HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	高速電子ビームモニターの一般的解析
Author(s)	沢村, 晃子; 本間, 彰; 山崎, 初男
Citation	北海道大學工學部研究報告, 173, 39-56
Issue Date	1995-05-31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42446
Type	departmental bulletin paper
File Information	173_39-56.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第173号（平成7年）

Bulletin of the Faculty of Engineering
Hokkaido University No. 173 (1995)

高速電子ビームモニターの一般的解析

沢村　晃子　　本間　彰　　山崎　初男

（平成6年12月28日受理）

A General Analysis of Beam Monitor for High Energy Electrons

Teruko SAWAMURA, Akira HOMMA and Hatsuo YAMAZAKI

(Received December 28, 1994)

Abstract

The beam monitor response for high energy electrons is studied generally on the basis of electromagnetic wave interaction of a beam induced field with a monitor conductor. The response of a wireline-type monitor dependent on electron energy, monitor load impedance and monitor-beam configulation is derived. The limiting case of on extremely short wireline is analyzed and the response of a capacitive monitor or inductive monitor is obtained for an open-ended and a short-ended wireline. The time dependent output of a wireline -type monitor for a gaussian beam is calculated by taking the transfer function of the observing system into consideration.

1．緒　　言

加速器工学とその応用の発展に伴い，高速荷電粒子ビーム計測への要求も高精度化，多様化している。特に最近，ピコ秒領域の高速パルス電子ビームの発生・利用への関心が高い。一般に，非接触型のビームモニタは，ビーム発生電磁場とモニタ導体との相互作用を利用するものであるが，この時間領域になると相互作用は電磁波動的相互作用となる。一方，ビームモニター出力は，相互作用の空間積分によって得られる電流・電圧などである。このような問題には，相反定理の応用が有効で，アンテナの問題や電磁波散乱問題が相反定理を用いて解かれている。Rumseyは相反定理を一般化し，線形な系の応答を求める方法を定式化している[1]。

高周波領域のビームモニタの応答解析がKerns等，Cuperus，Lambertson，Barry等によってなされている。Kernsはワイヤライン型モニタを，Cuperusは，種々の型のモニタを扱っている[2),3)]。Lambertsonは，ビーム－電磁場相互作用装置（加速器・ビームモニター）を一般的に取り扱っている[4)]。これらの論文中で，Kerns，Cuperusはビームによりモニター導体に誘起される電圧・電流の導出にRumseyの表式を引用しているし，Lambertsonのストリップライン型モニターの信号誘起に関する取扱い方法は，Rumseyと全く等価である。Barryは，ワイヤライン型モニタ中のビーム誘起電源の出力端子への伝搬を伝送線路モデルで解析している[5)]。

本論文では，ピコ秒領域を含む時間領域でのワイヤライン型ビームモニタの高速電子ビームに

原子工学科　基礎原子核工学講座

対する応答を，電磁波動的相互作用に基づいて一般的に導出した。この際 Kerns 等と同じく，Rumsey の表式を用いてビーム誘起電圧を求め，又，その導出過程において Barry と同様な伝送線路モデルを用いている。その結果，電子ビームエネルギー，モニタ負荷抵抗，ビームとモニタの幾何学的配置に依存する一般的なビームモニター応答を得た。更に極端に短い線路或いは低周波近似として，ボタン型のような容量型モニタ，ファラディの法則に従うような誘導型モニタの応答を得た。

さらに，電子ビームの波形をガウス波形，ビームモニタ出力端子から観測装置までの信号伝送・観測装置の伝達関数をガウス型としたときの観測波形を計算した。

本論文の第 1 章では，Rumsey の定式化について紹介し，特にアンテナを例に取った回路的表現に等価な電磁場的表現が，ビームモニタの応答解析に有用であることを示した。第 2 章では，Rumsey 表式を用いる際要求される，モニター出力端の単位電源励起時電流の算出に，伝送線路モデルを用いることを述べた。また，モニター応答を Barry が導入したトランスファーインピーダンスで表すことを述べた。第 3 章では，ワイヤライン型モニタとビームとの幾何学的配置（＝ビームとモニタのなす角）やビーム速度が特別の場合に対して，トランスファーインピーダンス中のビーム誘起電界に関わる部分を除いた部分について，具体的に計算している。第 4 章では，ワイヤが設置された金属導体円筒軸に平行に進行する等速点電荷による電界に基づきトランスファーインピーダンス中のビーム誘起電界に関わる部分の計算を行っている。ビーム誘起電界には，Cuperus の計算結果を引用している[3]。第 5 章では，観測装置までの伝送特性を考慮した波形の計算を行っている。最後に結言において，全体のまとめと今後の展望について言及している。

1．1．基礎理論-Rumsey による相反定理の定式化の応用[1]

線形な系では応答として要求される量が空間積分量の場合，相反定理を用いることにより問題が簡単になることはよく知られている。Rumsey の線形な系の応答を source-response の概念を用いて展開した手法はこのことを示している。以下に文献 [1] に従って次節以下で用いる，回路理論と場の理論との結合に関する結果を紹介する。

線形システムの特性は，源ベクトル$\boldsymbol{a}$，レスポンスベクトル$\boldsymbol{\alpha}$，システム行列Rで表現される。即ち，システムの，源ベクトル$\boldsymbol{a}$に対する応答は，

$$\boldsymbol{\alpha}=R\boldsymbol{a} \tag{1-1}$$

で表わされる。

源ベクトル及びレスポンスベクトルに対し以下のように スカラー積を定義する。

$\boldsymbol{a}$:$\boldsymbol{A}_a(x,y,z)$，$\boldsymbol{b}$:$\boldsymbol{A}_b(x,y,z)$とすると

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\int \boldsymbol{A}_a\boldsymbol{A}_b dxdydz \tag{1-2}$$

線形な系では

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a} \tag{1-3}$$

となり，これは相反定理の一般的表現である。

高周波電磁場の問題では，高周波電磁場$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$を$\boldsymbol{\alpha}$とし，電磁場源である電流$\boldsymbol{J}$・磁流$\boldsymbol{K}$を$\boldsymbol{a}$に選ぶ。時間項を$\exp(j\omega t)$と表すと，マックスウェル方程式は，

$$\boldsymbol{J}+(\sigma+j\omega\varepsilon)\boldsymbol{E}=\nabla\times\boldsymbol{H}$$
$$\boldsymbol{K}+j\omega\mu\boldsymbol{H}=-\nabla\times\boldsymbol{E} \qquad (1-4)$$

図1のような，源$\boldsymbol{J}_a$，$\boldsymbol{K}_a$及び$\boldsymbol{J}_b$，$\boldsymbol{K}_b$があり，$\boldsymbol{J}_a$，$\boldsymbol{K}_a$が閉局面Sに囲まれた体積V中に，$\boldsymbol{J}_b$，$\boldsymbol{K}_b$がVの外にあるような閉曲面Sが存在する場合には，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\alpha}$は以下のようになる。$\boldsymbol{a}\rightarrow\boldsymbol{J}_a$，$\boldsymbol{K}_a$，$\boldsymbol{\alpha}=R\cdot\boldsymbol{a}\rightarrow\boldsymbol{E}_a$，$\boldsymbol{H}_a$，・・・と対応させると，

$$\boldsymbol{a}\cdot R\boldsymbol{b}=\int_v(\boldsymbol{J}_a\cdot\boldsymbol{E}_b-\boldsymbol{K}_a\cdot H_b)dxdydz \qquad (1-5)$$

$$=\oint_s(\boldsymbol{E}_a\times H_b-\boldsymbol{E}_b\times H_a)\cdot Nds \qquad (1-6)$$

N:Sの面方向単位ベクトル

回路理論の場合は，電圧源v_{an}及び電流源i_{an}をa，電流I，電圧Vを$\boldsymbol{\alpha}$に選ぶ。

$$\boldsymbol{a}\cdot R\boldsymbol{b}=\sum_n(v_{an}I_{bn}-i_{an}V_{bn}) \qquad (1-7)$$

ここで，V_{an}，i_{bn}，V_{an}，I_{bn}の向きは図2のようにとるものとする。

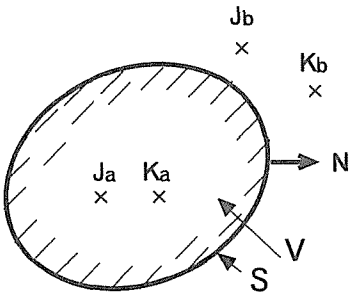


図1　高周波電磁場のsource-response

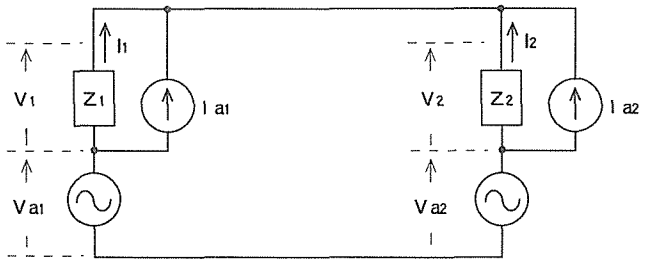


図2　回路理論のsource-response

適当なベクトル$\boldsymbol{a}$とレスポンス$\boldsymbol{\alpha}$のスカラー積をとることにより，システム中の物理量を求める事ができる。例えば，$\boldsymbol{a}$は電荷分布$\rho_a(x,y,z)$，$\boldsymbol{\alpha}$はポテンシャル分布$\phi(x,y,z)$等の対応が考えられる。この場合は，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\int\rho_a\phi dxdydz \qquad (1-8)$$

ベクトル$\boldsymbol{a}$を点(x_1,y_1,z_1)における単位点電荷とすると，$\rho_a=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{i}x_1+\boldsymbol{j}y_1+\boldsymbol{k}z_1,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$は$x$,$y$,$z$方向の単位ベクトル)スカラー積は点$(x_1,y_1,z_1)$におけるポテンシャルを表わすことになる。$\boldsymbol{a}$を単位電気双極子とすると，スカラー積はその点の電界強度になる。このように，スカラー積をとることにより，物理量を誘導するベクトルをテスト源と呼ぶ。

以下に双円錐アンテナ（bicanonical antenna）の例を紹介する。

導出する量は，アンテナ外の源$\boldsymbol{b}$により誘起されるアンテナ出力端子短絡電流とする。テスト源として出力端子部の単位電圧源を選ぶ。アンテナ入射電磁界の源を$\boldsymbol{b}$とする。電圧源$\boldsymbol{a}$:$v_a=1$を含む体積Vを図3 aのように選ぶ。(1−7)を用いると，

$$\boldsymbol{a}\cdot R\boldsymbol{b}=v_aI_b=I_b \qquad (1-9)$$

により，$\boldsymbol{b}$により誘起されるアンテナ短絡電流I_bが得られる。

一方，(1−5,6)を用いるならばどうであろうか。回路における電圧源は，完全導体円筒側面のすぐ外側のソレノイダル状に分布する磁流シートで置き換えることができる。ソレノイドのすぐ外側の電界の接線成分は表面磁流密度に等しくその方向は磁流方向に垂直になる。もし円筒が無限小（長さと直径）ならば磁流シートは周りの条件に独立な電圧を発生する。更にこの円筒端面間のインピーダンスは0である。こうして電気的導体コアを有する磁流ソレノイド$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{N}$($\boldsymbol{N}$: 円筒表面の面方向)は場の理論における電圧源になる。この様子を図3bに示す。単位電圧源は，

$$\lim_{\iota\to 0} E_a\iota = 1$$

と書ける。双円錐アンテナの出力端子に単位電圧源が接続された場合，Sをギャップを含む二つの円錐面上にとると(図3a参照)，ギャップ以外では$\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{E}_a=0$，$S$外の源$\boldsymbol{b}$による電場$\boldsymbol{E}_b$は$S$上で$\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{E}_b=0$であるから(1−5,6)は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot R\boldsymbol{b} &= \int(\boldsymbol{E}_a\times\boldsymbol{H}_b-\boldsymbol{E}_b\times\boldsymbol{H}_a)\cdot N ds\\ &= \int(\boldsymbol{H}_b\times\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{E}_b-\boldsymbol{E}_b\times\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{H}_a)ds\\ &= \int_{gap}(\boldsymbol{H}_b\times\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{E}_a)ds\\ &= \int(\boldsymbol{H}_b\times\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{E}_a)2\pi r d\iota = \underbrace{2\pi r(\boldsymbol{H}_b\times\boldsymbol{N})_\iota}_{I_b}\underbrace{\int(\boldsymbol{E}_a)_\iota d\iota}_{v_a}\\ &= I_b\cdot v_a\end{aligned}$$

となり，(1−9)に帰着する。

さて，上述の電圧源$\boldsymbol{a}$とアンテナ外の源$\boldsymbol{b}$で励起されたアンテナへのレスポンス間には次の関係が成立する。$\boldsymbol{a}$によって励起されたアンテナシステムがS外につくる電磁場は，アンテナを除去したシステム（＝自由空間）のS上の等価電流･磁流，$\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{K}$によるS外の電磁場と等価である。（＝等価原理或いはHuygensの定理）これによるならば，S外では

$$\boldsymbol{a}\cdot R\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot R\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot R_1(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{K})=\boldsymbol{b}\cdot R_1\boldsymbol{J}+\boldsymbol{b}\cdot R_1\boldsymbol{K}$$

R_1はアンテナを除去したシステム（＝自由空間）のシステム行列である。このギャップに単位電圧源を含む場合は$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{E}_a$であり，$R_1\boldsymbol{K}=\boldsymbol{E}_a$はギャップ部のみに存在し，$\boldsymbol{b}$と同一位置には存在しないから，$\boldsymbol{b}\cdot R_1\boldsymbol{K}=0$。結局，

$$\boldsymbol{a}\cdot R\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot R_1\boldsymbol{J}=\int_s \boldsymbol{J}_c\cdot\boldsymbol{E}_d'\mathrm{ds} \qquad (1-10)$$

$\boldsymbol{J}_c$：単位電圧源によるアンテナ表面の電流

$\boldsymbol{E}_d'$：自由空間中（＝R_1中）の$\boldsymbol{b}$による電界

これを用いると$\boldsymbol{a}\cdot R\boldsymbol{b}$をアンテナ存在時の$\boldsymbol{b}$による電磁界を計算すること無しに，単に$\boldsymbol{b}$による自由空間中の電磁界を計算することにより導出できる。

テストに出力端子の単位電流源を用いた場合は，回路表現では，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}_a=\mathbf{1}$,

$$\boldsymbol{a}\cdot R\boldsymbol{b}=i_a V_b=-V_b \qquad (1-11)$$

を得る。電流源は内部インピーダンス無限大であるから，V_bは開放電圧である。電磁場表現では，Sを図3cのように考え，$\boldsymbol{a}$を$\boldsymbol{i}_a=2\pi r\boldsymbol{J}_a=2\pi r(\boldsymbol{H}_a\times\boldsymbol{N})$とすると

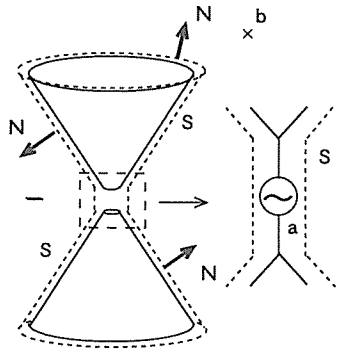


図３ａ　模式的双円錐アンテナと表面Ｓの考え方

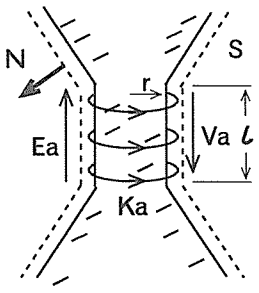


図３ｂ　等価電圧源

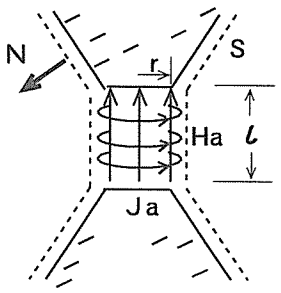


図３ｃ　等価電流源

$$\boldsymbol{a}\cdot R\boldsymbol{b}=-\int_{gap}(\boldsymbol{H}_a\times\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{E}_b)ds$$
$$=-\int_{gap}(\boldsymbol{H}_a\times\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{E}_b)2\pi r d\ell=\underbrace{-2\pi r(\boldsymbol{J}_a)_\ell}_{i_b}\underbrace{\int(\boldsymbol{E}_a)_\ell d\ell}_{v_a}$$
$$=i_a\cdot V_a=V_b$$

$\boldsymbol{J}_a$は自由空間中のソレノイダル磁場$\boldsymbol{H}_a$より得られ，内部インピーダンス無限大の定電流源に対応し，(1−11)に相当する式が得られた。さらに，上述と同様に，次式が得られる。

$$\boldsymbol{a}\cdot R\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot R_1\boldsymbol{J}=\int_s\boldsymbol{J}_c\cdot\boldsymbol{E}_b'ds \qquad (1-12)$$

$\boldsymbol{J}_c$：単位電流源によるアンテナ表面の電流

$\boldsymbol{E}_b'$：自由空間中（$=R_1$中）の$\boldsymbol{b}$による電界

以上より，開放電圧・短絡電流を求めるためには，単位電流源・単位電圧源をテスト源とすればよいこと，電圧源・電流源の電磁気的表現は

電圧源：円柱導体上のソレノイダル磁流　$\boldsymbol{K}_a=\boldsymbol{E}_a\times\boldsymbol{N}$

電流源：自由空間中の電流　$\boldsymbol{J}_a=\boldsymbol{H}_a\times\boldsymbol{N}$

であることが示された。

２．ビームモニター応答の定式化

２．１．ビームモニターのトランスファーインピーダンス

本節以降では，主な議論は周波数領域で行なう。角周波数をωとし，ビームモニターの応答を以下のように定義されるトランスファーインピーダンス$Z_t(\omega)$で表すことにする[2)]。

$$Z_t(\omega)=\frac{V_m}{I_b} \qquad (2-1)$$

V_mはビームモニタ出力端子にインピーダンスZ_t接続時の出力端子電圧，I_bはビーム電流である。

高速電子ビーム源をアンテナの場合の$\boldsymbol{b}$に対応させ，ビームモニタ出力端子に単位電流源，或いは単位電圧源接続時のモニタ表面電流を$\boldsymbol{J}_c$，電子ビームによるモニタを除去した時の電界を$\boldsymbol{E}_b'$に対応させると，開放電圧･短絡電流は(1−10)，(1−12)により導出できる。更に，出力端子側から見たビームモニタの内部インピーダンスZ_{in}が与えられるならば，電源等価定理に基づきV_mを求

め，$Z_t(\omega)$が導出できる。こうして，モニタ応答$Z_t(\omega)$を求める問題を，電子ビームによる電界を求める問題と，単位電源励起時のモニタ表面電流及びモニタインピーダンスZ_{in}等の回路的パラメータを求める問題に分離することができる。後者の回路的パラメータ導出には次節に示す伝送線路モデルを用いる。

2．2．伝送線路モデル

ここで今まで具体的に示さなかったモニタ形状を定義することにする。本文では図4aに示すワイヤライン型と呼ばれるモニタについて考察する。ワイヤラインモニタは，電子ビーム進行方向に平行な中心軸(z_b－軸)を有する金属円筒壁に設置する。モニタは金属壁に平行な長辺と垂直な短辺とから成る。一方の短辺端は円筒外へと取り出され，金属壁と対になって出力端子とする。もう一方の短辺端は任意のインピーダンスZ_2を経て金属壁に短絡する。伝送線路モデルでは，長辺は金属壁と対になって伝送線路として動作すると考える。このモデルによるならば，ワイアラインモニタに対し図4bのような等価回路を得る。この伝送線路の4端子表示による入力インピーダンスは，

$$Z_{in}(\omega)=Y_{in}(\omega)^{-1}=(AZ_2+B)/(CZ_2+D) \qquad (2-2)$$

$$A=\cos(\beta\ell), \qquad B=jZ_c\sin(\beta\ell)$$

$$C=j\sin(\beta\ell)/Z_c, \qquad D=\cos(\beta\ell)$$

ここで，Z_c，β，ℓは線路の特性インピーダンス，伝搬定数，線路長（＝長辺長）である。

出力端に単位電流源を接続するとワイアライン上の電流jは，$z=0$，$z=\ell$で（図4b参照），

$z=0$で　$j_1=1$,

$z=\ell$で　$j_2=2\exp(-j\beta\ell)\times Z_c/[\{1-\Gamma_2\exp(-j2\beta\ell)\}(Z_2+Z_c)]$

(1－12)を用いると出力端子の開放電圧は，

$$V_0(\omega)=\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}_b'\,ds$$

ビームによる電界が半径方向成分のみ，$\boldsymbol{E}_b'\sim E_b'\boldsymbol{i}_r$（金属壁近傍で平行成分～0）と近似すると，

$$V_0(\omega)\sim\int\{j_1E_b'(z=0)+j_2E_b'(z=\ell)\}dh=V_{u1}-j_2V_{u2} \qquad (2-3)$$

$$V_{u1}=\int_{on\ \ short\ \ section}E_b'\,dh(z=0) \qquad V_{u2}=\int_{on\ \ short\ \ section}E_b'\,dh(z=\ell)$$

となる。更に，(2－1)と電源等価定理を用いるとトランスファーインピーダンスは，

$$Z_t(\omega)=\{Z_1(V_{u1}-j_2V_{u2})/I_b\}/\{Z_{in}(\omega)+Z_1\} \qquad (2-4)$$

$$=G\{1-j_2V_{u2}/V_{u1})(Z_1Z_c)/\{Z_{in}(\omega)+Z_1\} \qquad (2-4')$$

$$G=V_{u1}/(Z_cI_b) \qquad (2-5)$$

先に求めたj_2を代入すると

$$Z_t(\omega)=\frac{(Z_1\|Z_c)G}{\{1-\Gamma_1\Gamma_2\exp(-j2\beta\ell)\}}-[1-\Gamma_2\exp(-j2\beta\ell)-(1-\Gamma_2)\exp(j\beta\ell)(\frac{V_{u2}}{V_{u1}})] \qquad (2-6)$$

を得る。ここで，

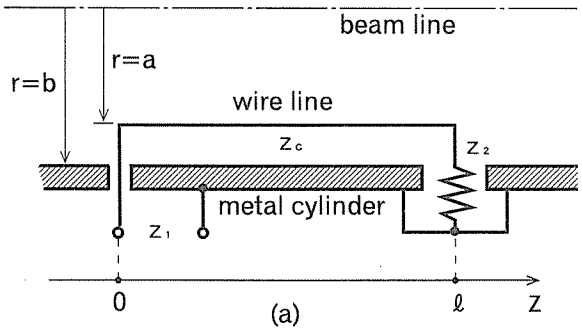


図4 a　ワイヤライン型モニタ

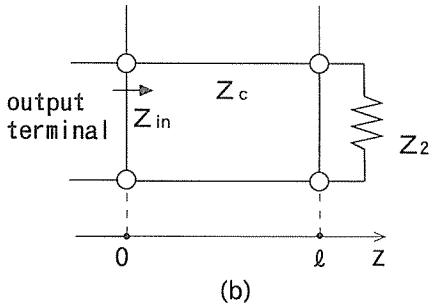


図4 b　伝送線路モデルによる等価回路
Z_c ：線路特性インピーダンス
β ：線路伝搬定数
Z_{in} ：線路入力インピーダンス

$$(Z_1\|Z_c)=Z_1Z_c/(Z_1+Z_c),\quad \Gamma_1=(Z_1-Z_c)/(Z_1+Z_2)\quad \Gamma_2=(Z_2-Z_c)/(Z_2+Z_c) \qquad (2-7)$$

である。こうして，2短辺のビーム誘起起電力比V_{u2}/V_{u1}，ビーム誘起起電力V_{u1}とワイヤラインの特性インピーダンスZ_cで決まる項G（ライン長さℓ，両短辺端子負荷インピーダンスZ_1，Z_2に依存しない）とワイヤライ ンの回路的パラメータで決まる項（ビームに依存しない）との積として，モニタ応答$Z_t(\omega)$の定式化が得られた。

3．ワイヤライン型ビームモニタの応答

3．1．誘起起電力比 V_{u2}/V_{v1}

本章では具体的に誘起起電力比V_{u2}/V_{u1}を与えて$Z_t(\omega)$を導出する。

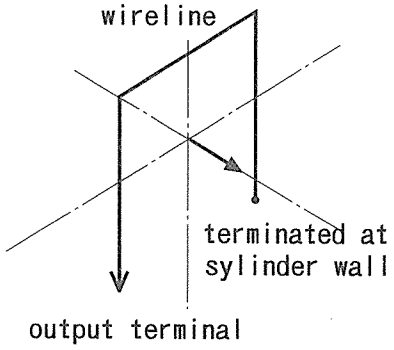
ワイヤラインの短辺はビーム進行方向（z_b−方向）に垂直である。図5に示すようなワイアラインを含む面とz_b-軸（＝ビーム進行方向）の成す角をαとする。z_b−方向に進むビームによる電界の空間依存は

$$\exp(-jkz_b),\quad k=\omega/v_b$$

で表わされる。これを用いると，（$z_b=z\cos\alpha$ であることに注意して）

$$V_{u2}=\int E_{b1}'(r)\exp(-jk\ell\cos\alpha)dr$$
$$=V_{u1}\cdot\exp(-jk\ell\cos\alpha) \qquad (3-1)$$

ここで，$E_{b1}'(r)$は $z=0$ の垂直辺上の電場強度である。以上よりトランスファーインピーダンスに含まれているV_{u2}/V_{u1}はk，αの値で決まる。G値を具体的に算出するのは後章（4.）で行な



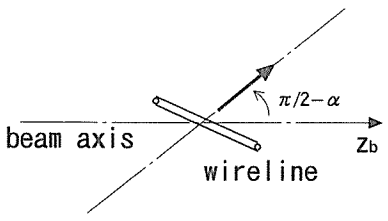


図5　ワイヤラインを含む面と
ビーム進行方向の関係

うこととし，k，αが特別な場合の$Z_t(\omega)$を導くことにする。以下では負荷インピーダンス$Z_2=0$を短絡端，$Z_2=\infty$を開放端，ワイヤラインを簡単にループと呼ぶことにする。

3．2．開放端ループ

開放端ループの場合は$j_2=0$であるから，V_{u2}の寄与はなくなる。$\Gamma_2=1$として次式を得る。

$$Z_t(\omega)=\frac{(Z_1|Z_c)G}{\{1-\Gamma_1\exp(-j2\beta\ell)\}}\times\{(1-\exp(-j2\beta\ell)\} \tag{3-2}$$

出力はループの向き，αに依存しない。

3．3．$\beta\sim k$の場合

この場合は $V_{u2}/V_{u1}\sim\exp(-j\beta\ell\cos\alpha)$

$$[1-\Gamma_2\exp(-j2\beta\ell)-(1-\Gamma_2)\exp(-j\beta\ell)(\frac{V_{u2}}{V_{u1}})]\sim$$
$$1-\Gamma_2\exp(-j2\beta\ell)-(1-\Gamma_2)\exp\{-j\beta\ell(1+\cos\alpha)\}$$

となる。更に，

a）$\alpha=0$（平行ループ）の場合は

$$(1-\Gamma_2)\exp\{-j\beta\ell(1+\cos\alpha)\}=(1-\Gamma_2)\exp\{-j2\beta\ell\}$$

$$Z_t(\omega)=\frac{(Z_1|Z_c)G}{\{1-\Gamma_1\Gamma_2\exp(-\mathrm{j}2\beta\ell)\}}\times(1-\exp\{-j2\beta\ell\}) \tag{3-3}$$

本式は$G\to g$と読み替えるとBarryが導出した$Z_t(\omega)$に一致する[2]。

b）$\alpha=\pi/2$，$3\pi/2$（垂直ループ）の場合

$$(1-\Gamma_2)\exp\{-j\beta\ell(1+\cos\alpha)\}=(1-\Gamma_2)\exp\{-j\beta\ell\}$$

となり，

$$Z_t(\omega)=\frac{(Z_1|Z_c)G}{\{1-\Gamma_1\Gamma_2\exp(-i2\beta\ell)\}}$$
$$\times\{(1-\Gamma_2\exp(-j2\beta\ell)-(1-\Gamma_2)\exp(-j\beta\ell)\} \tag{3-4}$$

即ち，この場合はループの反転（αの180°変化)により出力は変化しない。

c）$\alpha=\pi$（反平行ループ）の場合

$$(1-\Gamma_2(\exp\{-j\beta\ell)1+\cos\alpha)\}=(1-\Gamma_2)$$

となり，

$$Z_t(\omega)=\frac{(Z_1|Z_c)G}{\{1-\Gamma_1\Gamma_2\exp(-j2\beta\ell)\}}\times\Gamma_2\{(1-\exp(1-\exp(-j2\beta\ell)\} \tag{3-5}$$

となる。書きなおすと，

$$Z_t(\omega)\text{（反平行）}=\Gamma_2Z_t(\omega)\text{（平行）} \tag{3-6}$$

となる。$\alpha=0$と$\pi/2$の時の開放並びに短絡端ループの$Z_t(\omega)/(G\cdot Z_1)$を，$Z_c/Z_1=4$について図6に示す。

d）小ループ·····$(2\beta\ell)^2$以上の高次項が無視出来る場合

この場合は　$\exp(-j2\beta\iota)\sim 1-i2\beta\iota-(2\beta\iota)^2/2+\cdots$

$\sim 1-j2\beta\iota$

これを用いると$Z_t(\omega)$は

$$Z_t(\omega)=\frac{(Z_1|Z_c)G}{\{(1-\Gamma_1\Gamma_2)+j\Gamma_1\Gamma_2 2\beta\iota\}}\times\{(j\beta\iota)(1+\Gamma_2+\cos\alpha(1-\Gamma_2))\} \tag{3-7}$$

小ループで開放及び短絡ループは以下のようになる。

開放ループ→$\omega L=Z_c\beta_t$，$\omega L_1=Z_1\beta\iota$と置くき，$\Gamma_2=1$を代入すると，

$$Z_t(\omega)=\frac{j(Z_1Z_c)G(\beta\iota)}{\{Z_c+j(Z_1-Z_c)\beta\iota}=\frac{j\omega L_1GZ_c}{Z_c+j\omega(L_1-L)}=Z_{tA}(o) \tag{3-8}$$

短絡ループ → $\Gamma_2=-1$を代入すると

$\alpha=\pi/2$，$3\pi/2$の垂直ループは，$Z_t(\omega)=0$ (3−9)

$\alpha=0$の場合は，

$$Z_t(\omega)=\frac{j(Z_1Z_c)G(\beta\iota)}{\{Z_1-j(Z_1-Z_c)\beta\iota\}}=\frac{j\omega LGZ_1}{Z_1+j\omega(L-L_1)}=Z_{tA}(s) \tag{3-9'}$$

本章で得た結果を表１にまとめて示しておく。

表１　ループ条件とトランスファーインピーダンス

angle	$Z_t(\omega)$			
	open-loop		*short-oop*	
	finite $\beta\iota$	$\beta\iota\to 0$	*finite* $\beta\iota$	$\beta\iota\to 0$
$\alpha=0$	$Z_t(o)$	$Z_{tA}(o)$	$Z_t(s)$	$Z_{tA}(s)$
$a=\pi/2$	$Z_t(o)$	$Z_{tA}(o)$	$Z_t(sv)$	0
$\alpha=\pi$	$Z_t(o)$	$Z_{tA}(o)$	$-Z_t(s)$	$-Z_{tA}(s)$
$\alpha=2\pi/3$	$Z_t(o)$	$Z_{tA}(o)$	$Z_t(sv)$	0

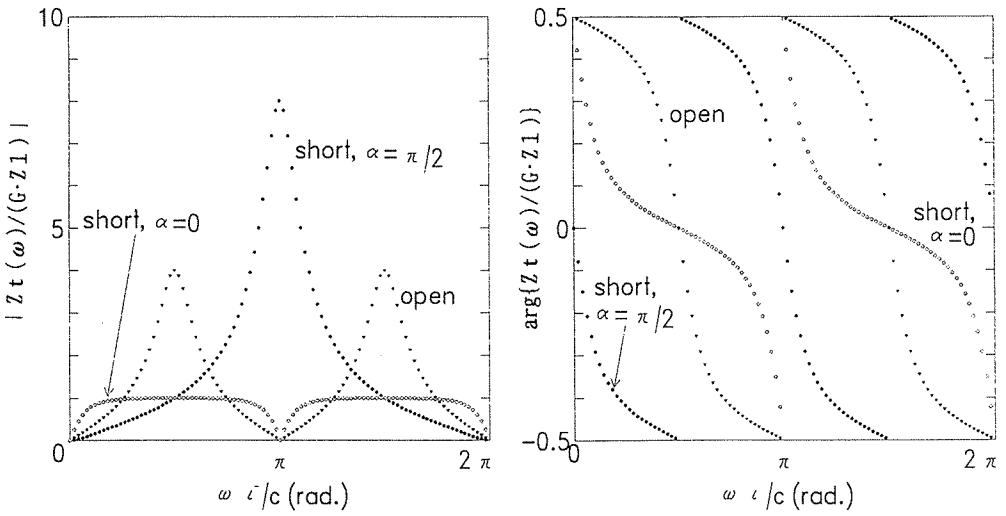


図６　トランスファーインピーダンス$Z_t(\omega)$。$Z_c/Z_1=4$の場合。

$$Z_t(o)=\frac{(Z_1|Z_c)G}{\{1-\Gamma_1\exp(-j2\beta\iota)\}}\times\{(1-\exp(-j2\beta\iota)\}$$

$$Z_t(s)=\frac{(Z_1|Z_c)G}{\{1+\Gamma_1\exp(-j2\beta\iota)\}}\times\{(1-\exp(-j2\beta\iota)\}$$

$$Z_t(sv)=\frac{(Z_1|Z_c)G}{\{1+\Gamma_1\exp(-j2\beta\iota)\}}\times\{(1-\exp(-j2\beta\iota)\}^2$$

3．4．$\beta\iota=\omega\iota/c\ll1$，極端に短い線路或いは低周波に対する開放及び短絡線路型モニタ

3．3．では$\beta\sim c$の小ループ応答を示したが，本節では非相対論的ビームも含め，$j\beta\iota\ll1$の近似ができる場合を取り扱う。これは線路長ιが線路を伝搬する電磁波波長より十分短い場合である。即ち，

$\iota\ll\lambda\sim c/\omega$　或いは$\omega\ll c/\iota$　の場合は$\beta\iota=\omega\iota/c\ll1$。

また，ビーム速度$v_b<c$であるから$k\iota=\omega\iota/v_b=\beta\iota(c/v_b)$であり，ビームが相対論的な場合$v_b\sim c$となり$k\iota\cos\alpha\ll1$も成立する。非相対論的ビームについても，$\omega\iota\cos\alpha/v_b\ll1$が成立するような$v_b$に対しては$k\iota\cos\alpha\ll1$が成立する。

このときは，開放端ループに対しては，

$$Z_t(\omega)=\frac{(Z_1|Z_c)G}{\{(1-\Gamma_1)+j\Gamma_1 2\beta\iota\}}\times j2\beta\iota \tag{3−10a}$$

このループの開放電圧V_oは

$$\lim_{z_1\to\infty(\Gamma_1\to1)} Z_t(\omega)I_b=V_{u1} \tag{3−10b}$$

短絡電流はI_sは，

$$\lim_{z_1\to0(\Gamma_1\to-1)} Z_t(\omega)I_b/Z_1=j(\beta\iota/Z_c)V_{u1}=j\omega(\iota/cZ_c)V_{u1}=j\omega CV_{u1}=j\omega Q \tag{3−10c}$$

ここで，$C=(\iota/cZ_c)$は波長より十分短い開放端伝送線路のキャパシタンスであり，Qは電極に誘導される電荷，$V_0=V_{u1}=Q/C$と考えると，V_o，I_sは容量型モニタの通常の表現になっている。

同様にして短絡端の場合は

$$Z_t(\omega)=\frac{(Z_1|Z_c)G}{\{(1+\Gamma_1)-j\Gamma_1 2\beta\iota\}}\times(-2jkl\cos\alpha) \tag{3−11a}$$

このループの開放電圧V_oは

$$\lim_{z_1\to\infty(\Gamma_1\to1)} Z_t(\omega)I_b=(jk\iota\cos\alpha)V_{u1}=-d\phi/dt \tag{3−11b}$$

短絡電流はI_sは，

$$\lim_{z_1\to0(\Gamma_1\to-1)} Z_t(\omega)I_b/Z_1=-(jk\cos\alpha/j\beta Z_c)V_{u1}=-(1/i\omega)(c/\iota Z_c)(d\phi/dt)=(1/j\omega L)V_o \tag{3−11c}$$

ここで，$L=Z_c\iota/c$は波長より十分短い短絡端伝送線路のインダクタンスである。

ϕをループに鎖交するビーム誘起磁束と考えると，V_o, I_sは誘導型モニタの通常の表現になっている。

さて，

$$(jk\iota\cos\alpha)V_{u1}=\int(jkE_{u\iota})\cos\alpha\iota dh=-\int(\partial B_\theta/\partial t)\cos\alpha\iota dh=-d\phi/dt$$

となり，ϕをループ鎖交磁束と解釈することができる。ここで$jk|E|\sim|\nabla\times E|\sim jk|E|=-(\partial B_\theta/\partial t)$を用いた。

4．V_uの評価

ビームとその周辺(境界条件)が与えられればE_b'が計算できる。計算は$\omega-$空間で行なう事にする。本節では，無限長導体円筒内の偏心線状ビームについて$\int E_b' dh$を計算する。最初に中心軸上のビーム，次に偏心ビームについて計算する。

$k=2\pi/\lambda$,　　$\omega=2\pi v_b/\lambda$,　　$\beta_b=v_b/c$,　　c：光速

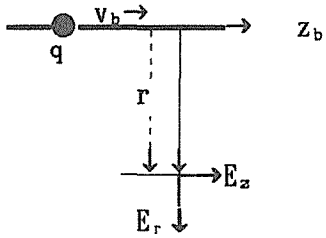
である。(前節の$\beta=\omega/v$と間違えない事。本節ではこの意味のβは使わない)

中心軸（$r=0$）上のビームの場合は，$r_0=0$とする，ループ垂直辺の位置は$r=a$からbとする。$r_0=0$の場合は円筒導体壁があってもなくても電界は同じであるので円筒半径は計算結果に入らない。

偏心ビームの電界強度には専ら Cuperus の表式を用いる。Cupirus はフーリエ成分をλで表しているが，ここではkとωを使う。Cupirus のVはここではv_bである[3]。

4．1．自由空間中の等速電荷による電界

はじめに速度v_b，電荷qの等速単一電荷の電界を示す。電荷の進行方向をz_b軸，z_b軸からの距離をrとし，rでの電界を示す。(左図を参照して)



$$E_r=\frac{(1-\beta_b^2)q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R'^3} \qquad (4-1a)$$

$$E_r=\frac{(1-\beta_b^2)q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(z-v_bt)}{R'^3} \qquad (4-1b)$$

$$R'=[(z-v_bt)^2+(1-\beta_b^2)r^2]^{1/2}$$

$r=a$とb間の電位差は，

$$V_u(t)=\int E_r dr=\frac{(1-\beta_b^2)q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b\frac{r}{R'^3}dr$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{[(z-v_bt)^2+(1-\beta_b^2)a^2]^{1/2}}-\frac{1}{[(z-v_bt)^2+(1-\beta_b^2)b^2]^{1/2}}\right] \qquad (4-2)$$

$z=0$,　$v_bt=T$とおくと

$$V_u(T)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{[T^2+(1-\beta_b^2)a^2]^{1/2}}-\frac{1}{[T^2+(1-\beta_b^2)a^2]^{1/2}}\right] \qquad (4-2')$$

これをフーリエ変換する。次のフーリエ変換の定義と公式を用いる事にする。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega \quad\longleftrightarrow\quad F(\omega)=\int f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

$$\frac{1}{[t^2+a^2]^{1/2}} \quad\longleftrightarrow\quad \frac{2(\pi)^{1/2}}{\Gamma(n+1/2)}\left|\frac{\omega}{2a}\right|^n K_n(a|\omega|)$$

$$V_u(v_bt) \quad\longleftrightarrow\quad V_u(\omega/v_b)/v_b$$

$V_u(t)$のフーリエ変換は

$$V_u(\omega)=(1/v_b)\times$$
$$[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}2\{K_0(a(1-\beta_b^2)^{1/2}|\omega'|)-K_0(b(1-\beta_b^2)^{1/2}|\omega'|)\}]$$
$$\omega'=\omega/v_b$$

$\varepsilon_0\mu_0=1/c^2$を用いると

$$V_u(\omega)=\frac{q}{2\pi}\frac{c^2\mu_0}{v_b}[\{K_0(a(1-\beta_b^2)^{1/2}|\omega'|-K_0(b(1-\beta_b^2)^{1/2}|\omega'|)\}] \quad (4-3)$$

次の展開式を用いて$\omega\to 0$のV_uを求める。

$$-K_0(z)=\sum\frac{(z/2)^{2n}}{n!\Gamma(n+1)}\{ln(z/2)-\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}\} \quad , \quad \Gamma(1)=1, \ \Gamma(2)=1$$

{ } 中の$n=0$までとると,

$$V_u(\omega\to 0)=(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{qc^2}{v_b})ln(b/a)=(\frac{\mu_0 c}{2\pi}\frac{q}{\beta_b})ln(b/a) \quad (4-4)$$

等速点電荷による電流は以下のように表される。

$$i_b(t)=qv_b\delta(z-v_bt) \quad \longleftrightarrow \quad I_b(\omega)=q\exp(-j\omega' z_b) \quad (4-5)$$

これを用いてGを求めることができる。観測点を$z_b=0$にとると

$$G(\omega\to 0)=\frac{V_u(\omega)/I_b(\omega)}{Z_c}|_{z_b=0}=(\frac{\mu_0 c}{2\pi}\frac{1}{\beta_b})ln(b/a)/Z_0 \quad (4-6)$$
$$=G_0/Z_c=g(Barry)(1/\beta_b) \quad , \quad G_0(\frac{\mu_0 c}{2\pi}\frac{1}{\beta_b})ln(b/a)$$

ここでg (Barry) は文献(5)中の Barry のgである。$\beta_b\sim 1$では,

$$G_0/Z_c=g(Barry) \quad (4-6')$$

一般の場合は,

$$G(\omega)=G_0/Z_c\cdot\{K_0(a(1-\beta_b^2)^{1/2}|\omega'|)-K_0(b(1-\beta_b^2)^{1/2}|\omega'|)\} \quad (4-7)$$
$$=G_0\cdot G_1(\omega)/Z_c$$

ここで, $$G_1(\omega)=\{K_0(a(1-\beta_b^2)^{1/2}|\omega'|)-K_0(b(1-\beta_b^2)^{1/2}|\omega'|)\} \quad (4-8)$$

図7にビームエネルギーをパラメータとして$G_1(\omega)$を a=3.3 cm, b=3.5 cm について示す。

4．2．導体円筒内の偏心ビームの場合

本節の電場強度表式には専ら Cuperus の導出した結果を用いる[3]。

電荷は速度v_bで円筒軸に平行な方向に進行する線電荷とし,その位置は図8に示すものとする。Cuperus によると電荷$\rho(z_b)$による電場強度は,

$$E_r(\omega)=-D_k\exp(-jkz_b)\frac{\partial F(r,\phi)}{\partial r}$$
$$F(r,\phi)=-\sum_{m=0}\frac{I_m(gr_0/R)}{\varepsilon_0\pi N}[\frac{K_m(g)}{I_m(g)}I_m(gr/R)-K_m(gr/R)]\cos\{m(\phi-\phi_0)\}]$$

$m=0$ の時 $N=2$
$m\geqq 1$ の時 $N=1$
$g=(2\pi R/\gamma\lambda))=(1-\beta^2)^{1/2}\cdot R\cdot(\omega/v_b)$

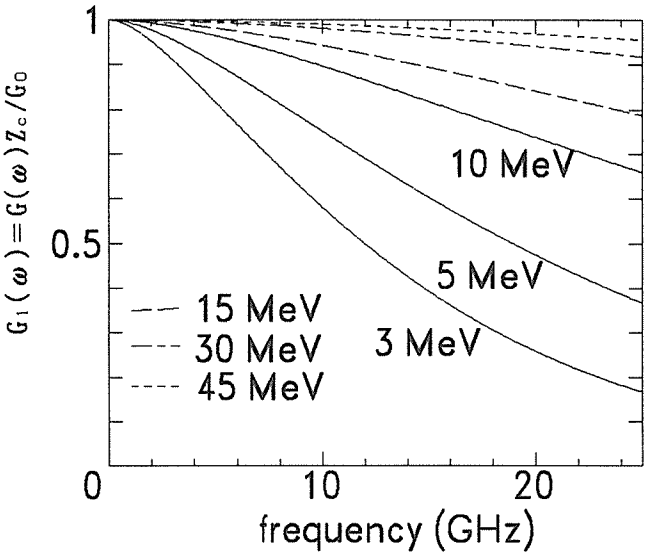


図7　種々のビームエネルギー時の$G(\omega)/G(0)$。
a＝3.3 cm，b＝3.5 cmの場合。

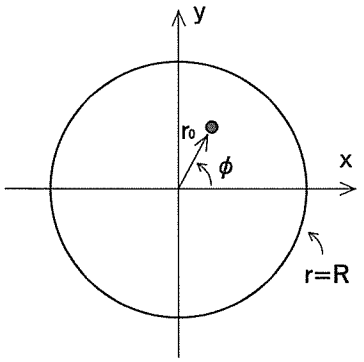


図8　導体円筒内の偏心ビーム

Rは円筒半径でここでは$R=b$

D_kは電荷のフーリエ展開係数で，点電荷の場合は以下のようになる。

$$\rho(z_b)=q\delta(u_b t-z_b)$$

$$\int\delta(v_b t-z_b)\exp(-j\omega t)dt=(1/v_b)\exp(-jkz_b)=D_k\exp(-jkz_b)\text{により，}$$

$$D_k=(q/v_b) \tag{4-9}$$

上式の$E_r(\omega)$を$b\to a$まで積分して$V_u(\omega)$を求める。

$$V_u(\omega)=\int E_r(\omega)dr=-D_k\exp(-jkz_b)\int\frac{\partial F(r,\phi)}{\partial r}dr$$

$$=-D_k\exp(-jkz_b)[F(b,\phi)|_{R=b}-F(a,\phi)|_{R=b}]$$

$$=\{D_k\exp(-jkz_b)\}\times\sum_{m=0}\frac{I_m(gr_0/R)}{\varepsilon_0\pi N}[\{\frac{K_m(g)}{I_m(g)}I_m(g)-K_m(g)\}\cos\{m(\phi-\phi_0)\}$$

$$-\{\frac{K_m(g)}{I_m(g)}I_m(ga/b)-K_m(ga/b)\}\cos\{m(\phi-\phi_0)\}]$$

$$=\{D_k\exp(-jkz_b)\}\times\sum_{m=0}\frac{I_m(gr_0/R)}{\varepsilon_0\pi N}\{\frac{K_m(g)}{I_m(g)}I_m(ga/b)-K_m(ga/b)\}\cos\{m(\phi-\phi_0)\} \tag{4-10}$$

$g=(1-\beta^2)^{1/2}\cdot b\cdot(\omega/v_b)\to 0$の時は以下のような近似が出来る。

$\sum_{m=0}$の中について，$z=ga/b\to 0$とし，以下の近似式を用いる。

$$m=0 \quad I_0(z)\sim 1 \qquad m\neq 0 \quad I_m(z)\sim (z/2)^m/\Gamma(m+1)$$
$$m=0 \quad K_0(z)\sim -ln(z) \qquad m\neq 0 \quad I_m(z)\sim (z/2)^{-m}/\Gamma(m)/2$$
$$\frac{1}{\varepsilon_0\pi N}\{\frac{(gr_0/2R)^m}{\Gamma(m+1)}[\frac{(g/2)^{-m}\Gamma(m)/2}{(g/2)^m/\Gamma(m+1)}\cdot\frac{(ga/b/2)^m}{\Gamma(m+1)}-\frac{(ga/b/2)^{-m}}{\Gamma(m)/2}\}\cos\{m|\phi-\phi_0)\}$$
$$=\frac{1}{\varepsilon_0\pi N}\cdot\frac{(r_0/b)^m}{2N}[(a/b)^m-(a/b)^{-m}]\cos\{m(\phi-\phi_0)\}$$
$$N=1 \quad for \quad m=0$$
$$N=m \quad for \quad m\geqq 0$$

この場合は

$$V_u(\omega)=\frac{D_k}{2\pi\varepsilon_0}\exp(-jkz_b)\{ln(a/b)+\sum_{m=1}\frac{(r_0/b)^m}{2m}[(a/b)^m-(a/b)^{-m}]\cos\{m(\phi-\phi_0)\} \quad (4-11)$$

偏心した等速点電荷に対しては,

$$V_u(\omega)=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{c^2q}{v_b}\exp(-jkz_b)\{ln(a/b)+\sum_{m=1}\frac{(r_0/b)^m}{2m}[(a/b)^m-(a/b)^{-m}]\cos\{m(\phi-\phi_0)\} \quad (4-12)$$

更に,

$$G=\frac{V_u(\omega)/(\omega)}{Z_c}|_{zb=0}=(\frac{\mu_0c}{2\pi}\frac{1}{\beta_b})\{ln(a/b)+\sum_{m=1}\frac{(r_0/b)^m}{2m}[(a/b)^m-(a/b)^{-m}]\cos\{m(\phi-\phi_0)\}$$
$$=G_0\cdot G_1/Z_c \quad (4-13)$$

$$G_1=1+\sum_{m-1}\frac{(r_0/b)^m}{2m}[(a/b)^m-(a/b)^{-m}]\cos\{m(\phi-\phi_0)\}/ln(b/a) \quad (4-13')$$

一般の場合は,

$$G(\omega)=\frac{V_u(\omega)/I_b(\omega)}{Z_c}|_{zb=0}$$
$$=(\frac{\mu_0c}{2\pi}\frac{}{\beta_bZ_c})\times\sum_{m=0}\frac{2I_m(gr_0/R)}{N}\{\frac{K_m(g)}{I_m(g)}I_m(ga/b)-K_m(ga/b)\cos\{m(\phi-\phi_0)\}$$
$$=G_0/Z_c\cdot\sum_{m=0}\frac{2I_m(gr_0/R)}{N}\{\frac{K_m(g)}{I_m(g)}I_m(ga/b)-K_m(ga/b)\cos\{m(\phi-\phi_0)\}$$
$$=G_0\cdot G_1'(\omega)/Z_c \quad (4-14)$$

ここで

$$G_1'(\omega)=\sum_{m=0}\frac{2I_m(gr_0/R)}{N}\{\frac{K_m(g)}{I_m(g)}I_m(ga/b)-K_m(ga/b)\cos\{m(\phi-\phi_0)\} \quad (4-14')$$

$r_0=0$の場合は$m=0$以外は$I_m(0)=0$になるから中心軸上のビーム(4−8)と一致する。

4．3．$G(\omega)$の周波数依存性について

V_u（ωの0次の項）$\gg O$（ωの一次以上の項）が成立する場合は，(4−6')(4−13')は次のようになる。

$G=g(Barry)/\beta_b$

このことが成立する条件は

$$(b-a)(1-\beta^2)^{1/2}|\omega/v_b|)\ll 1 \qquad (4-15)$$

或いは

$$\omega\gg v_b/[(b-a)(1-\beta^2{}_b)^{1/2}]=c\beta_b/[(b-a)(1-\beta_b{}^2)^{1/2}]=\omega_c \qquad (4-15')$$

臨界角周波数ω_cは$\beta_b\to 0$, 即ち低エネルギー程低くなることがわかる。これは等速点電荷がつくる観測点(z_b軸からrだけ離れた点，４．１．の図を参照)での電磁場の持続時間(電磁場はパルス状になるがそのパルス幅)が$\beta_b\to$小なるほどひろがることに相当している。$\beta_b\to 1$で, 観測点電磁場の時間依存が$\delta(z_b-ct)$になる場合が，ω依存性無しに相当しており，Barry の場合である。図７の$G(\omega)$はこの事をω空間で示している。$G(\omega)$は$\beta_b\to$小なるほど$\omega\to$大で小さくなる。取り扱っているのは等速点電荷の場であるから，輻射はないので，また損失の無い場を考えているから，$[G(\omega)]$のω積分$(=\int E(t)dt)$は保存されるであろう。$\beta_b\to$小なるほど$\omega\to$大でGが小なる分と$(1/\beta_b)-$因子とでこの保存が達成されているとみる事が出来よう。

$\omega\sim or>\omega_c$ではGのω依存性を無視出来ない。この効果は Barry のgでは表現されない。更に重要な事と思われるが，電子ビームの替わりに中心に導線を張って電流を流す模擬実験ではこの効果を模擬する事は出来ない。

５．ループ出力端から出力波形観測装置までの伝送線路の伝送特性と電子ビーム電流波形

ループ出力時間応答の計算には，

①ビームのつくる電磁場

②トランスファーインピーダンス$Z_t(\omega)$の計算

③出力（我々の場合電圧）波形観測装置（sampling scope）と，ループ出力端までの伝送線路の伝送特性を求めることが必要である。これらのうち，①・②については既にべたのでここでは③について述べる。

電子ビーム波形を次のようにガウス分布とする。

$$i_b(t)=\{Q/\sqrt{2\pi}\sigma_b)\}\exp\{-(t-t_0)^2/(2\sigma_b{}^2)\} \qquad (5-1)$$

Q：単位パルス当たりの電荷

$$I_b(\omega)=Q\exp(-j\omega t_0)\exp(-\omega^2\sigma_b{}^2/2) \qquad (5-1')$$

伝送線路及び観測装置のパルス(電圧)応答として，

$$h(t)=\{1/(\sqrt{2\pi}\sigma_T)\}\exp\{-(t-t_T)^2/(2\sigma_T{}^2)\} \qquad (5-2)$$

を仮定する。sampling scope を用いる場合は，トリッガー系のジッターの影響もこの中に含まれる。伝達関数(応答関数のフーリエ変換)は，

$$H(\omega)=e\exp(-jt_T\omega)\exp(-\omega^2\sigma_T{}^2/2) \tag{5-2'}$$

観測波形 $V(\omega)$は

$$\begin{aligned}V(\omega)&=H(\omega)Z_t(\omega)I_b(\omega)\\&=Z_t(\omega)I(\omega)\end{aligned} \tag{5-3}$$

ここで,

$$I(\omega)=H(\omega)I_b(\omega)=\exp(-jt_L\omega)\exp(-\omega^2\sigma^2/2) \tag{5-3'}$$
$$t_L=t_0+t_T\quad,\quad \sigma=\sqrt{\sigma_b{}^2+\sigma_T{}^2}$$

$Z_t(\omega)$に 4．で計算した

$G_1(\omega)=G(\omega)Z_c/Z_0$と，$Z_{t1}(\omega)=Z_t(\omega)/\{G(\omega)\cdot Z_1\}$

をもちいると,

$$Z_t(\omega)=(G_0\cdot Z_1/Z_c)\cdot G_1(\omega)\cdot Z_{t1}(\omega) \tag{5-4}$$

ビームは円筒中心軸上の line beam とすると，4．1．の結果が使える。

$$\begin{aligned}V(\omega)&=H(\omega)Z_t(\omega)I_b(\omega)\\&=\{G_0\cdot Z_1/Z_c\}G_1(\omega)\cdot Z_{t1}(\omega)\cdot I(\omega)\end{aligned} \tag{5-5}$$

時間波形は,

表 2　モニター応答波形計算条件

ループ条件　b（=円筒半径）0.035			
β	$=k$		
ι	0.04 m		
Z_c	150（h=0.2 cm，a=0.033 m		
Z_1	50 Ω		
Z_2	0（short）		∞（open）
α	0	$\pi/2$	依存しない
ビーム及び線路条件			
ビーム電荷	0.1 nc		
エネルギー	28 MeV		
パルス半値幅＊	$\sigma=41ps$ ($\tau_a=5ps,\tau_b=29ps$)		
遅れ時間　t_L	$1nsec$		
半値幅$=2\pi$，$\sigma=21og(2)\tau$			
数値計算条件			
ω-*range of* $V(\omega)$	0-100 GHz		
t-*range of* $v(t)$	0-5.12 ns		
Δt（データ数：2^9）	10 ps		

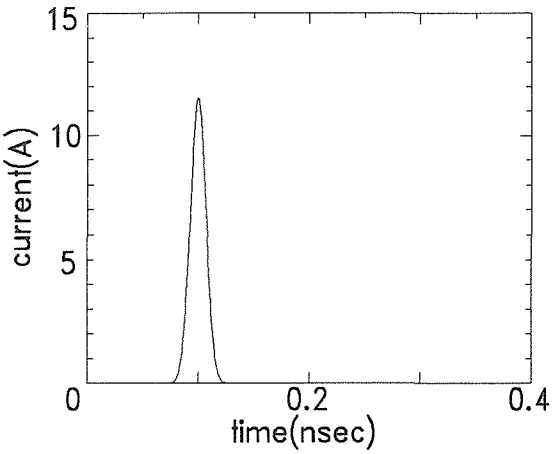


図 9　入射ビーム波形

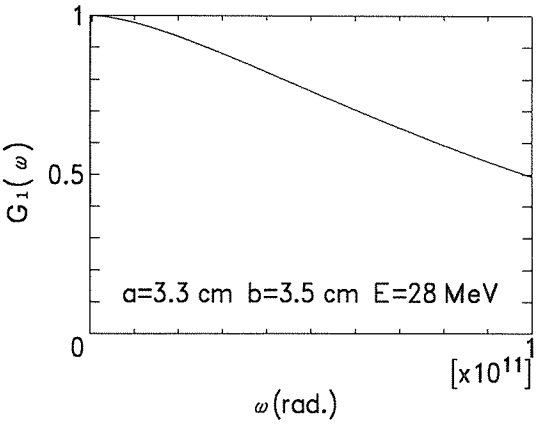


図10　$G_1(\omega)$の計算値。a＝3.3 cm，b＝3.5 cm，ビームエネルギー＝28 MeV

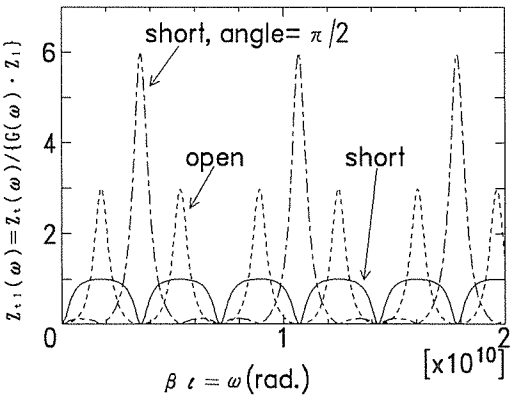


図11　$Z_{t1}(\omega)$の計算値。Q＝0.1 nC，Z_1＝50 Ω，Z_c＝150 Ω

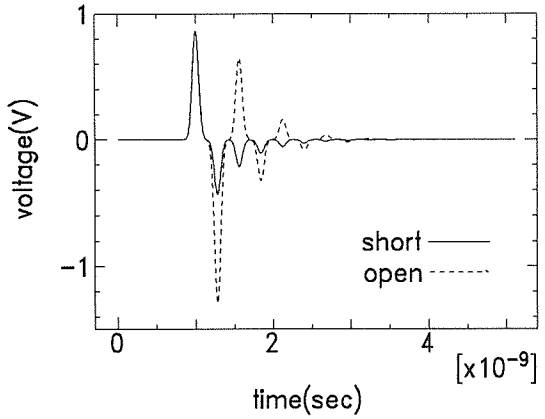


図12　観測装置での出力波形計算値。短絡端及び開放端，α＝0。

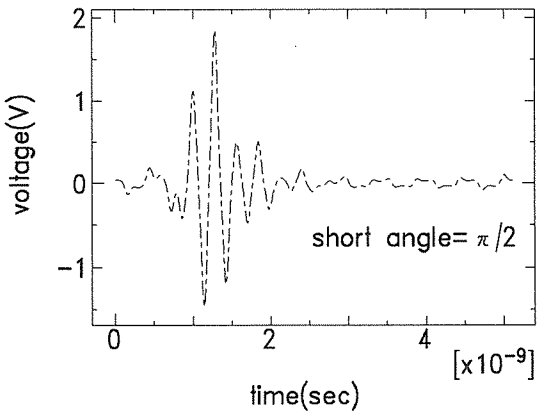


図13　観測装置での出力波形 計算値。短絡端，$\alpha=\pi/2$。

$$v(t)=F^{-1}\{V(\omega)\}$$

によって得られる。

時間領域での電子ビーム波形$I_b(t)$と，表2に示すパラメータを用いて計算した$G_1(\omega)$, $Z_{t1}(\omega)$および観測装置出力波形$v(t)=F^{-1}\{V(\omega)\}$を算出した結果を図9−13に示す。

6．結　　言

高周波領域での高速電子ビームモニタの応答を電磁波動的結合を考慮した一般的取り扱いにより導出した。この方法を円筒導体壁に設置されたワイヤライン型モニタに応用し，その応答をトランスファーインピーダンスとして求めた。導出過程において，導体壁とそれに平行なワイヤライン長辺を伝送線路モデルで扱った。その結果，モニタの応答は電子ビームがつくる電磁場計算と伝送線路パラメータとの結合として表現され，モニタ感度（絶対値）が得られた。無限長導体

円筒中を円筒軸に平行に進行する電子ビームに対するワイヤライン型モニタの応答を電子ビームエネルギー，ワイヤラインを含む面とビーム軸のなす角α，モニタの短辺部の出力端及びもう一端に接続された負荷インピーダンスZ_1，Z_2をパラメータとして計算した。$\alpha=0$，$\pi/2$，πの場合の計算結果を示した。ワイヤラインが十分短い場合は$Z_2\rightarrow$開放の場合は従来の容量型モニタに，$Z_2\rightarrow$短絡の場合は誘導型モニタに帰着することを示した。

本論文で導出したモニタ応答の正当性は，伝送線路モデルの採用，負荷インピーダンスZ_1，Z_2を純抵抗として扱っていること等が妥当であるかどうかに依存している。このら点の検証のために，電子線加速器を用いたピコ秒パルスビーム実験を行っており，近い将来報告する予定である。

参考文献

1) Rumsey V.H. : IEEETrans. Ant. Prop., AP−11(1963), 73
2) Kerns Q. A. and Large D.B. : UCRL−11551 (1964)
3) Cuperus J. H.: Nucl. Instr. Meth.145 (1977) 219
4) Lamberst on G.R. : in Physics of Particle Accelerator,eds. M. Month &M. Dieves, AIP 153, vol.1 (1987)
5) Barry W. : Nucl. Instr. Meth. inPhys. Res., A 301 (1991), 407