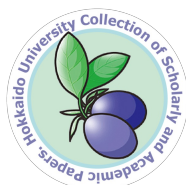




HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	抽象書換え系理論による講座配属アルゴリズムの完備性と解析
Author(s)	能登, 正人; 栗原, 正仁; 大内, 東
Citation	北海道大學工学部研究報告, 173, 23-30
Issue Date	1995-05-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42443
Type	departmental bulletin paper
File Information	173_23-30.pdf



抽象書換え系理論による講座配属アルゴリズムの完備性の解析

能登 正人 栗原 正仁 大内 東

(平成 6 年 12 月 26 日受理)

Analysis of Completeness of Laboratory Assignment Algorithm by Abstract Reduction Systems Theory

Masato NOTO, Masahito KURIHARA and Azuma OHUCHI

(Received December 26, 1994)

Abstract

A laboratory assignment algorithm is a procedure that assigns each of the m students to one of the n laboratories. In this paper, we prove the *completeness* (i.e., *termination* and *confluence*) of the algorithm by using *abstract reduction systems* theory. Termination guarantees that the computation will not proceed indefinitely, and confluence guarantees that the computational result is unique even in the presence of indeterminacy.

1. はじめに

講座配属とは、卒業研究の指導等のために学生を大学の各研究室に配属させることを指す。講座配属アルゴリズムは、 m 人の学生の各々を n 個の講座のうちの1つに配属するための手続きである。本論文で考察するアルゴリズムは、著者らが実際に用いたアルゴリズムを、理論的考察をしやすいように、単純化かつ抽象化したもので、基本的には、講座と学生の双方の希望に沿って配属を行うものである。この際、配属先の講座には定員があるので、配属希望者数が定員を超過した講座が存在する場合には調整の必要がある。講座配属のための準備(前提条件)を以下に示す。

(1) 希望講座リスト

各学生は、配属先として希望する順番にすべての講座を並べた希望講座リストを提出する。

(2) 講座毎の学生順位

各講座 i 毎に学生に優先順位を付け、その結果得られた順序を $>_i$ (i は講座)で表す。 $x >_i y$ は、講座 i への配属に関して学生 x は学生 y より優先順位が低いことを意味する。

(3) 定員配分

各講座毎に定員は決まっているものとし、定員の合計は学生数に等しい。

以上の準備のもとで、講座配属のアルゴリズムを以下に示す。

1. 全学生を第一希望どおりに仮配属させる。

2. 仮配属学生数が定員を越えている講座が存在する間、以下 (2.1~2.3) を繰り返す。

2.1 そのような講座 i を任意に1つ選択し、その講座に仮配属されている学生の中から、定員

超過分の学生を順序 $>_i$ のもとで優先順位が低い順に選ぶ。(ただし、幸いにも選ばれなかった(定員分の)学生の配属がここで決定するわけではない。)

2.2 ここで選ばれた学生の希望講座リストから第一希望を削除し、第二希望以下を順次繰り上げて新たに第一希望以下の希望講座リストとする。

2.3 それらの学生を(新たな)第一希望どおりに仮配属させる。

3. 全員の仮配属を正式な配属と決定する。

ステップ2.1~2.3での調整によりある講座 i の仮配属学生数が一時的に定員と等しくなっても、その後、他講座 j の調整の結果、講座 j から講座 i に仮配属学生が移動してきて、再度、講座 i を調整する必要があることに注意されたい。なお、ステップ2.1で選択する講座は任意のものでよいのでこのアルゴリズムには非決定性がある。もし、この選択の仕方によって最終的に解(配属結果)が違っていると、このアルゴリズムには不備があると考えられる。また、解が選択に依存する場合、どのような選択をすべきかを適切に設計するのは難しい。したがって、調整の必要のある講座が複数個存在するとき、どの講座からどのような順番で調整しても得られる結果が同じであることが望まれる。しかし、このことが成り立つかどうかは自明ではない。本論文では、抽象書換え系(*abstract reduction system*: ARS)の理論を用いてこのアルゴリズムの停止性および解の一意性(すなわち完備性)を証明する。

本論文の構成は以下のとおりである。2. では、計算モデルとして抽象書換え系を扱い、その諸性質について述べる。3. では、講座配属アルゴリズムを抽象書換え系としてモデル化し、その完備性を証明する。4. では、講座配属アルゴリズムを実際に適用する際の留意点を補足し、本論文のまとめとする。

2. 抽象書換え系

本章では、抽象書換え系^{1),2)}の概要と諸性質について述べる。抽象書換え系を以下に定義する。

定義 2.1

抽象書換え系は、空でない集合 A と二項関係 $\rightarrow \subseteq A \times A$ から成る対 $\mathcal{A} = \langle A, \rightarrow \rangle$ である。 $(a, b) \in \rightarrow$ の代わりに、 $a \rightarrow b$ と書き、 a は b に1ステップで簡約(reduction)されるという。

定義 2.2

(1) $\rightarrow$ の反射推移閉包(reflexive-transitive closure)を $\rightarrow^*$ で表す。もし $a \rightarrow^* b$ ならば、 a は b に簡約されるという。

(2) $\rightarrow$ の推移閉包(transitive closure)を $\rightarrow^+$ で表す。

すなわち、 $a \rightarrow^+ b(a \rightarrow^+ b)$ は a から b への0ステップ(1ステップ)以上の簡約の列 $a \rightarrow \cdots \rightarrow b$ が存在することを表す。もし、 $b \rightarrow a$ ならば $a \leftarrow b$ と書くことも可能である。 $a \leftarrow b$ に対しても同様である。

定義 2.3

(1) もし $a \rightarrow b$ なる要素 $b \in A$ が存在しないならば、要素 $a \in A$ は正規形(normal form)である。ある正規形 b に対して $a \rightarrow b$ であるならば、 $a \in A$ は正規形をもつという。 $\mathcal{A}$ の正規形の集合を $NF(\mathcal{A})$ あるいは $NF(\rightarrow)$ によって表す。

(2) もし A の要素の無限簡約列 $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow \cdots$ が存在しないならば、抽象書換え系 $\mathcal{A}$ は強正規化性(strongly normalizing: SN)もしくは停止性(termination)をもつ。言い換えれば、すべての簡約経路がいつかは正規形で終わることである。

定義 2.4

- (1) 任意の $a, b, c \in A$ に対し, $b \leftarrow a \rightarrow c$ ならば $\exists d \in A, b \rightarrow d \leftarrow c$ であるとき, 抽象書換え系 $\mathcal{A}$ は合流性 (*confluence*) を満たす, もしくは Church-Rosser (CR) 性をもつ。
- (2) 任意の $a, b, c \in A$ に対し, $b \leftarrow a \rightarrow c$ ならば $\exists d \in A, b \rightarrow d \leftarrow c$ であるとき, 抽象書換え系 $\mathcal{A}$ は局所合流性 (*local confluence*) を満たす, もしくは weakly Church-Rosser (WCR) 性をもつ。
- (3) 停止性と合流性を満たす抽象書換え系は完備 (*complete*) であるという。

合流性と局所合流性を表現するよく知られた図式を図 1 に示す。

定義 2.5

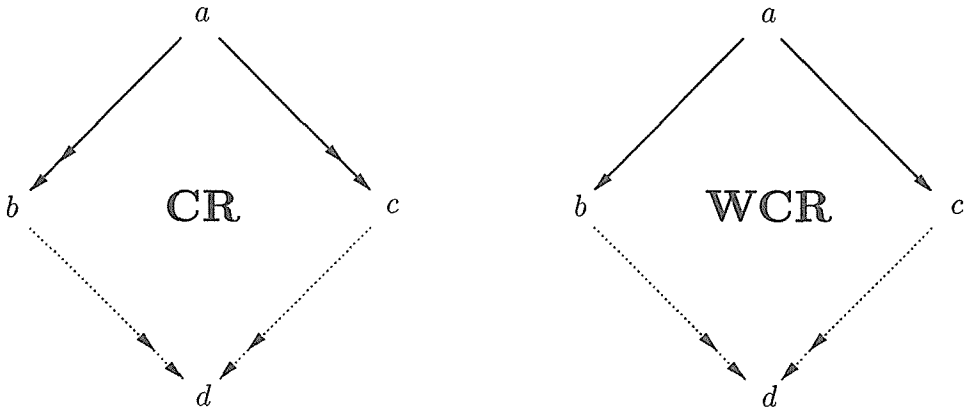


図 1 合流性と局所合流性

任意の $a, b, c \in A$ に対し, $b \leftarrow a \rightarrow c$ かつ $b, c \in \text{NF}(\rightarrow)$ ならば $b = c$ であるとき, 抽象書換え系 $\mathcal{A} = \langle A, \rightarrow \rangle$ は, 簡約に関して単一正規形 (*unique normal forms with respect to reduction : UN⁻*) をもつという。

本論文の目的は, 講座配属アルゴリズムを抽象書換え系としてモデル化し, その UN⁻性を示すことである。次の命題は, その目的のためには, CR 性を示すことが十分である^{1),2)}ことを示している。

命題 2.1

CR 性をもつ抽象書換え系は, UN⁻性を満たす。

次の命題は, CR 性を示すためのよく知られた十分条件を述べている。

命題 2.2 (Newman の補題)

SN 性を満たす抽象書換え系が WCR 性を満たすならば CR 性も満たす。

3. 講座配属アルゴリズムの完備性

本章では講座配属アルゴリズムを抽象書換え系としてモデル化し, その完備性 (SN かつ CR) を証明する。

3.1 抽象書換え系としての定式化

問題を一般的に扱うために次の記号を用いる。

$S = \{S_1, \dots, S_m\}$: 学生の集合

$L = \{L_1, \dots, L_n\}$: 講座の集合

各講座 i 毎に学生に優先順位を付け、その結果得られた順序を $>_i$ (i は講座) で表す。 $x >_i y$ は、講座 i への配属に関して学生 x は学生 y より優先順位が低いことを意味する。 $>_i$ は厳格全順序 (strict total ordering) とする。すなわち、任意の学生 x, y, z に対し、 $>_i$ は以下の条件を満たす。

- ・ $x \not>_i x$ (非反射性)
- ・ $x >_i y$ かつ $y >_i z$ ならば $x >_i z$ (推移性)
- ・ $x \neq y$ ならば $x >_i y$ または $y >_i x$ (比較可能性)

学生 $s \in S$ の現在の第 i 希望が $\ell_i \in L$ ($i = 1, 2, \dots, k$) であることを対 $\langle s, (\ell_1, \dots, \ell_k) \rangle$ で表し、学生 s の希望講座リストと呼ぶ。 k をこのリストの長さと呼ぶ。アルゴリズムの実行開始の時点では、 $k = n$ であり、 $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ は $(L_1, \dots, L_n)$ のある置換 (permutation) となっている。全学生の希望講座リストをちょうど 1 つずつ含む集合を (講座配属アルゴリズムの) 状態と呼ぶ。すべての状態の集合を状態空間と呼び、 Σ で表す。したがって、任意の状態 $\sigma \in \Sigma$ と任意の学生 $s \in S$ に対し、

- ・ $\exists x, \langle s, x \rangle \in \sigma$ (すなわち、 σ は学生 s の希望講座リストを含む。)
 - ・ $\langle s, x \rangle \in \sigma, \langle s, y \rangle \in \sigma$ ならば $x = y$ (すなわち、 σ は学生 s の希望講座リストを 2 つ以上含まない。)
- である。 $k > 0$ のとき σ からその時点での第一希望講座を削除したリストを $\sigma' = \langle s, (\ell_2, \dots, \ell_k) \rangle$ で表す。また、 $\sigma'' = (\sigma')' = \langle s, (\ell_3, \dots, \ell_k) \rangle$ とする。

講座配属アルゴリズムを抽象書換え系 $\langle \Sigma, \Rightarrow \rangle$ としてモデル化する。ただし、 $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ のとき $\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2$ は、状態 σ_1 において、定員を超過しているある講座 L_i を選択し、定員超過分の学生を順序 $>_i$ のもとで優先順位が低い順に選び、選んだ学生の希望講座リストから第一希望を削除した状態が σ_2 であることを表す。

ここで、解析の便宜上、アルゴリズム中のステップ 2.1 の「定員超過分」を「1 人」に書き改めた新たなアルゴリズムを導入し、それに対する抽象書換え系を $\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ とする。すなわち、 $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ のとき $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ は、状態 σ_1 において、定員を超過しているある講座 L_i を選択し、順序 $>_i$ のもとで最も優先順位が低い学生 1 人を選び、選んだ学生の希望講座リストから第一希望を削除した状態が σ_2 であることを表す。 $\Rightarrow, \rightarrow$ いずれの場合も、特に、講座 L_i を選択したことを陽に示すために $\sigma_1 \Rightarrow_i \sigma_2, \sigma_1 \rightarrow_i \sigma_2$ などと記すこともある。

命題 3.1

- (1) $\sigma \Rightarrow \sigma'$ ならば $\sigma \rightarrow^+ \sigma'$ である。
- (2) $\sigma \in \text{NF}(\Rightarrow)$ ならば $\sigma \in \text{NF}(\rightarrow)$ である。

証明

- (1) $\sigma \Rightarrow_i \sigma'$ と仮定する。ただし、ここで選択された講座は L_i であり、定員超過分は k 人 ($k > 0$) だったとする。このとき、新たなアルゴリズムで L_i を連続して k 回選択すれば k ステップの簡約列 $\sigma \rightarrow_i \dots \rightarrow_i \sigma'$ を得る。よって、 $\sigma \rightarrow^+ \sigma'$ である。
- (2) $\sigma \in \text{NF}(\Rightarrow)$ ならば、どの講座も定員を超過していないので、 $\sigma \in \text{NF}(\rightarrow)$ である。

命題 3.2

$\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ が完備ならば、 $\langle \Sigma, \Rightarrow \rangle$ も完備である。

証明 $\rightarrow$ が完備 (SN かつ CR) であると仮定する。

もし、 $\Rightarrow$ が SN でなければ、無限列 $\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2 \Rightarrow \dots$ が存在し、命題 3.1(1) より $\sigma_1 \rightarrow^+ \sigma_2 \rightarrow^+ \dots$ である。これは $\rightarrow$ の SN 性に矛盾する。ゆえに、 $\Rightarrow$ は SN である。

$\Rightarrow$ が CR であることを示すために、 $\sigma_1 \Leftarrow \sigma \Rightarrow \sigma_2$ と仮定する。 ($\Leftarrow$ は $\Rightarrow$ の反射推移閉包。) $\Rightarrow$ は

SN なので, σ_1, σ_2 の正規形 $\sigma'_1, \sigma'_2 \in \text{NF}(\Rightarrow)$ が存在する。よって,

$$\text{NF}(\Rightarrow) \ni \sigma'_1 \Leftarrow \sigma_1 \Leftarrow \sigma \Rightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma'_2 \in \text{NF}(\Rightarrow)。$$

命題 3.1 (1), (2) より, σ'_1 と σ'_2 は σ の $\rightarrow$ に関しての正規形でもある。すなわち,

$$\text{NF}(\rightarrow) \ni \sigma'_1 \leftarrow^+ \sigma \rightarrow^+ \sigma'_2 \in \text{NF}(\rightarrow)。$$

さらに命題 2.1 より, $\rightarrow$ は UN^- 性をもつので, $\sigma'_1 = \sigma'_2$ である。よって, $\sigma_1 \Rightarrow \sigma'_1 = \sigma'_2 \Leftarrow \sigma_2$ である。

ゆえに, $\Rightarrow$ は CR である。

以下の節において $\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ が完備であることを示す。

3.2 $\rightarrow$ の停止 (SN) 性

命題 3.3

$\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ は SN 性を満たす。

証明 $\sigma \rightarrow \sigma'$ のとき, σ' に含まれる全希望講座リストの長さの和は, σ のそれに比べて必ず 1 だけ小さい。リストの長さの和は負になることはない。ゆえに, 無限簡約列 $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \dots$ は存在しない。

3.3 $\rightarrow$ の合流 (CR) 性

$\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ は SN 性を満たしているので, Newman の補題より, CR 性を満たすことを証明するためには, WCR 性を満たすことを示せばよい。すなわち, $\sigma_1 \leftarrow \sigma \rightarrow \sigma_2$ ならばある σ' が存在し, $\sigma_1 \rightarrow \sigma' \leftarrow \sigma_2$ を示せばよい。

命題 3.4

$\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ は WCR 性を満たす。

証明 定員を越えている 2 講座 L_i と L_j を任意に選択し, L_i, L_j のみの調整によって合流することを示す。すなわち, $\sigma_1 \leftarrow_i \sigma \rightarrow_j \sigma_2$ ならば $\sigma_1 \rightarrow_{i,j} \sigma' \leftarrow_{i,j} \sigma_2$ を示す。ただし, $\rightarrow_{i,j}$ は $\rightarrow_i \cup \rightarrow_j$ の反射推移閉包である。以下では一般性を失うことなく, $i=1, j=2$ と仮定する。

希望講座リストの集合 σ は, σ 中の各リスト内での L_1, L_2 の順位によって, 以下の $A \sim E$ の互いに素な 5 つの集合に分割することができる。

$$A = \{t \in \sigma \mid t = \langle \dots, (L_1, L_2, \dots) \rangle\}$$

$$B = \{t \in \sigma \mid t = \langle \dots, (L_1, \dots) \rangle\} - A$$

$$C = \{t \in \sigma \mid t = \langle \dots, (L_2, L_1, \dots) \rangle\}$$

$$D = \{t \in \sigma \mid t = \langle \dots, (L_2, \dots) \rangle\} - C$$

$$E = \sigma - (A \cup B \cup C \cup D)$$

例えば, A は第一希望が L_1 で第二希望が L_2 , B は第一希望が L_1 で第二希望が L_2 でない希望講座リストの集合である。

学生間の順序 $>$ を希望講座リスト間の順序としても使用できるように, $x = \langle s_1, \dots \rangle \in \sigma, y = \langle s_2, \dots \rangle \in \sigma$ が希望講座リストで, $s_1 > s_2$ のとき $x >_i y$ と定義する。このとき, $x >_i y$ ならば $x' >_i y, x >_i y'$, すなわち, 第一希望を削除しても順位は不変である。

ここで, 一般に

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$$

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$$

$$D = \{d_1, d_2, \dots, d_s\}$$

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_t\}$$

ただし,

$$a_1 >_1 a_2 >_1 \cdots >_1 a_p$$

$$b_1 >_1 b_2 >_1 \cdots >_1 b_q$$

$$c_1 >_2 c_2 >_2 \cdots >_2 c_r$$

$$d_1 >_2 d_2 >_2 \cdots >_2 d_s$$

とおく。

この状態を表1の8つに場合分けする。それぞれの場合について WCR 性を示す図の番号もこの表に示している。ただし, IIはIIIにおいて $>_1$ と $>_2$, A と C , B と D の対称性を考慮することによって省略することができる。同様に, VIIはV, VIにおいての対称性を考慮することによって省略することができる。

	集合間の順位	証明図
I	$a_1 >_1 b_1, c_1 >_2 d_1, c_1 >_1 a_1, a_1 >_2 c_1$	図2
II	$a_1 >_1 b_1, c_1 >_2 d_1, c_1 >_1 a_1, c_1 >_2 a_1$	図3と対称
III	$a_1 >_1 b_1, c_1 >_2 d_1, a_1 >_1 c_1, a_1 >_2 c_1$	図3
IV	$a_1 >_1 b_1, c_1 >_2 d_1, a_1 >_1 c_1, c_1 >_2 a_1$	図4
V	$a_1 >_1 b_1, d_1 >_2 c_1, a_1 >_2 d_1$	図5
VI	$a_1 >_1 b_1, d_1 >_2 c_1, d_1 >_2 a_1$	図6
VII	$b_1 >_1 a_1, c_1 >_2 d_1$	図5, 6 と対称
VIII	$b_1 >_1 a_1, d_1 >_2 c_1$	図7

表1 命題3.4の場合分け

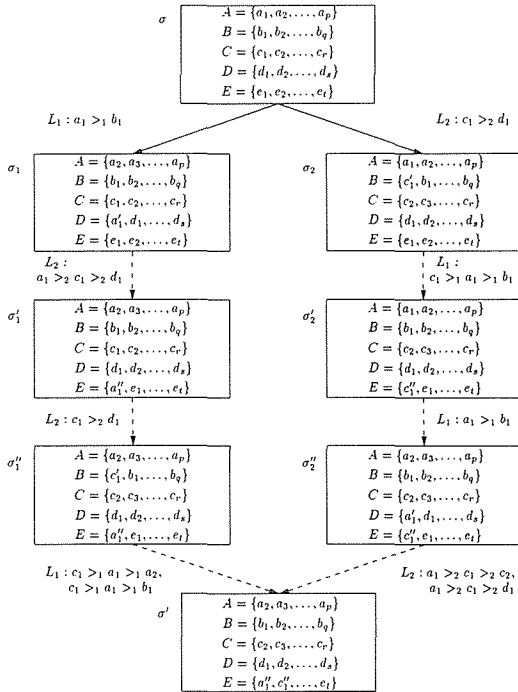


図2 ケースI ($c_1 >_1 a_1 >_1 b_1; a_1 >_2 c_1 >_2 d_1$)

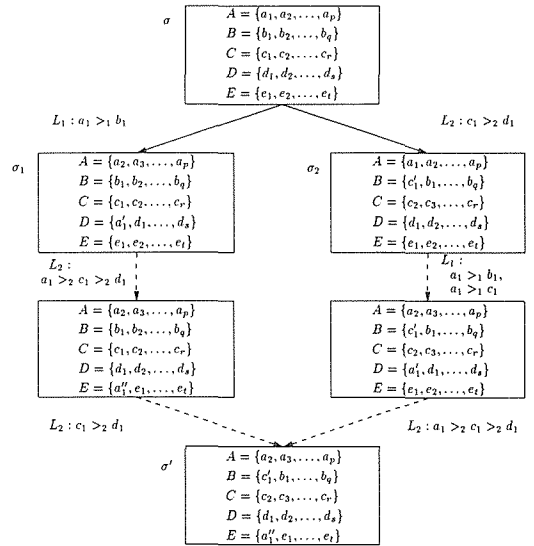
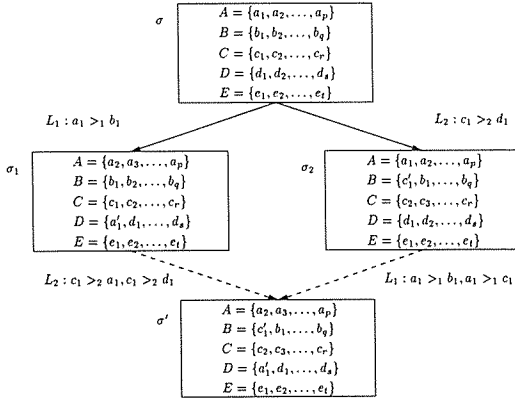
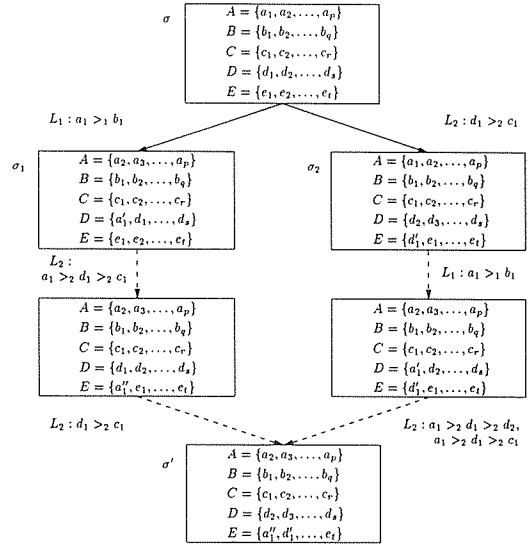
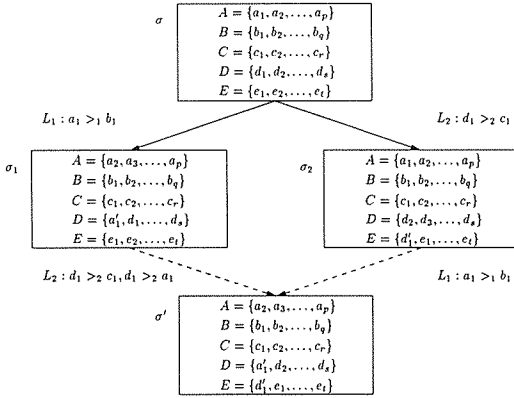
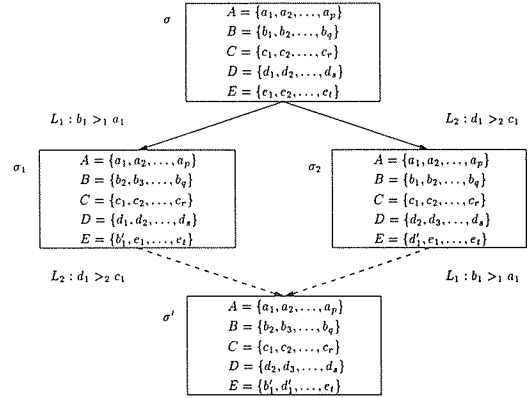


図3 ケースIII ($a_1 >_1 b_1, a_1 >_1 c_1; a_1 >_2 c_1 >_2 d_1$)


 図4 ケースIV ($a_1 >_1 b_1, a_1 >_1 c_1$; $c_1 >_2 a_1, c_1 >_2 d_1$)

 図5 ケースV ($a_1 >_1 b_1$; $a_1 >_2 d_1 >_2 c_1$)

 図6 ケースVI ($a_1 >_1 b_1$; $d_1 >_2 c_1, d_1 >_2 a_1$)

 図7 ケースVIII ($b_1 >_1 a_1$; $d_1 >_2 c_1$)

以下では、最も複雑であるケース I (図2) についてのみ説明する。図の矢線の付近にはその簡約に使用した講座と条件を示してある。まず、状態 σ から L_1 講座と L_2 講座についてそれぞれ順序 $>_1, >_2$ に基づき調整していくわけだが、図の左半分の簡約経路について説明していく。 L_1 講座を第一希望にしている集合 A, B において $a_1 >_1 b_1$ により a_1 から第一希望が削除され、 a'_1 として集合 D に移動し、状態 σ が状態 σ_1 に変化している。第2ステップ(L_2 の調整)では、 $a_1 >_2 c_1, c_1 >_2 d_1, >_2$ の推移性および希望削除による順序の不変性により、 $a'_1 >_2 c_1, a'_1 >_2 d_1$ であるから a'_1 が a'_1 として集合 E に移動し、状態 σ_1 が状態 σ'_1 に変化している。第3ステップ(L_2 の調整)では、 $c_1 >_2 d_1$ により c_1 が c'_1 として集合 B に移動し、状態 σ'_1 が状態 σ'_2 に変化している。第4ステップ(L_1 の調整)では、 $c_1 >_1 a_1 >_1 a_2$ および $c_1 >_1 a_1 >_1 b_1$ により c'_1 が c'_1 として集合 E に移動し、状態 σ'_2 が状態 σ' に変化している。図の右側についても同様の操作を行うことにより最終的には状態 σ' となり合流することがわかる。以上では、暗黙に $p, q, r, s > 0$ と仮定したが、少なくとも1つが0の場合も同様である。

また、ケース I 以外の図についても、同様に、 $\sigma_1 \rightarrow \sigma' \leftarrow \sigma_2$ を確認することができる。ゆえに、 $\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ は WCR 性を満たす。

定理 3.1

$\langle \Sigma, \rightarrow \rangle$ は完備である。

証明 命題 3.3, 3.4, 2.2 より明らか。

定理 3.2

$\langle \Sigma, \Rightarrow \rangle$ は完備である。

証明 命題 3.2, 定理 3.1 より明らか。

4. おわりに

本論文では、講座配属アルゴリズムの完備性すなわち停止性と解の一意性を抽象書換え系の理論により示した。

この種の人員配置問題に関連した研究としては、クラス編成問題³⁾がある。クラス編成問題では、配属される学生の希望を出来るだけ満たすために、数理計画的アプローチにより解かれている。具体的には、オペレーションズ・リサーチ (OR) の分野で用いられている線形計画法により学生集団の満足度を最大にすることによって、全学生を配属するようになっている。

本論文で考察したアルゴリズムは、「集団の満足度」なるものを仮定しておらず、各学生の希望と各講座毎の学生順位 $>_i$ のみを仮定して、ある意味では個人主義的に配属を決めている。このアルゴリズムを実際に適用する際の(情報処理上の)留意点を以下に示す。

(1) 希望講座リスト

各学生は、実際には全講座を順位付けする必要はない。例えば、初回のリスト提出時には第三希望まで示し、必要に応じて第四希望以降を漸増的 (*incremental*) に追加していてもよい。

(2) 講座毎の学生順位

全講座が全学生についてあらかじめ順位付けをする必要はない。とりあえず、調整が必要となった講座 i に対して、調整にかかわる関係学生のみ比較して $>_i$ の一部を決定する。以後は、漸増的に $>_i$ を拡張していく。 $>_i$ を決めるための要因としては

- ・ 講座 i の研究内容に密接に関係する科目の成績
- ・ 講座 i への配属の希望の度合(希望講座リスト中の順位)
- ・ 抽選
- ・ 学生どうしの話し合い

などの1つ、あるいはいくつかの組合せが考えられる。

(3) 定員配分

定員は提出された希望講座リストを見た後に、希望数の多寡に応じて決定してもよい。

参考文献

- 1) Dershowitz, N. and Jouannand, J. P.: 書換え系, コンピュータ基礎理論ハンドブック II, 丸善, pp. 243-321 (1994).
- 2) 井田哲雄: 計算モデルの基礎理論, 岩波書店, pp. 223-296 (1991).
- 3) 今野 浩: 数理決定法入門 キャンパスの OR, 朝倉書店, pp. 1-20 (1992).