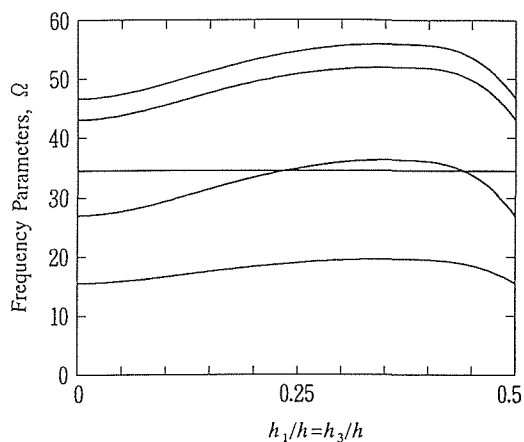


図5 逆対称積層平板の固有振動数パラメータ  
( $45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ, h/a=0.1$ )

り固有振動数は同じになる。しかし、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲では、対称積層の最低次の振動数はほとんど変化しないのに対し、逆対称積層の場合は $\theta = 45^\circ$ で極大となる。また、高次の振動数の変化を見ても、逆対称積層の方がその変化の状況が激しい。

図4は3層対称積層正方形板( $45^\circ/-45^\circ/45^\circ$ )において $h_1/h = h_2/h$ (第2層の厚さは $h_1 + h_2$ )を変化させた場合の固有振動数、図5は4層逆対称積層正方形板( $45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$ )において第2層と第3層の厚さ( $h_1/h = h_3/h$ )を変化させた場合の固有振動数を示す。図より、いずれの場合も中間層が全体の8割に近い厚さのときに振動数は最大となることがわかる。

図6に図2、図7に図3で示した各固有振動数の振動モードを示す。これより、図6に示され

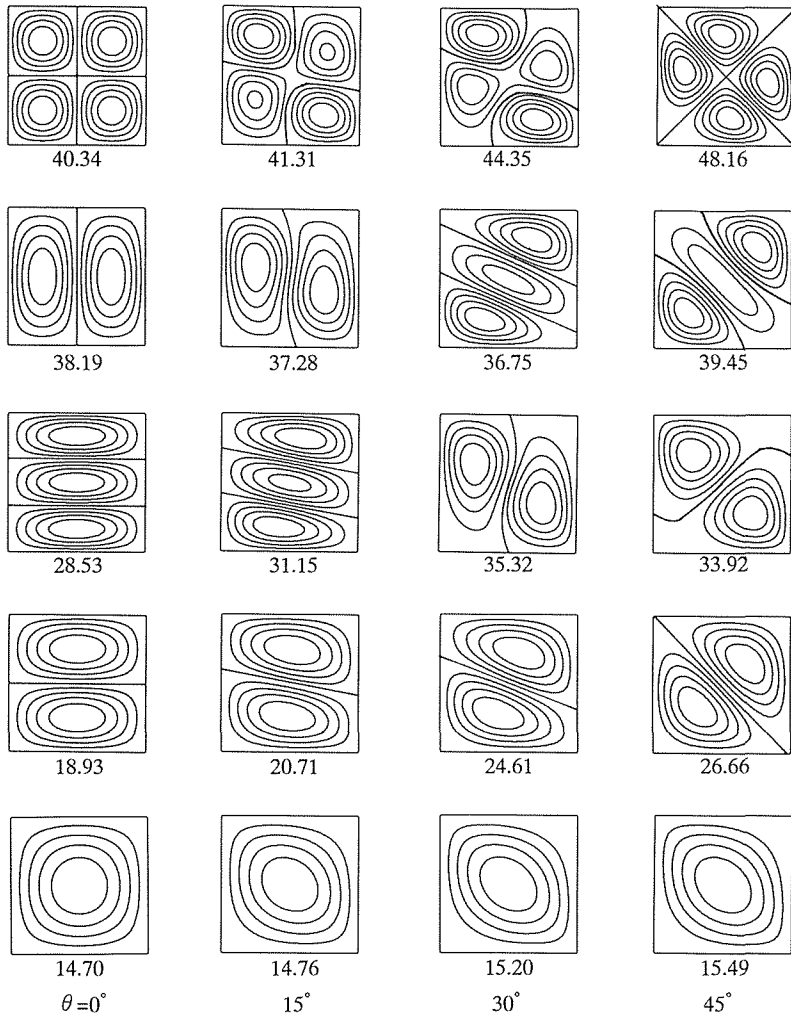


図6 対称層平板の振動モード

る対称積層の場合にのみ、繊維配向角 $\theta$ の変化が振動モードに強く影響を及ぼしている。また図2では第3次と4次の振動数曲線が交差しているが、このとき、図6のモードからも分かるようにモードの入れ替えが生じているのが認められる。なお振動モードの入れ替えは図7の逆対称積層板においても生じている。

#### 4. あとがき

本研究では、周辺が単純支持されたアングルプライ積層平板の振動特性を固有振動数パラメータと振動モードの点から定量的・定性的に調べたが、本方法を用いれば許容関数を適切に選定することによって他の境界条件を有する平板の場合についてもその振動特性を明らかにすることができる。

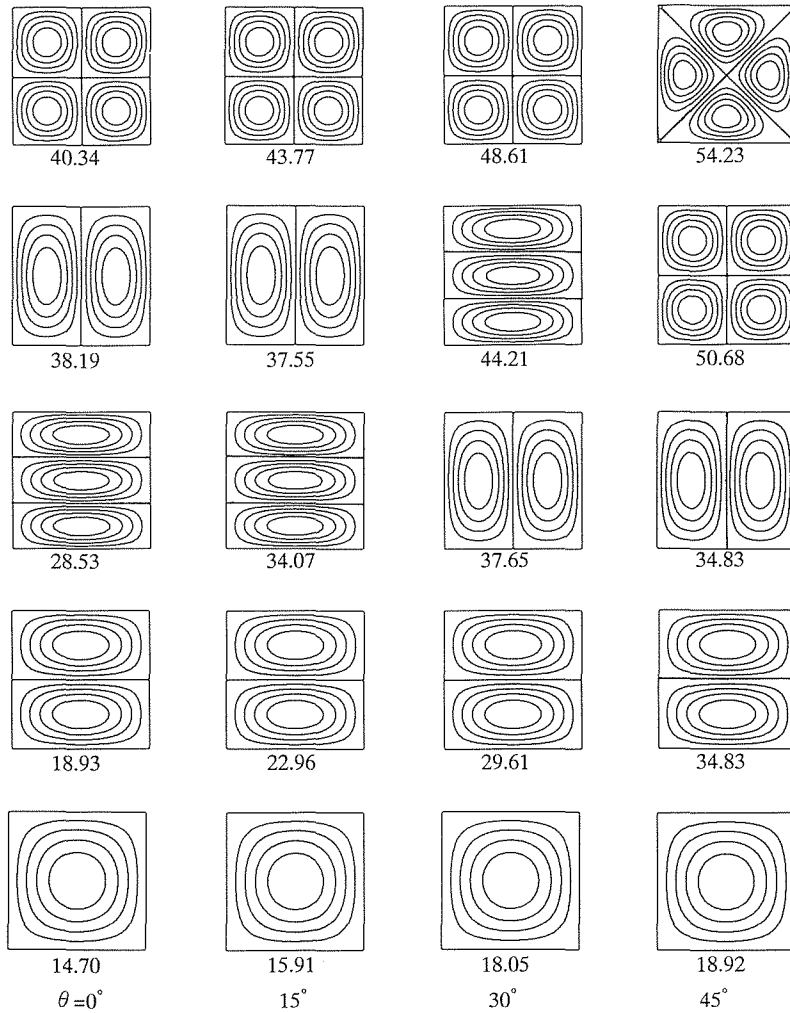


図7 逆対称層平板の振動モード

## 参考文献

- 1) 成田, 複合材料構造物のモデリングと振動問題における研究展望, 日本機械学会論文集, 59-565, C (1993), 2593.
- 2) Bert, C.W. and Chen, T.L.C., Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle-ply laminated rectangular plates, Int. J. Solids Struct., 14 (1978), 465.
- 3) 成田・他3名, 任意の境界条件を考慮した厚肉積層長方形板の振動解析, 日本機械学会論文集, 60-570, C (1994), 42.
- 4) Vinson, J. R.ら, 複合材料の構造力学, (1987), 日刊工業新聞社.